PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MURCIA

SEPTIEMBRE – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

OBSERVACIONES IMPORTANTES: El alumno deberá elegir una opción A o B y responder a todas las cuestiones de esa opción. Nunca podrá mezclar cuestiones de la opción A con cuestiones de la opción B. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN A

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} y & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & z \\ x & 2 & y \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & 9 \\ 3 & 10 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcular C^t+I, siendo I la matriz identidad.

b) Hallar x, y, z para que se cumpla que $AB=C^t+I$.

----

a)

$$C^t+I=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 10 \\ 6 & 9 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 10 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}}.$$

b)

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} y & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & z \\ x & 2 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y & 2 & 3y \\ -1 & -2 & 6-2z \\ 4x+2 & 9 & 4y+z \end{pmatrix}.$$

$$AB=C^t+I \Rightarrow \begin{pmatrix} x+y & 2 & 3y \\ -1 & -2 & 6-2z \\ 4x+2 & 9 & 4y+z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 10 \\ 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y=2 \\ 3y=3 \\ 4x+2=6 \\ 6-2z=10 \\ 4y+z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x=1, y=1, z=-2}.$$

****

2º) Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

$a)\ f(x)=x^5Lx+2e^x.$ $\qquad b)\ g(x)=\frac{1}{\sqrt[7]{2x+5}}.$ $\qquad c)\ h(x)=\frac{x^2-1}{x+3}.$

$a)$

$$f(x)=x^5Lx+2e^x.$$

$$f'(x)=5x^4\cdot Lx+x^5\cdot\frac{1}{x}+2e^x=5x^4Lx+x^4+2e^x=x^4(5Lx+1)+2e^x.$$

$$\underline{f'(x)=x^4(5Lx+1)+2e^x}.$$

$b)$

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt[7]{2x+5}}=(2x+5)^{-\frac{1}{7}}.$$

$$g'(x)=-\frac{1}{7}\cdot(2x+5)^{-\frac{1}{7}-1}\cdot 2=-\frac{2}{7}\cdot(2x+5)^{-\frac{8}{7}}=\frac{-2}{7(2x+5)^{\frac{8}{7}}}=\frac{-2}{7\sqrt[7]{(2x+5)^8}}=$$

$$=\frac{-2}{7(2x+5)\cdot\sqrt[7]{2x+5}}=-\frac{2\sqrt[7]{(2x+5)^6}}{7(2x+5)(2x+5)}=-\frac{2\sqrt[7]{(2x+5)^6}}{7(2x+5)^2}.$$

$$\underline{g'(x)=-\frac{2\cdot\sqrt[7]{(2x+5)^6}}{7\cdot(2x+5)^2}}.$$

$c)$

$$h(x)=\frac{x^2-1}{x+3}.$$

$$h'(x)=\frac{2x\cdot(x+3)-(x^2-1)\cdot 1}{(x+3)^2}=\frac{2x^2+6x-x^2+1}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x+1}{(x+3)^2}.$$

$$\underline{h'(x)=\frac{x^2+6x+1}{(x+3)^2}}.$$

****

3º) Calcular el área del recinto acotado limitado por la curva $y = f(x) = x^2 - 4x + 8$ y la recta $y = g(x) = -2x + 8$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

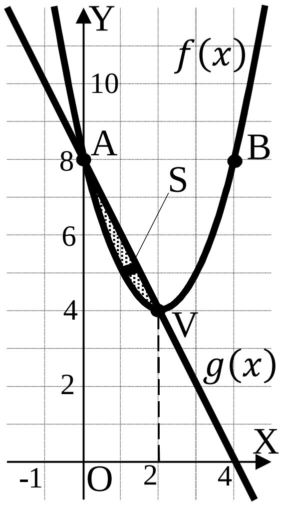
El vértice de la parábola $y = f(x) = x^2 - 4x + 8$ es el siguiente:

$y' = f'(x) = 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = 4 \;\Rightarrow\; V(4, 2).$

Los puntos de intersección de las funciones son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$x^2 - 4x + 8 = -2x + 8;\; x^2 - 2x = 0;$

$x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow A(0, 8) \\ x_2 = 2 \rightarrow V(2, 4) \end{cases}.$



La representación gráfica del conjunto es el indicado en la figura adjunta.

Para el cálculo del área limitada por la parábola y la recta, que es la parte sombreada de la figura, se tiene en cuenta que, en el intervalo $(0, 2)$, todas las ordenadas de la recta son mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^2 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_0^2 [(-2x + 8) - (x^2 - 4x + 8)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^2 (-2x + 8 - x^2 + 4x - 8) \cdot dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_0^2 =$$

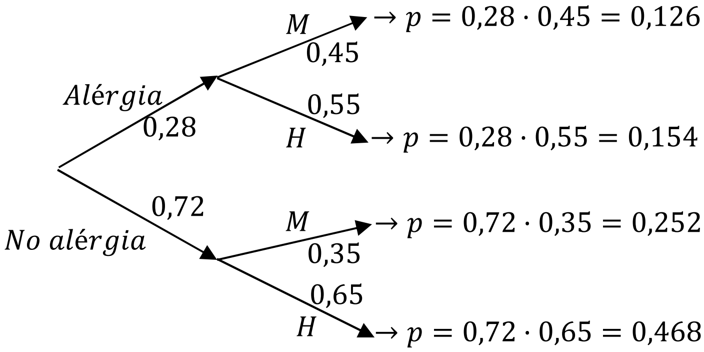
$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = \left(-\frac{2^3}{3} + 2^2\right) - 0 = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{-8+12}{3} = \underline{\frac{4}{3}\ u^2}.$$

****

4º) Se sabe que el 28 % de una población padece algún tipo de alergia. El 45 % de los individuos de la población que sufren alergia son mujeres. Además, de la parte de la población que no padece alergia, el 35 % son mujeres.

a) Calcular la probabilidad de que al elegir al azar un individuo de la población sea mujer.

b) Se ha elegido un individuo al azar y es mujer; calcular la probabilidad de que no padezca alergia.



a)

$$P = P(M) = P(M \cap A) + P\left(M \cap \overline{A}\right) = P(A) \cdot P(M/A) + P\left(\overline{A}\right) \cdot P\left(M/\overline{A}\right) =$$

$$= 0,28 \cdot 0,45 + 0,72 \cdot 0,35 = 0,126 + 0,252 = \underline{0,378}.$$

b)

$$P = P\left(\overline{A}/M\right) = \frac{P\left(M \cap \overline{A}\right)}{P(M)} = \frac{P\left(\overline{A}\right) \cdot P\left(M/\overline{A}\right)}{P(A) \cdot P(M/A) + P\left(\overline{A}\right) \cdot P\left(M/\overline{A}\right)} = \frac{0,72 \cdot 0,35}{0,28 \cdot 0,45 + 0,72 \cdot 0,35} =$$

$$= \frac{0,252}{0,126 + 0,252} = \frac{0,252}{0,378} = \underline{0,667}.$$

****

5º) Para estimar la proporción de individuos de una población que utilizan el comercio electrónico se ha realizado una encuesta a una muestra aleatoria de 200 individuos, de los cuales 90 han respondido que utilizan el comercio electrónico. Con estos datos, hallar un intervalo de confianza del 95 % para la proporción de individuos de la población que utilizan el comercio electrónico.

$$\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = \mathbf{1{,}96}.$$
$$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96).$$

$$Datos: n = 200; \ \ p = \frac{90}{200} = 0{,}45; \ \ q = 0{,}55; \ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $p, q, n \ y \ z_{\frac{\alpha}{2}}$ es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}; \ p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0'45 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}45 \cdot 0{,}55}{200}}; \ 0'45 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}45 \cdot 0{,}55}{200}}\right);$$

$$(0'45 - 1{,}96 \cdot 0'0352; \ 0'45 + 1{,}96 \cdot 0'0352);$$

$$(0'45 - 0'0689; \ 0'45 + 0'0689).$$

$$\underline{I.C._{95\,\%} = (0'3811; \ 0'5189).}$$

****

OPCIÓN B

1º) Una empresa necesita, como mínimo, 180 uniformes de mujer y 120 de hombre. Los encarga a dos talleres A y B. El taller A confecciona diariamente 6 uniformes de mujer y 2 de hombre con un coste de 75 euros al día. El taller B hace diariamente 4 uniformes de mujer y 3 de hombre con un coste diario de 90 euros. ¿Cuántos días debe trabajar cada taller para satisfacer las necesidades de la empresa con el mínimo de coste?, ¿cuánto vale dicho coste?

Sean x e y el número de uniformes de mujeres y hombres que se confeccionan, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} 6x+4y\geq 180 \\ 2x+3y\geq 120 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3x+2y\geq 90 \\ 2x+3y\geq 120 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}.$

La función de objetivos es: $f(x,y)=75x+90y$.

La región factible se indica en la figura:

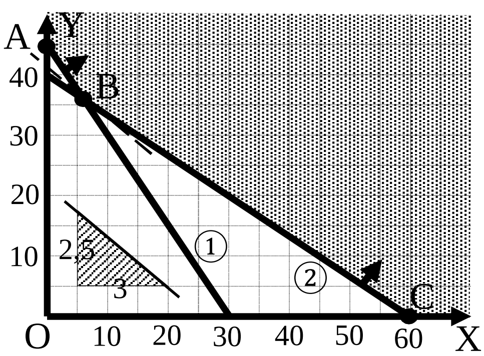
① $\Rightarrow 3x+2y\geq 90 \Rightarrow y\geq \frac{90-3x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	30	0
y	0	45

② $\Rightarrow 2x+3y\geq 120 \Rightarrow y\geq \frac{120-2x}{3} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	60	0
y	0	40

Los vértices de la sección factible son los siguientes:



$A\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y=90 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,45).$

$B\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y=90 \\ 2x+3y=120 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -6x-4y=-180 \\ 6x+9y=360 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5y=180 \rightarrow y=36 \Rightarrow B(6,36).$

$C\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=120 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow C(60,0).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A\Rightarrow f(0,45)=75\cdot 0+90\cdot 45=0+4.050=4.050.$

$B\Rightarrow f(6,36)=75\cdot 6+90\cdot 36=450+3.240=3.690.$

$C\Rightarrow f(60,0)=75\cdot 60+90\cdot 0=4.500+0=4.500.$

El mínimo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 75x + 90y = 0 \Rightarrow y = -\frac{75}{90}x = -\frac{15}{18} = -\frac{5}{6} \Rightarrow \boldsymbol{m} = -\frac{\mathbf{2{,}5}}{\mathbf{3}}.$$

$$\underline{Mínimo\ coste: trabajando\ 6\ días\ el\ taller\ A\ y\ 36\ días\ el\ taller\ B.}$$

$$\underline{El\ coste\ mínimo\ asciende\ a\ 3.690\ euros.}$$

****

2º) Dada la función $f(x)=\begin{cases} -x+1 & si \;\; x\leq -2 \\ 2x+7 & si \; -2<x<1 \\ ax^2-5x+6 & si \;\; x\geq 1 \end{cases}$, donde $a\in R$:

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en $x=-2$.

b) Hallar a para que la función sea continua en $x=1$.

c) Para $a=1$ hacer la representación gráfica de la función.

----

a)

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\; x=-2 \Rightarrow \left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}(-x+1)=3=f(-2) \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}(2x+7)=3 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=f(-2)$.

$$\underline{La\; función\; f(x)\; es\; continua\; en\; x=-2.}$$

b)

$$x=1 \Rightarrow \left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(2x+7)=2+7=9 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(ax^2-5x+6)=a-5+6=a+1=f(1) \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 9=a+1 \;\Rightarrow a=8$.

$$\underline{La\; función\; f(x)\; es\; continua\; en\; x=1\; para\; a=8.}$$

c)

Para $a=1$ la función es $f(x)=\begin{cases} -x+1 & si \;\; x\leq -2 \\ 2x+7 & si \; -2<x<1 \\ x^2-5x+6 & si \;\; x\geq 1 \end{cases}$.

En el intervalo $(-\infty,-2]$ la función es la recta de expresión $g(x)=-x+1$ que contiene a los puntos $A(-5,6)$ y $B(-2,3)$.

En el intervalo $(-2,1)$ la función es la recta de expresión $h(x)=2x+7$, cuyos puntos extremos son $B(-2,3)$ y $C(1,9)$, que no pertenecen a la recta.

En el intervalo $[1,+\infty)$ la función es $q(x)=x^2-5x+6$, que es una parábola convexa $(\cup)$ cuyo vértice es el siguiente:

$q'(x) = 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$.

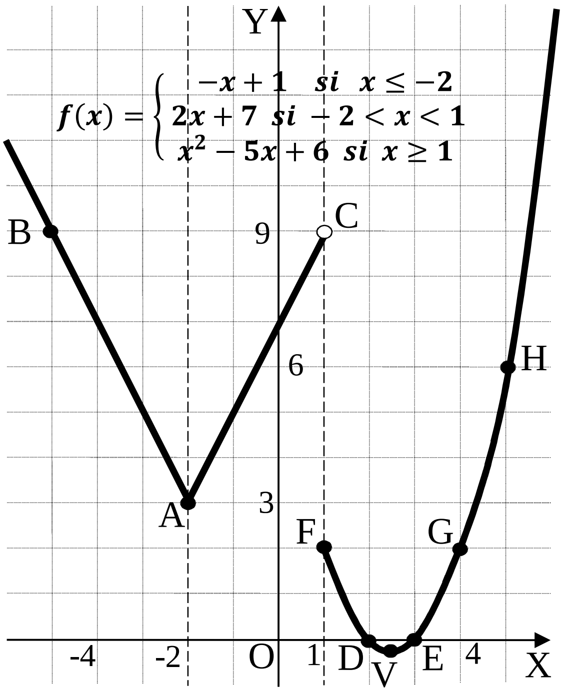
$q\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 6 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 = \frac{25-50+24}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow V\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

Las abscisas de los puntos de corte con el eje X de la parábola son las soluciones de la ecuación que resulta de su igualación a cero:

$$x^2 - 5x + 6 = 0;\ x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow D(2, 0) \\ x_2 = 3 \rightarrow E(3, 0) \end{cases}.$$

Otros puntos de la parábola son $F(1, 2)$, $G(4, 2)$ y $H(5, 6)$.

La representación gráfica de la función, aproximada, es la que aparece en el gráfico siguiente.



****

3º) Calcular las siguientes integrales:

$a)\ I=\int(-x+2e^x)\cdot dx.$ $\qquad$ $b)\ I=\int_1^2\left(x^2-\frac{x^3}{2}-1\right)\cdot dx.$

$a)$

$$\underline{I=\int(-x+2e^x)\cdot dx=-\frac{x^2}{2}+2e^x+C.}$$

$b)$

$$I=\int_1^2\left(x^2-\frac{x^3}{2}-1\right)\cdot dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}-x\right]_1^2=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{8}-x\right]_1^2=$$

$$=\left(\frac{2^3}{3}-\frac{2^4}{8}-2\right)-\left(\frac{1^3}{3}-\frac{1^4}{8}-1\right)=\frac{8}{3}-\frac{16}{8}-2-\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+1=\frac{7}{3}-2+\frac{1}{8}-1=$$

$$=\frac{7}{3}+\frac{1}{8}-3=\frac{56+3-72}{24}=-\frac{13}{24}.$$

$$\underline{I=\int_1^2\left(x^2-\frac{x^3}{2}-1\right)\cdot dx=-\frac{13}{24}}.$$

****

4º) En una urna hay bolas numeradas de 1 al 3, hay 30 bolas con el número 1, 60 con el número 2 y 90 con el número 3. Se realiza el experimento de sacar dos bolas consecutivamente sin reemplazamiento.

a) Hallar la probabilidad de que en las dos salga 1.

b) Hallar la probabilidad de que la suma de los números obtenida sea par.

----

a)

$$P=\frac{30}{180}\cdot\frac{29}{179}=\frac{1\cdot 29}{6\cdot 179}=\underline{\frac{29}{1.074}=0{,}027}.$$

b)

Los casos posibles son: $(1,1),(1,3),(3,1),(2,2)\ y\ (3,3)$.

$$\mathrm{P}(1,1)=\frac{29}{1.074}.$$

$$\mathrm{P}(1,3)=\frac{30}{180}\cdot\frac{90}{179}=\frac{1}{6}\cdot\frac{90}{179}=\frac{15}{179}.$$

$$\mathrm{P}(3,1)=\frac{90}{180}\cdot\frac{30}{179}=\frac{1}{2}\cdot\frac{30}{179}=\frac{15}{179}.$$

$$P(2,2)=\frac{60}{180}\cdot\frac{59}{179}=\frac{1\cdot 59}{3\cdot 179}=\frac{59}{537}.$$

$$P(3,3)=\frac{90}{180}\cdot\frac{89}{179}=\frac{1\cdot 89}{2\cdot 179}=\frac{89}{358}.$$

$$P=\frac{29}{1.074}+2\cdot\frac{15}{179}+\frac{59}{537}+\frac{89}{358}=\frac{29+2\cdot 15\cdot 6+2\cdot 59+3\cdot 89}{1.074}=\frac{29+180+118+267}{1.074}=$$

$$=\frac{594}{1.074}=\frac{198}{358}=\underline{\frac{99}{179}=0{,}5531}.$$

****

5º) Según un informe sobre calidad de infraestructuras turísticas, la puntuación media de los alojamientos turísticos de un país es, como mínimo, de 7'8, con una desviación típica de 0'7. Para comprobar esta información, se toma una muestra aleatoria de 150 alojamientos, para los que se obtiene una puntuación media de 7'5. Si la puntuación es una variable normal:

a) Plantear un contraste para determinar si se puede aceptar la afirmación del informe. Dar la expresión de la región de aceptación.

b) Con un nivel de significación del 4 %, ¿se puede aceptar lo que dice el informe?

----

a)

$$\left.\begin{array}{l} Hipótesis\ nula \rightarrow\ H_0: \mu \geq 7{,}8 \\ Hipótesis\ alternativa \rightarrow H_1: \mu < 7{,}8 \end{array}\right\}.$$ Contraste unilateral.

Conocemos: $n = 150;\ \ \mu = 7{,}8;\ \sigma = 0{,}7.$

La región de aceptación es $\left(\mu - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ +\infty\right)$, por lo tanto la región crítica es:

$$\overline{x} < \mu - z_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \ \Rightarrow\ \ \overline{x} < 7{,}8 - z_\alpha \cdot \frac{0{,}7}{\sqrt{150}} = 7{,}8 - z_\alpha \cdot 0'057.$$

$$\underline{Región\ crítica: \overline{x} < 7{,}8 - z_\alpha \cdot 0'057}\ .$$

b)

$\alpha = 0{,}04\ \rightarrow\ z_\alpha = \mathbf{1{,}75}.\qquad (1 - 0{,}04 = 0{,}9600\ \rightarrow z = 1{,}75).$

Región crítica: $7{,}8 - z_\alpha \cdot 0'057 = 7{,}8 - 1'75 \cdot 0'057 = 7{,}8 - 0'100 =$

$= 7'700 > 7'5.$

$$\underline{\overline{x} = 7'5 \notin (7'700;\ +\infty) \Rightarrow Se\ rechaza\ la\ hipótesis\ nula.}$$

****