PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

EXTRAORDINARIA – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan.

1º) Estudia el sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax+(a-2)y=a-2 \\ ax+(a^2-2a)y+2z=a \\ 3ax+(a^2-4)y+z=4a-4 \end{cases}$ dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & a-2 & 0 \\ a & a^2-2a & 2 \\ 3a & a^2-4 & 1 \end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix} a & a-2 & 0 & a-2 \\ a & a^2-2a & 2 & a \\ 3a & a^2-4 & 1 & 4a-4 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & a-2 & 0 \\ a & a^2-2a & 2 \\ 3a & a^2-4 & 1 \end{vmatrix}=a(a-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 2 \\ 3 & a+2 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=a(a-2)[a+6-2(a+2)-1]=a(a-2)(a+6-2a-4-1)=$$

$$=a(a-2)\cdot(-a+1)=0 \Rightarrow a_1=0;\ \ a_2=1, a_3=2.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq 1 \\ a\neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2=C_4\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=0 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1 = -C_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 + 6 - 1 = 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 4 = 12 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a = 1 \\ a = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Se resuelve, en primer lugar, para $a \neq 0, a \neq 1\ y\ a \neq 2$:

$$\begin{pmatrix} a & a-2 & 0 & a-2 \\ a & a^2-2a & 2 & a \\ 3a & a^2-4 & 1 & 4a-4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & a-2 & 0 & a-2 \\ 0 & a^2-3a+2 & 2 & 2 \\ 0 & a^2-3a+2 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & a-2 & 0 & a-2 \\ 0 & a^2-3a+2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow z = -a \Rightarrow$$

$$(a^2 - 3a + 2)y - 2a = 2;\ \ y = \frac{2a+2}{a^2-3a+2} = \frac{2(a+1)}{(a-1)(a-2)}.$$

$$ax + (a-2) \cdot \frac{2(a+1)}{(a-1)(a-2)} = a - 2;\ \ ax + \frac{2(a+1)}{a-1} = a - 2;\ \ ax = a - 2 - \frac{2a+2}{a-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax = \frac{(a-2)(a-1)-2a-2}{a-1} = \frac{a^2-3a+2-2a-2}{a-1} = \frac{a^2-5a}{a-1} = a \cdot \frac{a-5}{a-1} \Rightarrow x = \frac{a-5}{a-1}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{a-5}{a-1}, y = \frac{2(a+1)}{(a-1)(a-2)}, z = -a, \forall a \in R - \{0, 1, 2\}.}$$

Resolvemos ahora para $a = -2$. El sistema resulta $\begin{cases} -2y = -2 \\ 2z = 0 \\ -4y = -4 \end{cases}$, que es compatible indeterminado cuyas solución es la siguiente:

$\underline{Solución: x = \lambda, y = 1, z = 0, \forall \lambda \in R}.$

****

2º) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A \cdot B^{-1}| = 1$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & t & -t \\ 2t-1 & t-1 & t \\ t-2 & 0 & t-2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} t-1 & t & -t \\ 1-2t & 2t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & t & -t \\ 2t-1 & t-1 & t \\ t-2 & 0 & t-2 \end{vmatrix} \Rightarrow \{C_1 \to C_1 - C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1+t & t & -t \\ t-1 & t-1 & t \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} =$$

$$= (t-2) \cdot \begin{vmatrix} 1+t & t \\ t-1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-2) \cdot (t-1) \cdot \begin{vmatrix} 1+t & t \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (t-2) \cdot (t-1) \cdot (1+t-t) = (t-2) \cdot (t-1).$$

$$|B| = \begin{vmatrix} t-1 & t & -t \\ 1-2t & 2t & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \{C_2 \to C_2 + C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -t \\ 1-2t & 2t-1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (2t-1) \cdot \begin{vmatrix} t-1 & -t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (2t-1) \cdot (t-1).$$

$$|A \cdot B^{-1}| = 1; \;\; \left|\frac{A}{B}\right| = 1; \;\; \frac{|A|}{|B|} = 1; \;\; |A| = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t-2) \cdot (t-1) = (2t-1) \cdot (t-1); \;\; t-2 = 2t-1 \Rightarrow \underline{t = -1}.$$

****

3º) Calcula la ecuación general de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-6}{-1} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-2}{2}$.

$a)$

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda; \;\; x = -\lambda; \;\; z = -2\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(0,0,0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1,-1,2)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(6,6,2)$ y $\overrightarrow{v_s} = (-1,5,2)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} = [(6,6,2) - (0,0,2)] = (6,6,0)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 6 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -12 - 12 - 60 - 12 = -96 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} = 3 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\ no\ son\ coplanarios \Rightarrow$$

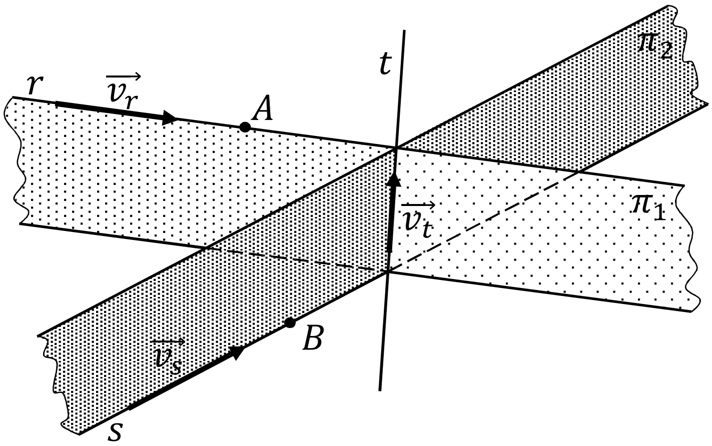
$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}$$

El vector director de la recta t es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores de las rectas $r\ y\ s$.

$$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -2i - 2j + 5k - k - 10i - 2j =$$

$$= -12i - 4j + 4k \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = (3, 1, -1).$$

Para facilitar la comprensión del desarrollo del ejercicio se acompaña el gráfico adjunto.



Se determinan los planos π_1 y π_2 de las siguientes características:

$$\pi_1(A;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_t}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;\ \ x + 6y + z + 3z - 2x + y = 0;$$

$-x + 7y + 4z = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x - 7y - 4z = 0.$

$$\pi_2(B;\ \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{v_t}) \equiv \begin{vmatrix} x-6 & y-6 & z-2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$-5(x-6) + 6(y-6) - (z-2) - 15(z-2) - 2(x-6) - (y-6) = 0;$

$-7(x-6) + 5(y-6) - 16(z-2) = 0;\ -7x + 42 + 5y - 30 - 16z + 32 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_2 \equiv 7x - 5y + 16z + 44 = 0.$

La recta pedida t es la intersección de los planos obtenidos, π_1 y π_2:

$$\underline{t \equiv \begin{cases} x - 7y - 4z = 0 \\ 7x - 5y + 16z + 44 = 0 \end{cases}}.$$

****

4º) Halla un plano π que sea tangente a la esfera de radio 3 y centro $O(0,0,0)$, y que corte perpendicularmente a la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{-2}$. Encuentra el punto de tangencia del plano con la esfera, y calcula la ecuación continua de la recta que pasa por ese punto y corta perpendicularmente a r.

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (2,1,-2)$.

El haz de planos, β, perpendiculares a la recta r tienen la siguiente expresión general: $\beta \equiv 2x + y - 2z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, existes dos planos, π_1 y π_2, que distan 3 unidades del origen y que son tangentes a la esfera de centro en el origen y radio 3.

La distancia del origen de coordenadas al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(O,\pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al $\beta \equiv 2x + y - 2z + D = 0$, sabiendo que la distancia es de 3 unidades:

$$d(P,\pi) = \frac{|D|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = 3; \quad \frac{|D|}{\sqrt{4+1+4}} = 3; \quad \frac{|D|}{\sqrt{9}} = 3 \Rightarrow D_1 = -9, D_2 = 9.$$

Los planos que cumplen la condición pedida son los siguientes:

$$\underline{\pi_1 \equiv 2x + y - 2z - 9 = 0 \ \text{ y } \ \pi_2 \equiv 2x + y - 2z + 9 = 0}.$$

La recta r', paralela a r, que pasa por el origen de coordenadas, expresada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r' \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$.

Los puntos de tangencia pedidos son las intersecciones de la recta r' y los planos π_1 y π_2.

$$\left.\begin{array}{r} \pi_1 \equiv 2x + y - 2z - 9 = 0 \\ r' \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 4\lambda + \lambda + 4\lambda - 9 = 0; \ \ 9\lambda - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 2 \cdot 1 = 2 \\ y = 1 \\ z = -2 \cdot 1 = -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{P_1(2,1,-2)}.$$

$$\left.\begin{array}{r} \pi_2 \equiv 2x + y - 2z + 9 = 0 \\ r' \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 4\lambda + \lambda + 4\lambda + 9 = 0;\ \ 9\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 2 \cdot (-1) = -2 \\ y = -1 \\ z = -2 \cdot (-1) = 2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{P_1(-2,-1,2)}.$$

****

5º) Calcula los límites: $a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}}$. $\qquad b)\ \lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot sen\ \frac{1}{x}\right)$.

$a)$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}}=\frac{\infty}{\infty-\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3}\right)}{\left(\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}\right)\left(\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3}\right)}{\left(\sqrt{3x^3+2x^2}\right)^2-\left(\sqrt{3x^3}\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{3x^3+2x^2}+\sqrt{3x^3}\right)}{3x^3+2x^2-3x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x}\right)}{2x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x}\right)}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{3}\cdot x}{2x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{3x^2+2x}+\sqrt{3}\cdot x}{x}}{\frac{2x}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{3x^2+2x}}{x}+\sqrt{3}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{3x^2+2x}{x^2}}+\sqrt{3}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{3+\frac{2}{x}}+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3+\frac{2}{\infty}}+\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3+0}+\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\underline{\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3x^3+2x^2}-\sqrt{3x^3}}=\sqrt{3}.}$$

$b)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot sen\ \frac{1}{x}\right)=\infty\cdot sen\ \frac{1}{\infty}=\infty\cdot 0\Rightarrow Ind.\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{sen\ \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\frac{sen\ \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}=$$

$$=\frac{sen\ 0}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cdot\cos\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}=\cos\frac{1}{\infty}=$$

$$=\cos 0\Rightarrow\underline{\lim_{x\to+\infty}\left(x\cdot sen\ \frac{1}{x}\right)=1.}$$

****

6º) Se considera la función $f(x) = \ell og_2 \left[sen\ \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}}\right]$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[6, 7]$.

b) Demuestra que existe un valor $a \in (6, 7)$ tal que $f(\alpha) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

----

a)

La función $f(x)$ es logarítmica, por lo cual, es continua en su dominio, que es $(0, +\infty)$.

Demostrar que $f(x)$ es continua es equivalen a demostrar que es positiva la expresión $sen\ \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}}$.

El recorrido de la función seno es $[-1, 1]$, por lo cual: $-1 \leq sen\ \frac{\pi(x+1)}{4} \leq 1$.

La expresión $2^{\alpha} > 0, \forall \alpha \in R$; también se cumple que: $\begin{cases} \alpha \geq 0 \Rightarrow 2^{\alpha} \geq 1 \\ \alpha < 0 \Rightarrow 0 < 2^{\alpha} < 1 \end{cases}$.

La expresión $2^{\frac{x-5}{2}}$ en el intervalo $(6, 7)$ vale: $\begin{cases} x = 6 \Rightarrow 2^{\frac{6-5}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \\ x = 7 \Rightarrow 2^{\frac{7-5}{2}} = 2^1 = 2 \end{cases}$. De lo anterior se deduce que: $\sqrt{2} \leq 2^{\frac{x-5}{2}} \leq 2$.

$$-1 + \sqrt{2} \leq sen\ \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}} \leq 1 + 2 \Rightarrow 0{,}414 \leq sen\ \frac{\pi(x+1)}{4} + 2^{\frac{x-5}{2}} \leq 3.$$

$\underline{\textit{Queda demostrado que la función } f(x) \textit{ es continua en } [6, 7]}$.

b)

Sabiendo que la función $f(x)$ es continua en $[6, 7]$ le es aplicable el teorema de Bolzano en el intervalo $(6, 7)$.

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

$$f(6) = \ell og_2 \left(sen\ \frac{7\pi}{4} + 2^{\frac{6-5}{2}}\right) = \ell og_2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 2^{\frac{1}{2}}\right) = \ell og_2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}\right) =$$

$$= \ell og_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \ell og_2 \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2} = \ell og_2 2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} < 0.$$

$$f(7) = \ell og_2\left(sen\ \frac{8\pi}{4} + 2^{\frac{7-5}{2}}\right) = \ell og_2[sen\ (2\pi) + 2^1] = \ell og_2(0+2) =$$

$$= \ell og_2 2 = 1 > 0.$$

$\underline{Queda\ demostrado\ que\ \exists \alpha \in (6,7)\ tal\ que\ f(\alpha) = 0.}$

****

7º) Se considera la función $f(x) = \sqrt{x + sen\ \frac{\pi x}{2}}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1, 3]$.

b) Demuestra que existen dos valores $\alpha \in (1, 3)$ y $\beta \in (2, 3)$ tales que $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

----

a)

La función $f(\alpha) = sen\ \alpha \geq 0, \forall \alpha \in [0, 2\pi]$, por lo cual, la función $f(x)$ es continua en el intervalo $[1, 3]$ por ser la raíz cuadrada de dos funciones continuas y cuya suma es positiva en el intervalo considerado.

b)

La función $f(x)$ es derivable en $(1, 3)$, siendo: $f'(x) = \frac{1+\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}}{2\cdot\sqrt{x+sen\ \frac{\pi x}{2}}}$.

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

Aplicando el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en los intervalos $[1, 2]\ y\ [2, 3]$:

$$[1, 2] \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(1) = \sqrt{1 + sen\ \frac{\pi}{2}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ f(2) = \sqrt{2 + sen\ \pi} = \sqrt{2+0} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f(1) = f(2).$$

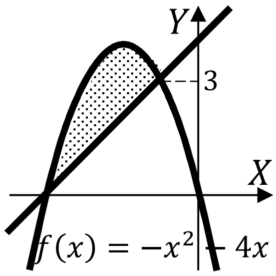
$$[2, 3] \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(2) = \sqrt{2 + sen\ \pi} = \sqrt{2+0} = \sqrt{2} \\ f(3) = \sqrt{3 + sen\ \frac{3\pi}{2}} = \sqrt{3-1} = \sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f(2) = f(3).$$

Queda demostrado que:

$$\underline{Existen\ \alpha \in (1, 3), \beta \in (2, 3)\ tales\ que\ f'(\alpha) = f'(\beta) = 0.}$$

****

8º) Teniendo en cuenta los datos que aparecen en el gráfico, calcula el área de la región sombreada.



La función $f(x) = -x^2 - 4x$ corta al eje de abscisas en los puntos siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 4x = 0;\ -x(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow O(0,0) \\ x_2 = -4 \rightarrow A(-4,0) \end{cases}.$$

Los puntos de corte de $f(x)$ con la recta horizontal $y = 3$ tienen por abscisas las raíces de la ecuación que se forma al igualar sus expresiones.

$$-x^2 - 4x = 3;\ \ x^2 + 4x + 3 = 0;\ \ x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} =$$

$$= -2 \pm 1 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = -1.$$

De las dos raíces halladas, para el cálculo del área pedida, la que nos interesa es el valor $x = -1$. El punto de corte es $B(-1,3)$.

El vector director de la recta es $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-1,3) - (-4,0) = (3,3)$, cuya pendiente es $m = 1$, por lo cual, la ecuación de la recta es la siguiente, considerando el punto $A(-4,0)$: $y - 0 = 1 \cdot (x+4) \Rightarrow y = x + 4$.

En el intervalo de la superficie a calcular, $(-4,-1)$, las ordenadas de la función son mayores que las correspondientes ordenadas de la recta, por lo que la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-4}^{-1} [f(x) - y(x)] \cdot dx = \int_{-4}^{-1} [(-x^2 - 4x) - (x+4)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-4}^{-1} (-x^2 - 5x - 4) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 4x \right]_{-4}^{-1} =$$

$$= \left[-\frac{(-1)^3}{3} - \frac{5 \cdot (-1)^2}{2} - 4 \cdot (-1) \right] - \left[-\frac{(-4)^3}{3} - \frac{5 \cdot (-4)^2}{2} - 4 \cdot (-4) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 4 - \frac{64}{3} + 40 - 16 = 28 - \frac{63}{3} - \frac{5}{2} = 28 - 21 - \frac{5}{2} = 7 - \frac{5}{2} = \underline{4{,}5\ u^2}.$$

****