PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO – 2022

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan.

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible.

$$\begin{cases} x+(a^2-2a)y-z=-a^2 \\ x+(a^2-4)y+(2a-3)z=-a^2-2a \\ x+(a^2-4a+4)y+(a^2-2a)z=-a^2+a-1 \end{cases}.$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a^2-2a & -1 \\ 1 & a^2-4 & 2a-3 \\ 1 & a^2-4a+4 & a^2-2a \end{pmatrix} \; y$$

$$M'=\begin{pmatrix} 1 & a^2-2a & -1 & -a^2 \\ 1 & a^2-4 & 2a-3 & -a^2-2a \\ 1 & a^2-4a+4 & a^2-2a & -a^2+a-1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a^2-2a & -1 \\ 1 & a^2-4 & 2a-3 \\ 1 & a^2-4a+4 & a^2-2a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a(a-2) & -1 \\ 1 & (a+2)(a-2) & 2a-3 \\ 1 & (a-2)^2 & a^2-2a \end{vmatrix}=$$

$$=(a-2)\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & a+2 & 2a-3 \\ 1 & a-2 & a^2-2a \end{vmatrix}=$$

$$=(a-2)\cdot[a(a+2)(a-2)-a+2+a(2a-3)+a+2-a^2(a-2)-$$

$$-(a-2)(2a-3)]=$$

$$= (a-2)\cdot[a(a^2-4)+4+2a^2-3a-a^3+2a^2-2a^2+3a+4a-6] =$$

$$= (a-2)\cdot[a^3-4a-a^3+2a^2+4a-2] = (a-2)(2a^2-2) =$$

$$= 2(a-2)(a^2-1) = 0 \Rightarrow a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = 2.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq -1 \\ a \neq 1 \\ a \neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = -3C_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = -1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3-1+3-3+3-1 = 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3+8+4-3 = 6 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a = 1 \\ a = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Se resuelve, en primer lugar, para $a \neq -1, a \neq 1\ y\ a \neq 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & a^2-2a & -1 & -a^2 \\ 1 & a^2-4 & 2a-3 & -a^2-2a \\ 1 & a^2-4a+4 & a^2-2a & -a^2+a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a^2-2a & -1 & -a^2 \\ 0 & 2a-4 & 2a-2 & -2a \\ 0 & -2a+4 & a^2-2a+1 & a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 + F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a^2-2a & -1 & -a^2 \\ 0 & 2a-4 & 2a-2 & -2a \\ 0 & 0 & a^2-1 & -a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow z = \frac{-a-1}{a^2-1} = \frac{-(a+1)}{(a+1)(a-1)} \Rightarrow z = \frac{-1}{a-1}.$$

$$2(a-2)y + 2(a-1)z = -2a;\;\; (a-2)y + (a-1)\cdot\frac{-1}{a-1} = -a;$$

$$(a-2)y - 1 = -a;\;\; (a-2)y = 1 - a \Rightarrow y = \frac{1-a}{a-2}.$$

$$x + a(a-2)y - z = -a^2;\;\; x + a(a-2)\cdot\frac{1-a}{a-2} - \frac{-1}{a-1} = -a^2;$$

$$x + a - a^2 + \frac{1}{a-1} = -a^2;\; x + a + \frac{1}{a-1} = 0;\; x = -\frac{1}{a-1} - a \Rightarrow x = \frac{-a^2+a-1}{a-1}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{-a^2+a-1}{a-1}, y = \frac{1-a}{a-2}, z = \frac{-1}{a-1}, \forall a \in R - \{-1, 1, 2\}.}$$

Resolvemos ahora para $a = -1$. El sistema resulta $\left.\begin{matrix} x + 3y - z = -1 \\ x - 3y - 5z = 1 \\ x + 9y + 3z = -3 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una ecuación, por ejemplo, la tercera, y haciendo $z = \lambda$:

$$\left.\begin{matrix} x + 3y = -1 + \lambda \\ x - 3y = 1 + 5\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x = 6\lambda;\;\; x = 3\lambda. \qquad 3y = -1 + \lambda - 3\lambda;\;\; y = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\lambda.$$

$$\underline{Solución: x = 3\lambda, y = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\lambda, z = \lambda, \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) Calcula los valores de t para los que la matriz $A^{26}+A^{25}$ es matriz singular, siendo $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & t-1\end{pmatrix}$.

Una matriz es singular cuando no es invertible, es decir: cuando su determinante es cero, por lo cual, tiene que ser $|A^{26}+A^{25}|=0$.

$A^{26}+A^{25}=A^{25}\cdot A+A^{25}\cdot I=A^{25}\cdot(A+I)$.

Teniendo en cuanta que el determinante de un producto de matrices es igual que el producto de los determinantes de las matrices, puede hacerse lo siguiente:

$|A^{26}+A^{25}|=|A^{25}\cdot(A+I)|=|A^{25}|\cdot|(A+I)|=0.$ (*)

Teniendo en cuenta que $|A|=\begin{vmatrix}0 & -1\\1 & t-1\end{vmatrix}=1$, sustituyendo en la expresión (*) resulta:

$(|A|)^{25}\cdot|(A+I)|=0;\;\; 1^{25}\cdot|(A+I)|=0\Rightarrow|(A+I)|=0.$

$A+I=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & t-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & t\end{pmatrix}.$

$|(A+I)|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & t\end{vmatrix}=0;\;\; t+1=0\Rightarrow t=-1.$

$\underline{La\ matriz\ [A^{26}+A^{25}]\ es\ singular\ para\ t=-1.}$

****

3º) Calcula la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto $T(1,-5,3)$ y corta a las rectas $r \equiv \begin{cases} -x-y-z+3=0 \\ 3x+z-10=0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} -x-y-z+3=0 \\ 3x+z-10=0 \end{cases} \Rightarrow x=\lambda;\ \ z=10-3\lambda;\ \ y=3-x-z=$$

$$=3-\lambda-10+3\lambda;\ \ y=-7+2\lambda\ \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-7+2\lambda. \\ z=10-3\lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(0,-7,10)$ y $\overrightarrow{v_r}=(1,2,-3)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(0,-1,2)$ y $\overrightarrow{v_s}=(2,1,-1)$.

$\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OA}=[(1,-5,3)-(0,-7,10)]=(1,2,-7)$.

$\overrightarrow{BT}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OB}=[(1,-5,3)-(0,-1,2)]=(1,-4,1)$.

Se definen los planos $\pi_1\ y\ \pi_2$ de la siguiente forma:

$$\pi_1\left(T;\ \overrightarrow{v_r},\overrightarrow{AT}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-14(x-1)-3(y+5)+2(z-3)-2(z-3)+6(x-1)+7(y+5)=0;$$

$$-8(x-1)+4(y+5)=0;\ \ 2(x-1)-(y+5)=0;\ \ 2x-2-y-5=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_1 \equiv 2x-y-7=0.$$

$$\pi_2\left(T;\ \overrightarrow{v_s},\overrightarrow{BT}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-1)-(y+5)-8(z-3)-(z-3)-4(x-1)-2(y+5)=0;$$

$$-3(x-1)-3(y+5)-9(z-3)=0;\ \ (x-1)+(y+5)+3(z-3)=0;$$

$$x-1+y+5+3z-9=0 \Rightarrow \pi_2 \equiv x+y+3z-5=0.$$

La recta pedida es la que determinan los planos $\pi_1\ y\ \pi_2$:

$$t \equiv \begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ x + y + 3z - 5 = 0 \end{cases}.$$

La recta t expresada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$t \equiv \begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ x + y + 3z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - y = 7 \\ x + y = 5 - 3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 12 - 3\lambda;$$

$x = 4 - \lambda;\;\; y = 2x - 7 = 8 - 2\lambda - 7 \Rightarrow y = 1 - 2\lambda.$

$$t \equiv \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

****

4º) Calcula la ecuación continua de la recta s que pasa por el punto $P(1,2,-1)$, es paralela al plano $\pi \equiv 2x-y+z=0$ y corta a la recta $r \equiv \begin{cases} x-y+2z+2=0 \\ 3x-y-z-3=0 \end{cases}$.

El haz de planos β paralelos a $\pi \equiv 2x-y+z=0$ tiene por expresión general $\beta \equiv 2x-y+z+D=0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano γ que contiene al punto $P(1,2,-1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv 2x-y+z+D=0 \\ P(1,2,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 1-2-1+D=0;\ -1+D=0 \Rightarrow D=1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \gamma \equiv 2x-y+z+1=0.$

El punto Q de corte de la recta r con el plano γ es la solución del sistema que forman: $\left.\begin{array}{r} x-y+2z=-2 \\ 3x-y-z=3 \\ 2x-y+z=-1 \end{array}\right\}$. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{2-6-1-2+2+3}{-1-6+2+4-1+3}=\frac{-2}{1}=-2.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{1}=3-6+4-12-1+6=-6.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{1}=1+6-6-4+3-3=-3.$$

El punto de corte es $Q(-2,-6,-3)$.

La recta s pedida es la que contiene a los puntos $P(1,2,-1)$ y $Q(-2,-6,-3)$.

$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=[(1,2,-1)-(-2,-6,-3)]=(3,8,2).$

$$\underline{s \equiv \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{8}=\frac{z+1}{2}}.$$

****

5º) Calcula las siguientes integrales definidas:

$$I_1 = \int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}} \text{ e } I_2 = \int (3-2x) \cdot e^{-2x} \cdot dx.$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{x-1} = t \rightarrow x-1 = t^2 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot dx = dt \\ x = t^2+1 \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t^2+1} \cdot dt = arc\ tg\ t + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{I_1 = \int \frac{dx}{2x\sqrt{x-1}} = arc\ tg\ \sqrt{x-1} + C.}$$

$$I_2 = \int (3-2x) \cdot e^{-2x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3-2x = u \rightarrow du = -2 \cdot dx \\ dv = e^{-2x} \cdot dx \rightarrow v = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3-2x) \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{-2x}\right) - \int -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot (-2 \cdot dx) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot (3-2x) - \int e^{-2x} \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot (3-2x) + \frac{1}{2} \cdot e^{-2x} + C =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot [(3-2x)-1] + C = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot (2-2x) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{I_2 = \int (3-2x) \cdot e^{-2x} \cdot dx = e^{-2x} \cdot (x-1) + C.}$$

****

6º) Se considera la función $f(x) = e^{\frac{1}{sen\,x+\cos x}}$:

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0,\pi]$.

b) Halla su extremo relativo en ese mismo intervalo.

----

a)

La función $f(x)$ es continua en R, excepto los valores reales de x que anulan la expresión $sen\,x + \cos x$, en cuyo caso, la función no está definida por ser:

$$f(x) = e^{\frac{1}{0}} = e^{\infty} = \infty.$$

$sen\,x + \cos x = 0 \Rightarrow sen\,x = -\cos x \Rightarrow x = \left\{\frac{3\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4};\ \frac{11\pi}{4};\ \frac{15\pi}{4}\cdots\right\}$, en general: $x = \frac{4k-1}{4}\pi, \forall k \in N$.

Para $k = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{3\pi}{4} \in [0,\pi]$. Para $k = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{7\pi}{4} \notin [0,\pi]$.

La función está definida en $[0,\pi], \forall x \in R - \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$.

Por ser $f(x)$ una función compuesta por funciones continuas de x, $sen\ x\ y \cos x$:

$$\underline{f(x)\ es\ continua\ en\ [0,\pi], excepto\ para\ x = \frac{3\pi}{4}.}$$

b)

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es que se anule su primera derivada en ese punto.

Para obtener la derivada de la función se procede del modo siguiente:

$$f(x) = e^{\frac{1}{sen\,x+\cos x}} \Rightarrow L[f(x)] = \frac{1}{sen\,x+\cos x}.$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-1\cdot(\cos x - sen\,x)}{(sen\,x+\cos x)^2} \Rightarrow f'(x) = e^{\frac{1}{sen\,x+\cos x}} \cdot \frac{sen\,x-\cos x}{(sen\,x+\cos x)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{sen\,x+\cos x}} \cdot \frac{sen\,x-\cos x}{(sen\,x+\cos x)^2} = 0.$$

Por ser $e^{\frac{1}{sen\,x+\cos x}} \neq 0, \forall x \in R$ y $(sen\,x + \cos x)^2 \neq 0, \forall x \in D(f)$:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow sen\,x - \cos x = 0;\ \ sen\,x = \cos x \Rightarrow x = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}, \forall \lambda \in Z.$$

Para $\lambda = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$. Para $\lambda = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{5\pi}{4} \notin [0, \pi]$.

El único extremo relativo se encuentra para $x = \frac{\pi}{4}$.

Para diferenciar si se trata de un máximo o de un mínimo relativo puede recurrirse a la segunda derivada, pero lo engorroso del proceso recomienda su determinación por el signo de la primera derivada en diferentes intervalos.

Para el estudio en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ se considera el valor $\frac{\pi}{6} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Para $x = \frac{\pi}{6} = 30° \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{\frac{1}{sen\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}}} \cdot \frac{sen\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}}{\left(sen\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\right)^2} = e^{\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}} \cdot \frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$

$= e^{\frac{1}{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}} \cdot \frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = (+) \cdot \frac{(-)}{(+)} < 0 \Rightarrow$ En el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ la función es decreciente, lo cual implica, teniendo en cuenta la continuidad de la función, que para $x = \frac{\pi}{4}$ la función tiene un mínimo relativo.

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{1}{sen\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}}} = e^{\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}} = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

$\underline{La\ función\ f(x)\ tiene\ un\ mínimo\ relativo\ en\ el\ punto\ P\left(\frac{\pi}{4}, e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)}$.

****

7º) Sea la función $f(x) = \frac{e^{x^2-2}}{x}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2, -1]$.

b) Comprueba que existe un valor $a \in (-2, -1)$ tal que $f'(a) = e$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

----

a)

La función $f(x) = \frac{e^{x^2-2}}{x}$ es continua en $R - \{0\}$, por ser el cociente de dos funciones continuas, en R el numerador y en $R - \{0\}$ el denominador y, teniendo en cuenta que $0 \notin [-2, -1]$:

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ [-2, -1].}$$

b)

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^{x^2-2} \cdot x - e^{x^2-2} \cdot 1}{x^2} = \frac{e^{x^2-2} \cdot (2x^2-1)}{x^2}.$$

La función $f'(x)$ es continua en $(-2, -1)$ por ser un cociente tal que el numerador es el producto de dos funciones continuas en R y el denominador es una función continua en $R - \{0\}$ y, teniendo en cuenta que $0 \notin (-2, -1)$, por lo cual, la función $f'(x) = \frac{e^{x^2-2} \cdot (2x^2-1)}{x^2}$ es continua en $(-2, -1)$.

Teniendo en cuanta el teorema de los valores intermedios o desigualdad de Darboux, que dice que, "si una función es continua en un intervalo $[a, b]$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)\ y\ f(b)$ al menos una vez".

$$f'(-2) = \frac{e^{(-2)^2-2} \cdot [2 \cdot (-2)^2 - 1]}{(-2)^2} = \frac{e^2 \cdot 7}{4} \cong 12{,}93.$$

$$f'(-1) = \frac{e^{(-1)^2-2} \cdot [2 \cdot (-1)^2 - 1]}{(-1)^2} = \frac{e^{-1} \cdot 1}{1} = \frac{1}{e} \cong 0{,}37.$$

De lo anterior se deduce que:

$f'(-1) \cong 0{,}37 < f'(a) = e \cong 2{,}72 < f'(-2) \cong 12{,}93$, con lo cual:

$$\underline{Queda\ probado\ que\ existe\ a \in (-2, -1)\ tal\ que\ f'(a) = e.}$$

****

8º) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones: $f(x) = 2 - |x|$ y $g(x) = x^2 - 10$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

En primer lugar, nótese que ambas funciones son simétricas con respecto al eje de ordenadas por ser $f(-x) = f(x)$ y $g(-x) = g(x)$.

Teniendo en cuenta que $|x| = \begin{cases} -x \ \ si \ \ x \leq 0 \\ x \ \ si \ \ x > 0 \end{cases}$, la función $f(x) = 2 - |x|$ puede redefinirse de la forma siguiente: $f(x) = \begin{cases} 2 + x \ \ si \ \ x \leq 0 \\ 2 - x \ \ si \ \ x > 0 \end{cases}$.

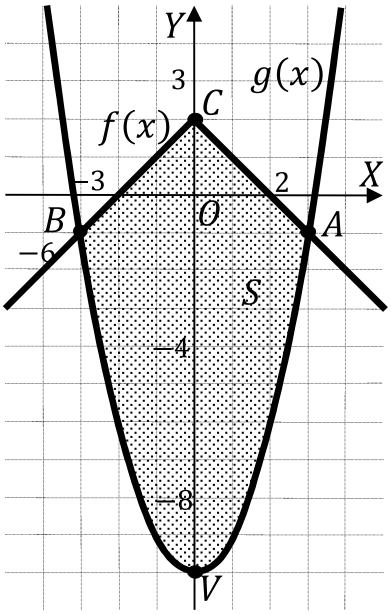
Los puntos de corte de las funciones tienen por abscisas las raíces de las ecuaciones que resultan de la igualación de sus expresiones.

Para $x > 0$: $f(x) = g(x) \Rightarrow 2 - x = x^2 - 10;\ \ x^2 + x - 12 = 0;$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 = -4, no\ es > 0 \\ x_2 = 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow A(3, -1).$$

Por simetría, otro punto de corte es $B(-3, -1)$.

Teniendo en cuenta que $f(0) = 2 \Rightarrow C(0, 2)$ y que la función $g(x) = x^2 - 10$ es una parábola convexa ($\cup$), por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el punto $V(0, -10)$, la representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la gráfica adjunta.



Teniendo en cuenta la simetría de las funciones, que en el intervalo de la superficie a calcular las ordenadas de la función $f(x)$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función $g(x)$, y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^3 [f(x) - g(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^3 [(2 - x) - (x^2 - 10)] \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^3 (-x^2 - x + 12) \cdot dx = 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 12x\right]_0^3 =$$

$$= 2 \cdot \left[\left(-\frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + 12 \cdot 3\right) - 0\right] = 2 \cdot \left(-9 - \frac{9}{2} + 36\right) = 2 \cdot \left(27 - \frac{9}{2}\right) = 54 - 9 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{S = 45\ u^2}$.

****