PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

JUNIO – 2002

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá responder a una sola de las dos cuestiones de cada uno de los bloques. La puntuación de las dos cuestiones de cada bloque es la misma.

BLOQUE 1

1º) a) Clasificar, en función de los valores del parámetro a el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x+y+z=a \\ 2x+y+2z=2a \\ 2x+y+3z=3 \end{cases}$$

b) Resolverlo, si es posible, para a = 0.

----

a)

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} ;;\ M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & 2a \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \{C_1=C_2\} \ \Rightarrow \ \underline{Rango\ \ de\ \ M=2}$$

$El\ \ rango\ \ de\ \ M'\ \ es:$

$$M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2a \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \{C_1=C_2\}$$

$$M' \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 2 & 2 & 2a \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}=12+6a+4a-4a-6-12a=6-6a=\underline{6(1-a)}$$

$$M' \Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 2a \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}=12(1-a)$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 2 \Rightarrow \underline{Compatible\ \ Indeterminado}$$

$$\underline{\underline{Para\ a \neq 1 \Rightarrow Rango\,M \neq Rango\ M' \Rightarrow Incompatible}}$$

b)

Para a = 0 el sistema resulta: $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 2x+y+2z=0 \\ 2x+y+3z=3 \end{cases}$

<u>Según lo anterior, para a = 0 el sistema es incompatible.</u>

****

2º) a) Encontrar para qué valor de λ los vectores $\overrightarrow{u}=(1,1,\lambda)$, $\overrightarrow{v}=(2,-1,\lambda)$ y $\overrightarrow{w}=(3,0,1)$ son linealmente dependientes .

b) Para $\lambda=1$, expresar el vector $\overrightarrow{z}=(1,5,1)$ como combinación lineal de los tres vectores del apartado anterior.

----

a)

$$\alpha\cdot\overrightarrow{u}+\beta\cdot\overrightarrow{v}+\gamma\cdot\overrightarrow{w}=0 \Rightarrow \alpha\cdot(1,1,\lambda)+\beta\cdot(2,-1,\lambda)+\gamma\cdot(3,0,1)=(0,0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha+2\beta+3\gamma=0 \\ \alpha-\beta=0 \\ \alpha\lambda+\beta\lambda+\gamma=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \rightarrow \alpha=\beta \\ (3) \end{array}$$

Sustituyendo en las ecuaciones (1) y (3):

$$\left.\begin{array}{r} \alpha+2\alpha+3\gamma=0 \\ \alpha\lambda+\alpha\lambda+\gamma=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3\alpha+3\gamma=0 \\ 2\lambda\alpha+\gamma=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -\alpha-\gamma=0 \\ 2\lambda\alpha+\gamma=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha(2\lambda-1)=0 \;;;\; 2\lambda-1=0 \;;;\; \underline{\underline{\lambda=\frac{1}{2}}}$$

b)

$$\text{Para } \lambda=1 \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{v}=(2,-1,1) \\ \overrightarrow{w}=(3,0,1) \end{cases}$$

$$\alpha\cdot\overrightarrow{u}+\beta\cdot\overrightarrow{v}+\gamma\cdot\overrightarrow{w}=\overrightarrow{z} \Rightarrow \alpha\cdot(1,1,1)+\beta\cdot(2,-1,1)+\gamma\cdot(3,0,1)=(1,5,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} \alpha+2\beta+3\gamma=1 \\ \alpha-\beta=5 \\ \alpha+\beta+\gamma=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \rightarrow \alpha=\beta+5 \\ (3) \end{array}$$

Sustituyendo en las ecuaciones (1) y (3):

$$\left.\begin{array}{r} \beta+5+2\beta+3\gamma=1 \\ \beta+5+\beta+\gamma=1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3\beta+3\gamma=-4 \\ 2\beta+\gamma=-4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3\beta+3\gamma=-4 \\ -6\beta-3\gamma=12 \end{array}\right\} \Rightarrow -3\beta=8 \;;;\; \underline{\beta=-\frac{8}{3}}$$

$$\alpha=\beta+5=-\frac{8}{3}+5=\underline{\frac{7}{3}=\beta} \;;;\; \alpha+\beta+\gamma=1 \;;;\; \frac{7}{3}-\frac{8}{3}+\gamma=1 \;;;\; \gamma=1+\frac{1}{3}=\underline{\frac{4}{3}=\gamma}$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{z}=\frac{7}{3}\overrightarrow{u}-\frac{8}{3}\overrightarrow{v}+\frac{4}{3}\overrightarrow{w}}}$$

****

BLOQUE 2

1º) Encontrar la distancia del punto P(1, 1, 1) al plano π determinado por las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} \quad y \quad s \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{1}$$

Las rectas r y s son paralelas, pues ambas tienen a $\overrightarrow{u} = (1, -1, 1)$ como vector director, que también es director del plano π; el otro vector director del plano es $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, siendo A(1, 2, 0) un punto de r y B(-1, 0, 3) un punto de s:

$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 0, 3) - (1, 2, 0) = (-2, -2, 3)$.

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ -3(x-1) - 2(y-2) - 2z - 2z + 2(x-1) - 3(y-2) = 0$$

$$-(x-1) - 5(y-2) - 4z = 0 \ ;;\ -x + 1 - 5y + 10 - 4z = 0 \ ;;\ \underline{\pi \equiv x + 5y + 4z - 11 = 0}$$

$$d(P,\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 11|}{\sqrt{1^2 + 5^2 + 4^2}} = \frac{|10 - 11|}{\sqrt{1 + 25 + 16}} = \frac{1}{\sqrt{42}} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sqrt{42}}{42}\ u \cong 0'15\ u = d}}$$

****

2º) Encontrar el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a los puntos P(2, 0) y Q(-2, 0) es 7.

Sea el lugar geométrico A(x, y), donde A representa a todos los puntos del plano que cumplen la condición del problema.

Sabiendo que la distancia entre dos puntos viene dada por la fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d(\overline{PA}) + d(\overline{QA}) = 7 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+2)^2 + (y-0)^2} = 7 \ \ ;;$$

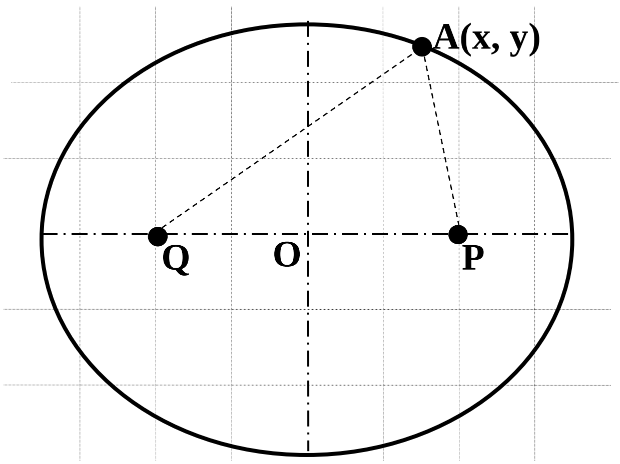
$$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 7 \ \ ;; \ \ \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = 7 - \sqrt{(x+2)^2 + y^2} \ \ ;;$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 49 - 14\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + x^2 + 4x + 4 + y^2 \ \ ;;$$

$$14\sqrt{4 + 4x + x^2 + y^2} = 49 + 8x \ \ ;; \ \ 196(x^2 + 4x + 4 + y^2) = 2401 + 784x + 64x^2 \ \ ;;$$

$$196x^2 + 784x + 784 + 196y^2 = 2401 + 784x + 64x^2 \ \ ;; \ \ \underline{\underline{132x^2 + 196y^2 = 1617}}$$

Se trata de una elipse centrada en los ejes cuya gráfica es la de la siguiente figura:



****

BLOQUE 3

1º) Dada la curva $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, se pide:

a) Dominio de definición y puntos de corte con los ejes, si los hay.
b) Asíntotas y puntos de corte con las mismas, si los hay.
c) Simetrías.
d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
e) Máximos y mínimos.
f) Una representación aproximada de la misma.

----

a) Dominio de definición y puntos de corte con los ejes, si los hay.

Por ser $x^2 + 1 \neq 0,\ \forall x \in R\ \Rightarrow\ \underline{\underline{D(f) \Rightarrow R}}$

b) Asíntotas y puntos de corte con las mismas, si los hay.

Asíntotas horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y = k = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \underline{\underline{1 = y}}$$

Asíntotas verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

No tiene asíntotas verticales.

No tiene asíntotas oblicuas. (Para que tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador).

Los cortes de la única asíntota, y = 1, con la función se obtienen resolviendo el sistema que forman ambas funciones:

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \\ y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1\ ;;\ x^2 - 1 = x^2 + 1\ ;;\ 1 = -1\ ? \Rightarrow \underline{\underline{No\ \ tienen\ \ puntos\ \ de\ \ corte}}$$

Los cortes con los ejes son: $\left\{ \begin{array}{l} X \to y = 0\ \Rightarrow\ x^2 - 1 = 0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{A(1,\ 0)}}\ ;;\ \underline{\underline{B(-1,\ 0)}} \\ \\ Y \to x = 0\ \Rightarrow\ y(0) = -1\ \Rightarrow\ \underline{\underline{C(0,\ -1)}} \end{array} \right.$

c) Simetrías.

Por tratarse de una función par, es simétrica con respecto a Y

d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$y' = \frac{2x\left(x^2+1\right) - 2x\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x\left(x^2+1-x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} = \underline{\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2} = y'}$$

Por ser el denominador siempre positivo, solo estudiamos el numerador.

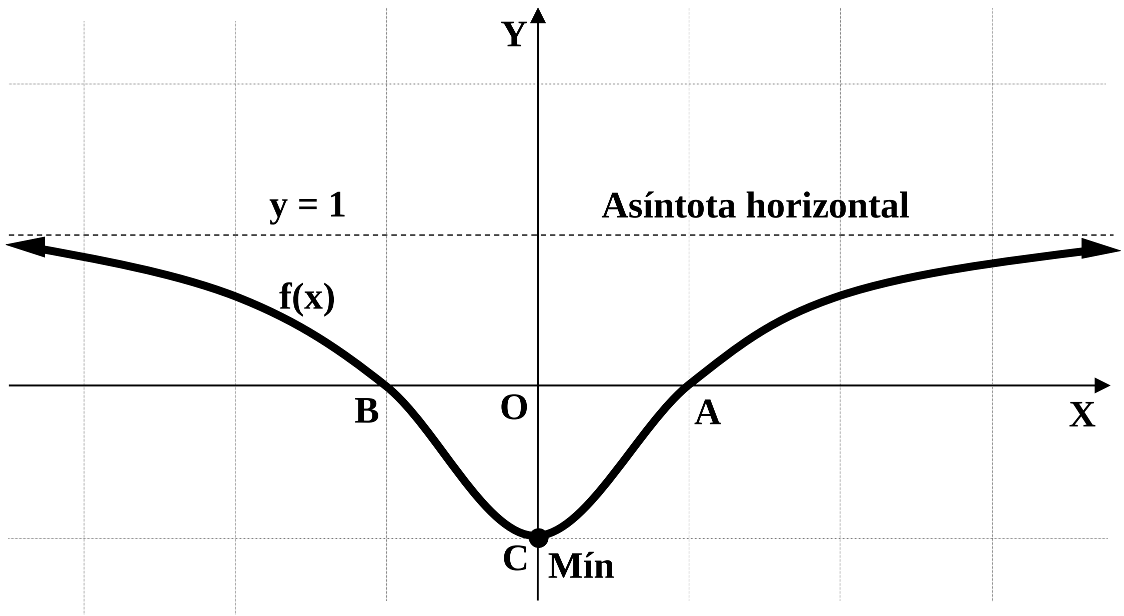
$$y' = \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2} \Rightarrow \begin{cases} y' > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Creciente: (0, \infty)}} \\ y < 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Decreciente: (-\infty, 0)}} \end{cases}$$

e) Máximos y mínimos.

$$y'' = \frac{4 \cdot \left(x^2+1\right)^2 - 4x \cdot 2 \cdot 2x \cdot \left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{4 \cdot \left(x^2+1\right) - 16x^2}{\left(x^2+1\right)^3} = \underline{\frac{4-12x^2}{\left(x^2+1\right)^3} = y''}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \underline{x = 0} \;;;\; y''(0) = \frac{4}{\left(0^2+1\right)^3} = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo \Rightarrow C(0, -1)}}$$

f) Una representación aproximada de la misma.



****

2º) a) Estudiar los extremos de la función $f(x)=e^x-(1+x)$.

b) Usando el apartado anterior, demostrar que $e^x>1+x$ para todo x positivo.

----

a)

$f'(x)=e^x-1$;; $f'(x)=0 \Rightarrow e^x-1=0$;; $e^x=1$;; $\underline{x=0}$

$f''(x)=e^x$;; $f''(0)=e^0=1>0 \Rightarrow Mínimo$;; $f(0)=e^0-(1-0)=1-1=0 \Rightarrow \underline{\underline{Mín(0,\ 0)}}$

$f''(x)=0 \Rightarrow e^x=0 \rightarrow x=-\infty,\ x\notin R \Rightarrow \underline{\underline{No\ \ tiene\ \ P.I.}}$

b)

El dominio de la función es R y f(x) es continua en su dominio. Si tiene un mínimo para x = 0, se trata de un mínimo absoluto, por lo tanto, el menor valor de la función se produce para x = 0, o sea: $f(x)\geq 0,\ \forall x\in R$, lo cual justifica lo pedido.

****

BLOQUE 4

1º) a) Enunciar la Regla de Barrow.

b) Calcular el área determinada por la curva y = tag x, el eje OX y la recta $r = \frac{\pi}{3}$.

----

a)

El enunciado de la regle de Barrow es el siguiente:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y F(x) es una función primitiva de f(x) en dicho intervalo, entonces se verifica la siguiente igualdad:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$$

b)

La función f(x) pasa por el origen y es creciente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, por lo tanto todas sus ordenadas son positivas en $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$.

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} tag\ x \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sen\ x}{\cos\ x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \cos\ x = t \\ -sen\ x \cdot dx = dt \end{array} \middle\| \begin{array}{c} x = \frac{\pi}{3} \to t = \frac{1}{2} \\ x = 0 \to t = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} = -[L\,t]_1^{\frac{1}{2}} = -\left[\left(L\frac{1}{2}\right) - L1\right] = -(L1 - L2 - L1) = \underline{\underline{L\,2\ u^2 = A}}$$

****

2º) a) Mediante argumentos geométricos, demostrar que si f y g son funciones positivas en el intervalo $[a,\ b]$ y $f(x) \leq g(x),\ \forall x \in [a,\ b]$, entonces se cumple que:

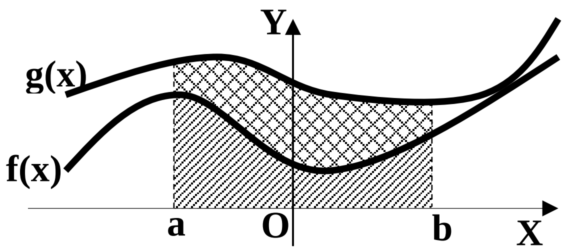
$$\int_a^b f(x) \cdot dx \leq \int_a^b g(x) \cdot dx \leq$$

b) Sin hacer ningún cálculo, justificar cuál de las siguientes integrales es mayor:

$$\int_0^1 x^2 \cdot sen^2\, x \cdot dx \quad ;; \quad \int_0^1 x \cdot sen^2\, x \cdot dx$$

----

a)



Como puede apreciarse, la superficie limitada por g(x) es mayor que la encerrada por f(x), ya que, además de la superficie limitada por f(x), g(x) abarca el área rayada doblemente.

b) Es mayor $\int_0^1 x \cdot sen^2\, x \cdot dx$.

Se debe a que, para todos los valores de x comprendidos entre cero y uno, $x \geq x^2$, y por otra parte, la función seno es creciente en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; o sea que, $\forall x \in [0, 1] \Rightarrow\ x \cdot sen^2\, x \geq x^2 \cdot sen^2\, x$.

****