PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE NAVARRA

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones, A o B.

OPCIÓN A

1º) Estudia el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{l}(a-3)x+(a-2)y+2z=-1 \\ (2a-6)x+(3a-6)y+5z=-1 \\ (3-a)x+(a-2)z=a^2-4a+5\end{array}\right.$ dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a-3 & a-2 & 2 \\ 2a-6 & 3a-6 & 5 \\ 3-a & 0 & a-2 \end{pmatrix},\ M'=\begin{pmatrix} a-3 & a-2 & 2 & -1 \\ 2a-6 & 3a-6 & 5 & -1 \\ 3-a & 0 & a-2 & a^2-4a+5 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a-3 & a-2 & 2 \\ 2a-6 & 3a-6 & 5 \\ 3-a & 0 & a-2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a-3 & a-2 & 2 \\ 2(a-3) & 3(a-2) & 5 \\ 3-a & 0 & a-2 \end{vmatrix}=$$

$$=3(a-3)(a-2)^2+5(a-2)(3-a)-6(a-2)(3-a)-2(a-3)(a-2)^2=$$

$$=(a-3)(a-2)^2-(a-2)(3-a)=(a-3)(a-2)^2+(a-2)(a-3)=$$

$$=(a-3)(a-2)[(a-2)+1]=(a-1)(a-2)(a-3)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1=1, a_2=2, a_3=3.$$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{l} a\neq 1 \\ a\neq 2 \\ a\neq 3\end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 - C_2 = C_4\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5 - 2 + 5 + 4 = 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ a = 3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 3 + 1 - 12 = 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a = 2 \\ a = 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Para $a = 1$ el sistema resulta $\begin{cases} -2x - y + 2z = -1 \\ -4x - 3y + 5z = -1 \\ 2x - z = 2 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Para su resolución se desprecia la segunda ecuación y se hace $x = \lambda$:

$$z = -2 + 2\lambda;\ -2\lambda - y - 4 + 4\lambda = -1 \Rightarrow y = -3 + 2\lambda.$$

$$\underline{Solución: x = \lambda,\ y = -3 + 2\lambda,\ z = -2 + 2\lambda,\ \forall \lambda \in R.}$$

Se resuelve ahora para $a \neq 1, a \neq 2\ y\ a \neq 3$ por el método de Gauss:

$$M' = \begin{pmatrix} a-3 & a-2 & 2 & -1 \\ 2a-6 & 3a-6 & 5 & -1 \\ 3-a & 0 & a-2 & a^2-4a+5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 + F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-3 & a-2 & 2 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 & 1 \\ 0 & a-2 & a & a^2-4a+4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a-3 & a-2 & 2 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & a^2-4a+3 \end{pmatrix} \Rightarrow z = \frac{a^2-4a+3}{a-1} = \frac{(a-1)(a-3)}{a-1} = a-3.$$

$$(a-2)y + a - 3 = 1; \;\; (a-2)y = 4 - a \Rightarrow y = \frac{4-a}{a-2}.$$

$$(a-3)x + (a-2)\frac{4-a}{a-2} + 2(a-3) = -1; \; (a-3)x + 4 - a + 2a - 6 = -1;$$

$$(a-3)x + a - 2 = -1; \;\; (a-3)x + a - 2 = 1 - a \Rightarrow x = \frac{1-a}{a-3}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{1-a}{a-3}, \;\; y = \frac{4-a}{a-2}, \;\; z = a-3, \;\; \forall a \in R - \{2,3\}.}$$

****

2º) Halla el simétrico del punto $P(2,5,2)$ respecto de la recta $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$.

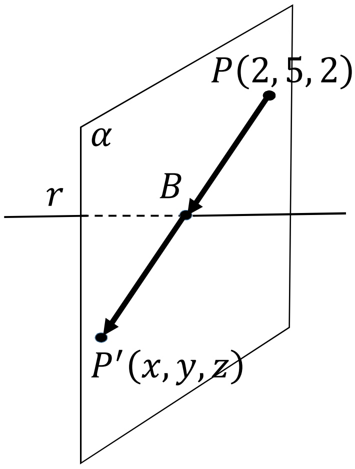
Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (2, -1, 2)$.

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv 2x - y + 2z + D = 0$.

El plano $\alpha \in \beta$ que contiene al punto $P(2,5,2\ )$ es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv 2x - y + 2z + D = 0 \\ P(2,5,2\ ) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 2 - 5 + 2 \cdot 2 + D = 0;\ \ 4 - 5 + 4 + D = 0;$$

$3 + D = 0;\ \ D = -3 \Rightarrow\ \alpha \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0.$



El punto B intersección de r y α es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$2(-1 + 2\lambda) - (2 - \lambda) + 2(-1 + 2\lambda) - 3 = 0;$

$-2 + 4\lambda - 2 + \lambda - 2 + 4\lambda - 3 = 0;\ \ 9\lambda - 9 = 0;\ \ \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$

$$\left.\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}\right\} \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = -1 + 2 = 1 \\ y = 2 - 1 = 1 \\ z = -1 + 2 = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow B(1,1,1).$$

Para que P' sea el simétrico de P con respecto a r tiene que cumplirse que:

$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{BP'}\ \Rightarrow\ [B - P] = [P' - B];$

$[(1,1,1) - (2,5,2\ )] = [(x,y,z) - (1,1,1)];$

$$(-1,-4,-1) = (x-1, y-1, z-1) \Rightarrow \left.\begin{cases} x - 1 = -1 \rightarrow x = 0 \\ y - 1 = -4 \rightarrow y = -3 \\ z - 1 = -1 \rightarrow z = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{P'(0,-3,0)}.$$

****

3º) Demuestra que existe $a \in (0,2)$ tal que $f'(a) = 1$, siendo la función $f(x)$ de expresión $f(x) = sen\ \frac{\pi+\pi x}{2} \cdot cos\ \frac{\pi x}{2} \cdot L\ (2e^x + 2x - x^2)$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

$$f'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot cos\ \frac{\pi+\pi x}{2} \cdot cos\ \frac{\pi x}{2} \cdot L\ (2e^x + 2x - x^2) -$$

$$-sen\ \frac{\pi+\pi x}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot sen\ \frac{\pi x}{2} \cdot L\ (2e^x + 2x - x^2) + sen\ \frac{\pi+\pi x}{2} \cdot cos\ \frac{\pi x}{2} \cdot \frac{2e^x+2-2x}{2e^x+2x-x^2}.$$

Las funciones $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas y derivables en el intervalo $(0,2)$.

$$f'(0) = \frac{\pi}{2} \cdot cos\ \frac{\pi}{2} \cdot cos\ 0 \cdot L\ (2+0-0) -$$

$$-sen\ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot sen\ 0 \cdot L\ (2+0-0) + sen\ \frac{\pi}{2} \cdot cos\ 0 \cdot \frac{2+2-0}{2+0-0} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 0 \cdot 1 \cdot L\ 2 - 1 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 0 \cdot L\ 2 + 1 \cdot 1 \cdot 2 = 0 + 0 + 2 = 2$$

$$f'(1) = \frac{\pi}{2} \cdot cos\ \frac{\pi+\pi}{2} \cdot cos\ \frac{\pi}{2} \cdot L\ (2e + 2 - 1) -$$

$$-sen\ \frac{\pi+\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot sen\ \frac{\pi}{2} \cdot L\ (2e + 2 - 1) + sen\ \frac{\pi+\pi}{2} \cdot cos\ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2e+2-2}{2e+2-1} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot cos\ \pi \cdot 0 \cdot L\ (2e+1) - 0 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot sen\ \frac{\pi}{2} \cdot L\ (2e+2-1) + 0 \cdot cos\ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2e+2-2}{2e+2-1} =$$

$$= 0 - 0 + 0 = 0.$$

En el intervalo $(0,1) \in (0,2)$ le es aplicable a $f'(x)$ el teorema de los Valores Intermedios o propiedad de Darboux que dice: "si una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a,b]$ y un número k está comprendido entre los valores extremos de la función, o sea, $f(a) \leq k \leq f(b)$ o $f(a) \geq k \geq f(b)$, entonces existe un valor $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = k$".

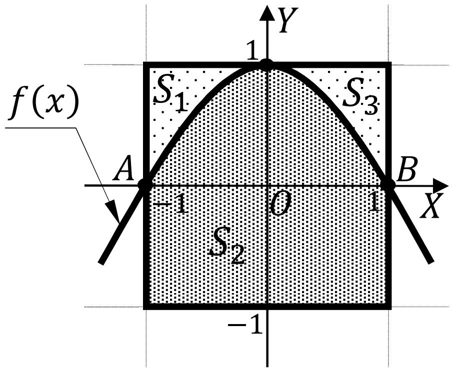
Como quiera que es $f'(0) = 2 > 1 > f'(1) = 0$:

$$\underline{\exists a \in (0,2)\ tal\ que\ f'(a) = 1, como\ teníamos\ que\ demostrar.}$$

****

4º) La gráfica de la función $f(x) = \cos\frac{\pi x}{2}$ divide al cuadrado de centro $O(0, 0)$ y lado 2 en tres regiones. Calcula el área de cada una de esas tres regiones.

Teniendo en cuenta que $f(0) = 1;\ f(-1) = f(1) = 0$, la representación gráfica, aproximada, de la función es la que aparece en la figura adjunta.



De la observación de la figura se deducen las superficies a calcular, que son las siguientes:

$$S_1 = S_3 = \int_0^1 [1 - f(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2}\right) \cdot dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \cos\frac{\pi x}{2} \cdot dx =$$

$$= [x]_0^1 - A = 1 - 0 - A = 1 - A = S_1. \quad (*)$$

$$A = \int_0^1 \cos\frac{\pi x}{2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{\pi x}{2} = t \\ dx = \frac{2}{\pi} \cdot dt \end{array} \middle| \begin{array}{c} x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot [sen\ t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot \left(sen\ \frac{\pi}{2} - sen\ 0\right) = \frac{2}{\pi} \cdot (1 - 0) = \frac{2}{\pi}.$$

Sustituyendo el valor obtenido en (*):

$$S_1 = 1 - \frac{2}{\pi} = \frac{\pi - 2}{\pi}.$$

$$\underline{S_1 = S_3 = \frac{\pi - 2}{\pi}\ u^2 \cong 0{,}36\ u^2.}$$

La superficie S_2 puede obtenerse de forma sencilla restando a la superficie del cuadrado las superficies $S_1\ y\ S_3$; no obstante se resuelve por integrales.

$$S_2 = \int_{-1}^1 [f(x) - (-1)] \cdot dx = \int_{-1}^1 \left(1 + \cos\frac{\pi x}{2}\right) \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^1 dx + \int_{-1}^1 \cos\frac{\pi x}{2} \cdot dx = [x]_{-1}^1 + B = 1 - (-1) + B = 2 + B = S_2. \quad (**)$$

$$B = \int_{-1}^1 \cos\frac{\pi x}{2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{\pi x}{2} = t \\ dx = \frac{2}{\pi} \cdot dt \end{array} \middle| \begin{array}{c} x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = -1 \rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot [sen\ t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \cdot \left[sen\ \frac{\pi}{2} - sen\ \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{2}{\pi} \cdot \left(sen\ \frac{\pi}{2} + sen\ \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}.$$

Sustituyendo el valor obtenido en (**):

$S_2 = 2 + \frac{4}{\pi} = \frac{2\pi+4}{\pi}$.

$$\underline{S_2 = \frac{2\pi+4}{\pi}\ u^2 \cong 3{,}27\ u^2.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Siendo la matriz $A = \begin{pmatrix} t & 2 & t+2 \\ -t & t & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcula el valor del parámetro t para que se cumpla la igualdad $|A^{-1}| = -1$.

$$|A^{-1}| = \left|\frac{1}{A}\right| = \frac{1}{|A|} = -1 \Rightarrow |A| = -1.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} t & 2 & t+2 \\ -t & t & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2t^2 - t(t+2) + 4t = 2t^2 - t^2 - 2t + 4t = -1;$$

$t^2 + 2t = -1;\ \ t^2 + 2t + 1 = 0;\ \ (t+1)^2 = 0 \Rightarrow t = -1.$

$$\underline{|A^{-1}| = -1\ para\ t = -1}.$$

****

2º) Halla la ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x+z-5=0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1}$.

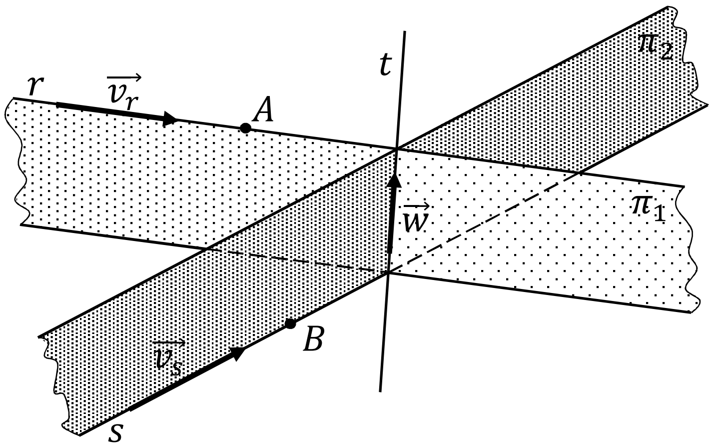
La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x+z-5=0 \end{cases} \Rightarrow x=\lambda \Rightarrow z=5-2\lambda;\;\; y=3-x-z=$$

$$=3-\lambda-5+2\lambda=-2+\lambda \;\;\Rightarrow\;\; r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=5-2\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $A(0,-2,5)$ y $\overrightarrow{v_r}=(1,1,-2)$.

Un punto y un vector director de s son $B(2,-3,1)$ y $\overrightarrow{v_s}=(-2,1,1)$.



Un vector $\overrightarrow{w}$ perpendicular a los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de estos vectores:

$$\overrightarrow{w'}=\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=i+4j+k+2k+2i-j=3i+3j+3k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{w}=(1,1,1).$$

Determinamos dos planos π_1 y π_2 de las siguientes características:

$$\pi_1(A;\,\overrightarrow{v_r},\overrightarrow{w}) \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0;$$

$$x-2(y+2)+(z-5)-(z-5)+2x-(y+2)=0;$$

$$3x-3(y+2)=0;\;\; x-(y+2)=0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x-y-2=0.$$

$$\pi_2(B;\ \overrightarrow{v_s},\overrightarrow{w}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$(x-2)+(y+3)-2(z-1)-(z-1)-(x-2)+2(y+3)=0;$

$3(y+3)-3(z-1)=0;\ \ (y+3)-(z-1)=0;\ \ y+3-z+1=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_2 \equiv y-z+4=0.$

La recta pedida t es la intersección de los planos obtenidos anteriormente, π_1 y π_2: $t \equiv \begin{cases} x-y-2=0 \\ y-z+4=0 \end{cases}.$

Para expresar t en función continua hacemos $y=\lambda$:

$x=2+\lambda;\ \ z=4+\lambda \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=\lambda \\ z=4+\lambda \end{cases}.$

La expresión de t dada por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\underline{t \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{1}}.$$

****

3º) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$I_1 = \int \frac{x+1}{x^2+3x-4} \cdot dx.$ $\qquad$ $I_2 = \int \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}} \cdot dx.$

$$I_1 = \int \frac{x+1}{x^2+3x-4} \cdot dx.$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0;\ \ x = \frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-3\pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 1.$$

$$x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1).$$

$$\frac{x+1}{x^2+3x-4} = \frac{M}{x+4} + \frac{N}{x-1} = \frac{Mx-M+Nx+4N}{(x+4)(x-1)} = \frac{(M+N)x+(-M+4N)}{x^2+3x-4} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} M+N=1 \\ -M+4N=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5N = 2;\ \ N = \frac{2}{5};\ \ M + \frac{2}{5} = 1 \Rightarrow M = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

$$I_1 = \int \frac{x+1}{x^2+3x-4} \cdot dx = \int \left(\frac{\frac{3}{5}}{x+4} + \frac{\frac{2}{5}}{x-1} \right) \cdot dx = \frac{3}{5} \cdot L|x+4| + \frac{2}{5} \cdot L|x-1| + C =$$

$$= L\sqrt[5]{(|x+4|)^3 \cdot (x-1)^2} + C.$$

$$\underline{I_1 = \int \frac{x+1}{x^2+3x-4} \cdot dx = L\sqrt[5]{(|x+4|)^3 \cdot (x-1)^2} + C.}$$

$$I = \int \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}} \cdot dx = \int \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1+e^x = t \\ e^x \cdot dx = dt \end{array} \right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t^2} \cdot dt =$$

$$= \int t^{-2} \cdot dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{1+e^x} + C.$$

$$\underline{I_2 = \int \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}} \cdot dx = -\frac{1}{1+e^x} + C.}$$

****

4º) Halla los extremos relativos y los puntos de inflexión de la siguiente función: $f(x) = x^4 - x^2$.

Por ser $f(-x) = f(x)$, la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición, que es necesaria, no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f'(x) = 4x^3 - 2x$. $\qquad f''(x) = 12x^2 - 2$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 2x = 0;\; 2x(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0;$

$2x^2 - 1 = 0;\; x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

$f''(0) = -2 < 0 \;\Rightarrow \textit{Máximo relativo para } x = 0.$

$f(0) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\textit{Máximo}: O(0,0)}.$

$f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 12 \cdot \frac{1}{2} - 2 = 4 > 0 \;\Rightarrow \textit{Mínimo relativo para } x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \underline{\textit{Mínimo}: P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{4}\right)}.$

Por simetría con respecto al eje Y: $\underline{\textit{Mínimo}: Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{4}\right)}.$

Una función tiene un punto de inflexión para los valores que anulan la segunda derivada, siendo distinto de cero el valor de la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 2 = 0;\; 6x^2 - 1 = 0;\; x^2 = \frac{1}{6} \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{6};\; x_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}.$

$f'''(x) = 24x \Rightarrow f'''(x_1) \neq 0 \; y \; f'''(x_2) \neq 0 \Rightarrow P.I.\, para\; x = x_1 \; y \; x = x_2.$

Siendo $x^2 = \frac{1}{6}$ es $f\left(\mp\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = \frac{1}{36} - \frac{1}{6} = \frac{1-6}{36} = -\frac{5}{36}.$

Teniendo en cuenta la simetría de la función con respecto al eje Y:

$$\underline{Puntos\ de\ inflexión: M\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{5}{36}\right)\ y\ N\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\ \frac{5}{36}\right).}$$

****