PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE – 2003

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Observaciones importantes: El alumno deberá responder a una sola de las dos cuestiones de cada uno de los bloques. La puntuación de las dos cuestiones de cada bloque es la misma y se indica en la cabecera del bloque.

BLOQUE 1

1º) a) Estudiar, en función de los valores del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 2x+ay+z=5 \\ x+ay+z=1 \\ 2x+(a+1)y+(a+1)z=0 \end{cases}$

b) Resolverlo para a = 2, utilizando la Regla de Cramer.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & a+1 & a+1 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 2 & a & 1 & 5 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 2 & a+1 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de M es, en función de a, el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & a+1 & a+1 \end{vmatrix}=2a(a+1)+(a+1)+2a-2a-2(a+1)-a(a+1)=$$

$$=(a+1)(2a+1-2-a)=(a+1)(a-1)=a^2-1=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{a_1=1} \\ \underline{a_2=-1} \end{cases}$$

$$Para \ \begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq -1 \end{cases} \Rightarrow Rango \ \ M = Rango \ \ M' = 3 = n^o \ \ incóg. \Rightarrow Compatible \ \ Determinado$$

Veamos que ocurre con el rango de M’ para los valores de a que hacen que el rango de M sea dos:

$$Para \ \ a = 1 \ \ es \ \ M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = C_3\} \Rightarrow Rango \ \ de \ \ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, \ C_3, \ C_4\} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 10 + 2 - 10 - 4 = 12 - 16 = -4 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \ \ de \ \ M' = 3}$$

$$Para \ \ a = -1 \ \ es \ \ M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = -C_3\} \Rightarrow Rango \ \ de \ \ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, \ C_3, \ C_4\} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 10 = -8 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \ \ de \ \ M' = 3}$$

$$Para \ \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases} \Rightarrow Rango \ \ M \neq Rango \ \ M' \Rightarrow Incompatible$$

b)

Resolvemos para a = 2 por Cramer. Es sistema resulta: $\begin{cases} 2x + 2y + z = 5 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{30 + 3 - 15 - 6}{12 + 3 + 4 - 4 - 6 - 6} = \frac{33 - 21}{3} = \frac{12}{3} = \underline{\underline{4 = x}}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{6 + 10 - 2 - 15}{3} = \frac{16 - 17}{3} = \underline{\underline{-\frac{1}{3} = y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \frac{15+4-20-6}{3} = \frac{19-26}{3} = \underline{\underline{-\frac{7}{3} = z}}$$

****

2º) a) Encontrar para qué valores de a los vectores $\overrightarrow{v_1} = (2,\ 2a,\ 4)$, $\overrightarrow{v_2} = (0,\ a,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_3} = (1,\ 1,\ 1)$ son linealmente independientes.

b) Expresar, si es posible, el vector $\overrightarrow{w} = (a,\ b,\ c)$, donde b y c son números reales arbitrarios, como combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$.

----

a)

Los vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$ son linealmente independientes si el rango que tienen es 3 y son linealmente dependientes si el rango es menor que 3.

$$Rango\ \left\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{v_3}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 2a & 4 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2a + 2a - 4a - 2 = \underline{-2 \neq 0,\ \forall a \in R}$$

$$\underline{\underline{Los\ \ vectores\ \ \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2}\ \ y\ \ \overrightarrow{v_3}\ \ son\ \ linealmente\ \ independientes\ \ \forall a \in R.}}$$

b)

Como el valor de a puede ser cualquier valor real, hacemos a = 0, con lo cual el problema es equivalente a expresar el vector $\overrightarrow{w} = (0,\ b,\ c)$ en combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{v_1} = (2,\ 0,\ 4)$, $\overrightarrow{v_2} = (0,\ 0,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_3} = (1,\ 1,\ 1)$.

$$\overrightarrow{w} = \alpha \cdot \overrightarrow{v_1} + \beta \cdot \overrightarrow{v_2} + \gamma \cdot \overrightarrow{v_3}$$

$$(0,\ b,\ c) = \alpha \cdot (2,\ 0,\ 4) + \beta \cdot (0,\ 0,\ 1) + \gamma \cdot (1,\ 1,\ 1) \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \gamma = 0 \\ \underline{\gamma = b} \\ 4\alpha + \beta + \gamma = c \end{cases}$$

$$2\alpha + b = 0\ ;;\ \underline{\alpha = -\frac{b}{2}}\ ;;\ \beta = c - 4\alpha - \gamma = c + 2b - b = \underline{b + c = \beta}$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{w} = -\frac{b}{2}\overrightarrow{v_1} + (b + c)\overrightarrow{v_2} + b\,\overrightarrow{v_3}}}$$

****

BLOQUE 2

1º) Encontrar la distancia del punto P(1, 0, 1) a la recta r determinada por los planos π_1, que pasa por los puntos A(1, 1, 1), B(0, 1, 1) y C(-1, 0, 0) y $\pi_2 \equiv x + y = 2$.

$$\overrightarrow{p} = \overrightarrow{BA} = A - B = (1,\ 1,\ 1) - (0,\ 1,\ 1) = (1,\ 0,\ 0)$$

$$\overrightarrow{q} = \overrightarrow{CA} = A - C = (1,\ 1,\ 1) - (-1,\ 0,\ 0) = (2,\ 1,\ 1)$$

$$\pi_1\left(C;\ \overrightarrow{p},\ \overrightarrow{q}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = z + y = 0\ ;;\ \underline{\pi_1 \equiv y + z = 0}$$

La expresión de la recta r determinada por unas ecuaciones paramétricas es:

$$r \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv y + z = 0 \\ \pi_2 \equiv x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow\ \underline{z = \lambda}\ \Rightarrow\ \underline{y = -\lambda}\ ;;\ x = 2 - y = \underline{2 + \lambda = x}\ \Rightarrow\ \underline{r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Un punto y un vector director de r son A(2, 0, 0) y $\overrightarrow{v} = (1,\ -1,\ 1)$.

La distancia de un punto a una recta viene dada por la fórmula: $d(P,\ r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$, siendo A un punto de r y $\overrightarrow{v}$ un vector director de la recta r.

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (1,\ 0,\ 1) - (2,\ 0,\ 0) = \underline{(-1,\ 0,\ 1) = \overrightarrow{AP}}$$

$$d(P,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|\,j + k + i + j\,|}{\sqrt{3}} = \frac{|\,i + 2j + k\,|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + 4 + 1}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\sqrt{2}\ u = d(P,\ r)}}$$

****

2º) Encontrar la distancia del punto P(0, 6, 1) al plano π, determinado por el punto $A(0,\ 1,\ 3)$ y la recta r que pasa por los puntos B(1, 0, 1) y C(0, 0, 2).

No es necesario determinar la recta r para hallar la ecuación del plano π, que puede calcularse por los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}\ y\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{CA}$ y por el punto A(0, 1, 3).

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA} = A - B = (0,\ 1,\ 3) - (1,\ 0,\ 1) = (-1,\ 1,\ 2)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CA} = A - C = (0,\ 1,\ 3) - (0,\ 0,\ 2) = (0,\ 1,\ 1)$$

$$\pi(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ x - (z-3) - 2x + (y-1) = 0\ ;;\ -x - z + 3 + y + 1 = 0$$

$$\underline{\pi \equiv x - y + z - 4 = 0}$$

Sabiendo que la distancia de un punto a una recta viene dada por la fórmula $d(P,\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, que aplicada al caso que nos ocupa sería:

$$d(P,\ \pi) = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 6 + 1 \cdot 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|0 - 6 + 1 - 4|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|-9|}{\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = \underline{\underline{3\sqrt{3}\ u = d(P,\ \pi)}}$$

****

BLOQUE 3

1º) a) Si f es una función derivable en x = a y f'(x) = 0, ¿es seguro que f presenta en a un extremo relativo? Justificar la respuesta.

b) Determinar dos números no negativos cuya suma sea 100 y tales que la suma de sus cuadrados sea: i) Mínima. ii) Máxima.

----

a)

No es seguro.

Para que una función derivable tenga un extremo relativo en un punto de abscisa x = a es condición necesaria que se anule la primera derivada en ese punto; sin embargo, no es suficiente, ya que tiene que ser distinta de cero la segunda derivada en ese punto.

Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ no tiene un máximo relativo para x = 0, que anula la primera derivada, ya que también se anula la segunda derivada para ese punto. Lo que tiene para x = 0 es, en este caso, un punto de inflexión.

b)

Sean los números pedidos x e y. (x > 0, y > 0). $x + y = 100$;; $\underline{y = 100 - x}$

$$S = x^2 + y^2 = x^2 + (100 - x)^2 = x^2 + 10000 - 200x + x^2 = 2x^2 - 200x + 1000 =$$

$$= \underline{2\left(x^2 - 100x + 500\right) = S(x)}$$

$$S'(x) = 2(2x - 100) = \underline{4(x - 50) = S'(x)} \;\;;;\;\; \underline{S''(x) = 4}$$

$$i\ )\ S \Rightarrow Máxima \Rightarrow \begin{cases} S'(x) = 0 \to 4(x - 50) = 0 \;\;;;\;\; x - 50 = 0 \;\;;;\;\; \underline{x = 50} \\ S''(x) < 0 \Rightarrow S''(50) = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{S \;\; no \;\; puede \;\; ser \;\; máximo}} \end{cases}$$

$$ii\ )\ S \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \begin{cases} S'(x) = 0 \to 4(x - 50) = 0 \;\;;;\;\; x - 50 = 0 \;\;;;\;\; \underline{x = 50} \\ S''(x) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo \;\; para \;\; x = y = 50}} \end{cases}$$

****

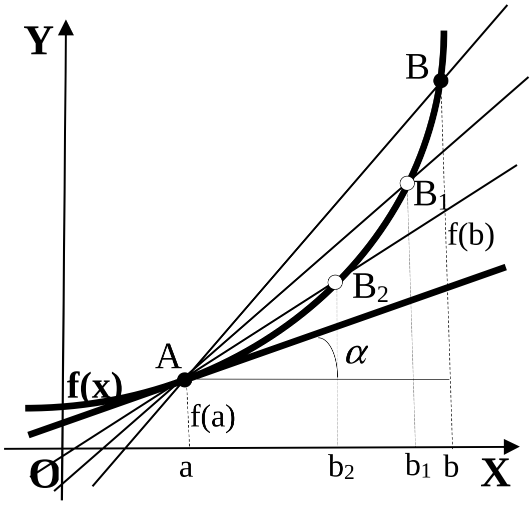
2º) a) Definición de derivada de una función en un punto.

b) Interpretación geométrica de la derivada.

c) Encontrar las ecuaciones de las tangentes a la curva $y = x^3 - 3x + 2$ que son paralelas a la recta y = 9x.

----

a)



Consideremos la función f de la figura, continua en el punto A, de abscisa a. Se denomina tasa de variación media de un intervalo cerrado [a, b] a la expresión:

$$TVM\,[a,\, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (1)$$

La TVM[a, b] es la tangente o pendiente de la secante de la función f que pasa por los punto A y B.

La derivada de una función en un punto es la tasa de variación instantánea de la función en ese punto, o sea, es el límite cuando $b \rightarrow a$ de la fracción (1). Si hacemos el cambio de variable b - a = h, queda finalmente la expresión de la derivada, que se expresa como sigue:

$$f'(a) = y'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

b)

La interpretación gráfica de la derivada de una función en un punto puede deducirse de la observación de la figura: cuando b tiende a a (h tiende a cero), el punto B tiende a aproximarse infinitamente al punto A, con lo cual la secante tiende a confundirse con la tangente; es decir:

<u>la derivada de una función en un punto es la tangente de la función en ese punto.</u>

c)

Se trata de calcular la tangente a la curva $y = x^3 - 3x + 2$ en los puntos en que la tangente (derivada) es 9, que es la pendiente de la recta y = 9x.

$$y' = 3x^3 - 3 = 9 \;;;\; 3x^2 = 12 \;;;\; x^2 = 4 \;\Rightarrow\; x_1 = 2 \;;;\; x_2 = -1$$

$$y_{(2)} = 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 = 8 - 6 + 2 = 10 - 6 = 4 \;\Rightarrow\; \underline{P(2,\; 4)}$$

$$y_{(-2)} = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 2 = -8 + 6 + 2 = 6 - 6 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{Q(-2,\; 0)}$$

Sabiendo que la recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, aplicada a los puntos determinados con una pendiente $m = y'_0 = 9$, sería:

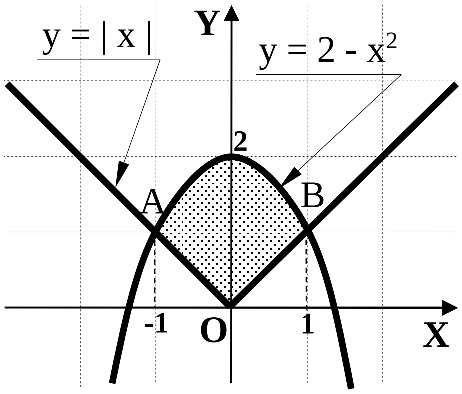
$$t_1 \;\Rightarrow\; y - 4 = 9(x - 2) = 9x - 18 \;\;;;\;\; \underline{\underline{t_1 \equiv 9x - y - 14 = 0}}$$

$$t_2 \;\Rightarrow\; y - 0 = 9(x + 2) = 9x + 18 \;\;;;\;\; \underline{\underline{t_2 \equiv 9x - y + 18 = 0}}$$

****

BLOQUE 4

1º) Encontrar el área del recinto determinado por las curvas $y = | x |$ e $y = 2 - x^2$.



Los puntos de corte de ambas funciones son:

$$2 - x^2 = | x |,\ \forall x \in R,\ x < \left|\sqrt{2}\right| \Rightarrow \begin{cases} 2 - x^2 = x \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \\ 2 - x^2 = -x \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow No\ \ válida. \\ x_2 = -1 \rightarrow \underline{A(-1,\ 1)} \end{cases} \qquad x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow No\ \ válida. \\ x_2 = 1 \rightarrow \underline{B(1,\ 1)} \end{cases}$$

Todas las ordenadas de la parábola son mayores que las de la función $f(x) = | x |$; por otra parte, ambas funciones son simétricas con respecto al eje de ordenadas, por lo tanto, el área pedida es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^1 \left(2 - x^2 - x\right) \cdot dx = 2 \cdot \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2 \cdot \left[\left(2 - \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2}\right) - 0\right] = 2 \cdot \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2 \cdot \frac{12 - 2 - 3}{6} = \underline{\underline{\frac{7}{3}\ u^2 = S}}$$

****

2º) Calcular $I=\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$.

$$x^2-5x+6=0\ ;;\ x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}\ \Rightarrow\ \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=2 \end{cases}$$

$$x^2-5x+6=0\ \Rightarrow\ (x-3)(x-2)=0\ ;;\ \frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}=$$

$$=\frac{Ax-2A+Bx-3B}{x^2-5x+6}=\frac{(A+B)x+(-2A-3B)}{x^2-5x+6}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{r} A+B=0 \\ -2A-3B=1 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} 2A+2B=0 \\ -2A-3B=1 \end{array}\right\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -B=1\ ;;\ \underline{B=-\frac{1}{3}}\ ;;\ A+B=0\ ;;\ A=-B=\underline{\frac{1}{3}=A}$$

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{\frac{1}{3}}{x-3}+\frac{-\frac{1}{3}}{x-2}=\underline{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}}$$

$$I=\int\frac{dx}{x^2-5x+6}=\int\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}\right)\cdot dx=\frac{1}{3}\cdot\int\frac{1}{x-3}\cdot dx-\frac{1}{3}\cdot\int\frac{1}{x-2}\cdot dx=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot L(x-3)-\frac{1}{3}\cdot L(x-2)+C=\frac{1}{3}\cdot L\frac{x-3}{x-2}+C=\underline{\underline{L\sqrt[3]{\frac{x-3}{x-2}}+C=I}}$$

****