PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE NAVARRA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible: $\begin{cases} x+(a-1)y+z=-1 \\ (a-1)y+2z=-2 \\ x+(a^2-5a+5)z=-a+4 \end{cases}$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 1 & 0 & a^2-5a+5 \end{pmatrix};\ M'=\begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & a^2-5a+5 & -a+4 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a-1 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 1 & 0 & a^2-5a+5 \end{vmatrix}=(a-1)(a^2-5a+5)+2(a-1)-(a-1)=$$

$$=(a-1)(a^2-5a+5)+(a-1)=(a-1)(a^2-5a+6)=$$

$$=a^3-5a^2+6a-a^2+5a-6=a^3-6a^2+11a-6=0 \Rightarrow \{Ruffini\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a_1=1, a_2=2;\ a_3=3.$$

$$Para\ \begin{Bmatrix} a\neq 1 \\ a\neq 2 \\ a\neq 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 + 2 + 2 = 8 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 + 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ \left\{ \begin{matrix} a = 1 \\ a = 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow Ran\ M = 2;\ Ran\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a = 3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_4 = -C_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = 3 \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Se resuelve, en primer lugar, cuando el sistema es compatible determinado aplicando el método de Gauss:

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & a^2 - 5a + 5 & -a + 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} F_1 \to F_1 - F_2 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 & -2 \\ 0 & 1-a & a^2 - 5a + 4 & -a + 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 + F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & a^2 - 5a + 6 & -a + 3 \end{pmatrix} \Rightarrow z = \frac{-a+3}{a^2-5a+6} = \frac{-a+3}{(a-2)(a-3)} = \frac{-1}{a-2}.$$

$$(a-1)y + 2z = -2 \Rightarrow y = \frac{-2-2z}{a-1} = \frac{-2+\frac{2}{a-2}}{a-1} = \frac{\frac{-2a+4+2}{a-2}}{a-1} = \frac{-2(a-3)}{(a-1)(a-2)}.$$

$$x - z = 1 \Rightarrow x = 1 + z = 1 + \frac{-1}{a-2} = \frac{a-2-1}{a-2} = \frac{a-3}{a-2}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{a-3}{a-2},\ \ y = \frac{-2(a-3)}{(a-1)(a-2)},\ \ z = \frac{-1}{a-2};\ \ \forall a \in R - \{1, 2\}.}$$

Se resuelve ahora para $a = 3$ en cuyo caso el sistema es $\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2y + 2z = -2 \\ x - z = 1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Para su resolución se elimina una de las ecuaciones, por ejemplo la primera, y se parametriza una de las incógnitas, por ejemplo $z = \lambda$, con lo que resulta:

$$\left.\begin{array}{r} 2y + 2\lambda = -2 \\ x - \lambda = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1 + \lambda; \quad y = -1 - \lambda.$$

$$Solución: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \forall \lambda \in R.$$

****

2º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ 3x - y - 4z + 6 = 0 \end{cases}$, $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1}$ y el punto de expresión $P(1, -1, 0)$, halla la ecuación general de un plano π que sea paralelo a ambas rectas y tal que la distancia de P a π sea 2.

Un vector director de una recta dada por la intersección de dos planos es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan.

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ 3x - y - 4z + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{cases} \overrightarrow{n_1} = (2, -1, -2) \\ \overrightarrow{n_2} = (3, -1, -4) \end{cases} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 4i - 6j - 2k + 3k - 2i + 8j = 2i + 2j + k \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (2, 2, 1).$$

Un vector director de $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{1}$ es $\overrightarrow{v_s} = (1, 0, 1)$.

El vector normal del haz de planos paralelos β que contiene al plano π pedido es linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores de las dos rectas:

$$\vec{n} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2i + j - 2k - 2j = 2i - j - 2k = (2, -1, -2).$$

La expresión general del haz de planos β es: $\beta \equiv 2x - y - 2z + D = 0$.

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula anterior al punto $P(1, -1, 0)$ y al plano β:

$$d(P, \beta) = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 + D|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = 2; \quad \frac{|2 + 1 - 0 + D|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 2; \quad \frac{|3 + D|}{\sqrt{9}} = 2; \quad |3 + D| = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{r} 3 + D = 6 \rightarrow D_1 = 3 \\ -3 - D = 6 \rightarrow D_2 = -9 \end{array} \right\}.$$

Existen dos planos que cumplen la condición pedida; son los siguientes:

$$\underline{\pi_1 \equiv 2x - y - 2z + 3 = 0 \; y \; \pi_1 \equiv 2x - y - 2z - 9 = 0.}$$

****

3º) Calcula los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2-5x+7}\right).$ $\qquad b)\ \lim_{x\to1}[\cos(\pi x)+2^x]^{\frac{1}{Lx}}.$

$a)$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2-5x+7}\right)=\infty-\infty\ \Rightarrow\ Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2-5x+7}\right)\cdot\left(\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}\right)}{\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2+3x+1}\right)^2-\left(\sqrt{2x^2-5x+7}\right)^2}{\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x+1-(2x^2-5x+7)}{\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x+1-2x^2+5x-7}{\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x-6}{\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{8x-6}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2+3x+1}}{x}+\frac{\sqrt{2x^2-5x+7}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8-\frac{6}{x}}{\sqrt{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{5-\frac{5}{x}+\frac{7}{x^2}}}=\frac{8-\frac{1}{\infty}}{\sqrt{2+\frac{3}{\infty}+\frac{1}{\infty}}+\sqrt{5-\frac{5}{\infty}+\frac{7}{\infty}}}=$$

$$=\frac{8-0}{\sqrt{2+0+0}+\sqrt{2-0+0}}=\frac{8}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{8}{2\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=\underline{2\sqrt{2}}.$$

$b)$

$$\lim_{x\to1}[\cos(\pi x)+2^x]^{\frac{1}{Lx}}=(\cos\pi+2^1)^{\frac{1}{L1}}=(-1+2)^{\frac{1}{0}}=1^\infty\Rightarrow Indet.\,nº\ e\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=[\cos(\pi x)+2^x]^{\frac{1}{Lx}}\ \Rightarrow\ LA=\frac{1}{Lx}L[\cos(\pi x)+2^x]=\frac{L[\cos(\pi x)+2^x]}{Lx}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=[\cos(\pi x)+2^x]^{\frac{1}{Lx}}\Rightarrow LA=\frac{L[\cos(\pi x)+2^x]}{Lx}\Rightarrow A=e^{\frac{L[\cos(\pi x)+2^x]}{Lx}}=e^{\frac{L(-1+2)}{L1}}=$$

$$=e^{\frac{L1}{L1}}=e^{\frac{0}{0}\to Ind.}\Rightarrow e^{\lim_{x\to1}\frac{\frac{-\pi\cdot sen\,(\pi x)+2^x\cdot L2}{\cos(\pi x)+2^x}}{\frac{1}{x}}}=e^{\frac{\frac{-0+L4}{-1+2}}{\frac{1}{1}}}=e^{L4}.$$

$$\underline{\lim_{x\to1}[\cos(\pi x)+2^x]^{\frac{1}{Lx}}=e^{L4}.}$$

****

4º) Demuestra que la función $f(x) = sen\ \frac{\pi x}{2} \cdot \sqrt{x^2 + x}$ tiene un máximo relativo en el intervalo $(1, 3)$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

La condición necesaria para que una función tenga un máximo relativo es que se anule su primera derivada.

$$f'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot cos\ \frac{\pi x}{2} \cdot \sqrt{x^2 + x} + sen\ \frac{\pi x}{2} \cdot \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}.$$

$$f'(1) = \frac{\pi}{2} \cdot cos\ \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{1^2 + 1} + sen\ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1 + 1}{2\sqrt{1^2+1}} = \frac{\pi}{2} \cdot 0 \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

$$f'(3) = \frac{\pi}{2} \cdot cos\ \frac{3\pi}{2} \cdot \sqrt{3^2 + 3} + sen\ \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3 + 1}{2\sqrt{3^2+3}} = \frac{\pi}{2} \cdot 0 \cdot \sqrt{12} + (-1) \cdot \frac{7}{2\sqrt{12}} =$$

$$= -\frac{7}{4\sqrt{3}}.$$

Las funciones $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas y derivables en el intervalo $(1, 3)$.

Por ser $f(1) \neq f(3)$ no es posible la aplicación del teorema de Rolle, pero si es posible la aplicación del teorema de los Valores Intermedios o propiedad de Darboux que dice: "si una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$ y un número k está comprendido entre los valores extremos de la función, o sea, $f(a) \leq k \leq f(b)$ o $f(a) \geq k \geq f(b)$, entonces existe un valor $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$".

Como es $f'(1) > 0 > f'(3)$ y la función $f(x)$ es creciente en $x = 1$ y decreciente en $x = 3$, necesariamente tiene al menos un máximo en $(1, 3)$.

$$\underline{Lo\ anterior\ demuestra\ lo\ pedido.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Calcula los valores del parámetro t para los que la siguiente matriz no es regular: $A = \begin{pmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{pmatrix}$.

Una matriz es regular o invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{vmatrix} = (-t-1)(-t+1) + 2(t+1)(-t+1) +$$

$$+t(-t-1)(-t+1) - (t+1) =$$

$$= (-t+1)[(-t-1) + 2(t+1) + t(-t-1)] - (t+1) =$$

$$= (-t+1)(-t-1+2t+2-t^2-t) - t - 1 = (-t+1)(1-t^2) - t - 1 =$$

$$= -t + t^3 + 1 - t^2 - t - 1 = t^3 - t^2 - 2t = t(t^2 - t - 2) = 0 \Rightarrow t_1 = 0;$$

$$t^2 - t - 2 = 0;\ \ t = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow t_2 = -1, t_3 = 2.$$

$\underline{\textit{La matriz A no es regular para } t = -1, t = 0 \textit{ y } t = 2.}$

****

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta r que pasa por el punto $P(-4, 2, 0)$ y corta a las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+2}{3}$.

La expresión de r_1 por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x + 3y + z - 1 = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow x = 3 - 2\lambda;\ \ z = 1 - 2x - 3\lambda =$$

$$= 1 - 6 + 4\lambda - 3\lambda = -5 + \lambda = z \ \Rightarrow\ r_1 \equiv \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -5 + \lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r_1 son $Q(3, 0, -5)$ y $\overrightarrow{v_1} = (2, -1, -1)$.

Los puntos P y Q determinan el vector:

$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(3, 0, -5) - (-4, 2, 0)] = (7, -2, -5)$.

El plano π_1 que contiene a la recta r_1 y al punto P tiene la siguiente expresión general:

$$\pi_1(P;\ \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{PQ}) \equiv \begin{vmatrix} x+4 & y-2 & z \\ 2 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0;$$

$5(x + 4) - 7(y - 2) - 4z + 7z - 2(x + 4) + 10(y - 2) = 0;$

$3(x + 4) + 3(y - 2) + 3z = 0;\ x + 4 + y - 2 + z = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x + y + z + 2 = 0.$

Un punto y un vector director de r_2 son: $R(-1, -3, -2)\ y\ \overrightarrow{v_2} = (-2, 3, 3)$.

Los puntos P y R determinan el vector:

$\overrightarrow{PR} = [R - P] = [(-1, -3, -2) - (-4, 2, 0)] = (3, -5, -2)$.

El plano π_2 que contiene a la recta r_2 y al punto P tiene la siguiente expresión general:

$$\pi_2(P;\ \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{PR}) \equiv \begin{vmatrix} x+4 & y-2 & z \\ -2 & 3 & 3 \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 0;$$

$-6(x + 4) + 9(y - 2) + 10z - 9z + 15(x + 4) - 4(y - 2) = 0;$

$9(x + 4) + 5(y - 2) + z = 0;\ \ 9x + 36 + 5y - 10 + z = 0\ \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi_2 \equiv 9x + 5y + z + 26 = 0.$

La recta r pedida es la intersección de los planos π_1 y π_2:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ 9x + 5y + z + 26 = 0 \end{cases}}.$$

La expresión de r por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z + 2 = 0 \\ 9x + 5y + z + 26 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ x = \lambda\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{r} y + z = -2 - \lambda \\ 5y + z = -26 - 9\lambda \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} -y - z = 2 + \lambda \\ 5y + z = -26 - 9\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 4y = -24 - 8\lambda \Rightarrow y = -6 - 2\lambda.$$

$$z = -2 - x - z = -2 - \lambda + 6 + 2\lambda = 4 + \lambda\ \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -6 - 2\lambda. \\ z = 4 + \lambda \end{cases}$$

$$\underline{r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+6}{-2} = \frac{z-4}{1}}.$$

****

3º) Encuentra los extremos absolutos de la función $f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^{-x+2}$ en el intervalo $[-2, 4]$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

$f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^{-x+2}$.

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada.,

$f'(x) = 2x \cdot e^{-x+2} + (x^2 - 3) \cdot (-1) \cdot e^{-x+2} = e^{-x+2} \cdot (2x - x^2 + 3)$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x+2} \cdot (2x - x^2 + 3) = 0;\ \ x^2 - 2x - 3 = 0;\ \ x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} =$

$= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3$.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trate de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f''(x) = -e^{-x+2} + (-x^2 + 2x + 3) + e^{-x+2} \cdot (-2x + 2) =$

$= e^{-x+2} \cdot (-2x + 2 + x^2 - 2x - 3) = e^{-x+2} \cdot (x^2 - 4x - 1)$.

$f''(-1) = e^3 \cdot (1 + 4 - 1) = 4e^3 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = -1$.

$f(-1) = (1 - 3) \cdot e^3 = -2e^3 \cong -40{,}17 \Rightarrow Mínimo: P(-1, -2e^3)$.

$f''(3) = e^{-1} \cdot (9 - 12 - 1) = -\frac{4}{e} < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 3$.

$f(3) = (9 - 3) \cdot e^{-1} = \frac{6}{e} \cong 2{,}21 \Rightarrow Máximo: Q\left(3, \frac{6}{e}\right)$.

Teniendo en cuenta que $f(x)$ es continua en su dominio y que:

$f(-2) = (4 - 3) \cdot e^4 = e^4 \cong 54{,}60$.

$f(4) = (16 - 3) \cdot e^{-2} = \frac{13}{e^2} = 1{,}76$.

$\underline{Mínimo\ absoluto: P(-1, -2e^3)\ y\ máximo\ absoluto: B(-2, e^4).}$

****

4º) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las siguientes funciones: $f(x) = \cos\frac{\pi x}{4}$ y $g(x) = \frac{x^2}{4} - 1$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

Las abscisas de los puntos de corte de las dos funciones son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \cos\frac{\pi x}{4} = \frac{x^2}{4} - 1; \ \Rightarrow \cos\frac{\pi x}{4} = \left(\frac{x}{2} - 1\right)\left(\frac{x}{2} + 1\right).$$

Teniendo en cuenta que para $x = \pm 2 \Rightarrow \cos\frac{\pi x}{4} = 0$, las soluciones de la ecuación son $x_1 = -2, x_2 = 2$.

Los puntos de corte de las dos curvas son $A(-2, 0)\ y\ B(2, 0)$.

En el intervalo $(-2, 2)$ las ordenadas de la función $f(x) = \cos\frac{\pi x}{4}$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la función $g(x) = \frac{x^2}{4} - 1$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-2}^{2} [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_{-2}^{2} \left[\left(\cos\frac{\pi x}{4}\right) - \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)\right] \cdot dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left(\cos\frac{\pi x}{4} - \frac{x^2}{4} + 1\right) dx = \int_{-2}^{2} \cos\frac{\pi x}{4} \cdot dx + \int_{-2}^{2} \left(-\frac{x^2}{4} + 1\right) dx = M + N. \qquad (*)$$

$$M = \int_{-2}^{2} \cos\frac{\pi x}{4} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c|c} \frac{\pi x}{4} = t & x = 2 \to t = \frac{\pi}{2} \\ dx = \frac{4}{\pi} \cdot dt & x = -2 \to t = \frac{-\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \frac{4}{\pi} \cdot dt = \frac{4}{\pi} \cdot [sen\ t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi} \cdot \left[sen\ \frac{\pi}{2} - sen\ \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{4}{\pi} \cdot [1 - (-1)] = \frac{8}{\pi}.$$

$$N = \int_{-2}^{2} \left(-\frac{x^2}{4} + 1\right) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{12} + x\right]_{-2}^{2} = \left(-\frac{2^3}{12} + 2\right) - \left[-\frac{(-2)^3}{12} + (-2)\right] =$$

$$= -\frac{8}{12} + 2 - \frac{8}{12} + 2 = 4 - \frac{16}{12} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de M y N:

$$S = M + N = \frac{8}{\pi} + \frac{8}{3} = \frac{24 + 8\pi}{3\pi} = \frac{8(\pi + 3)}{3\pi}.$$

$$\underline{S = \frac{8(\pi + 3)}{3\pi}\ u^2 \cong 5{,}21\ u^2.}$$

****