PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE NAVARRA

JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema $\begin{cases} 2x+4y+z=1 \\ 2x+(a^2+2)y+3z=3 \\ -2x-(a^2+2)y+(a-3)z=\sqrt{2}-3 \end{cases}$ dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & a^2+2 & 3 \\ -2 & -(a^2+2) & a-3 \end{bmatrix};\ M'=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & a^2+2 & 3 & 3 \\ -2 & -(a^2+2) & a-3 & \sqrt{2}-3 \end{bmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & a^2+2 & 3 \\ -2 & -(a^2+2) & a-3 \end{vmatrix}=$$

$$=2(a-3)(a^2+2)-2(a^2+2)-24+2(a^2+2)+6(a^2+2)-8(a-3)=$$

$$=2(a-3)(a^2+2)-24+6(a^2+2)-8a+24=$$

$$=(a^2+2)(2a-6+6)-8a=2a\cdot(a^2+2)-8a=2a^3+4a-8a=$$

$$=2a^3-4a=2a(a^2-2)=0 \Rightarrow a_1=0, x_2=-\sqrt{2}, x_3=\sqrt{2}.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq -\sqrt{2} \\ a\neq \sqrt{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -3 & \sqrt{2}-3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & -2 & \sqrt{2}-3 \end{vmatrix} = 4\sqrt{2} - 12 - 4 - 24 + 4 + 12 - 8\sqrt{2} + 24 = -4\sqrt{2} \neq 0$$

$\Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$$Para\ a = -\sqrt{2} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ -2 & -4 & -\sqrt{2}-3 & \sqrt{2}-3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & -\sqrt{2}-3 & \sqrt{2}-3 \end{vmatrix} =$$

$= 6\sqrt{2} - 18 - 2\sqrt{2} - 6 - 6 + 6 - 6\sqrt{2} + 18 - 2\sqrt{2} + 6 = -4\sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow Rang\ M' = 3.$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a = 0 \\ a = -\sqrt{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow Ran\ M = 2;\ Ran\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a = \sqrt{2} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ -2 & -4 & \sqrt{2}-3 & \sqrt{2}-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3 = C_4\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$$\underline{Para\ a = \sqrt{2} \Rightarrow Ran\ M = Ran\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Se resuelve, en primer lugar, cuando el sistema es compatible determinado aplicando el método de Gauss:

$$M' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & a^2+2 & 3 & 3 \\ -2 & -(a^2+2) & a-3 & \sqrt{2}-3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 + F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & a & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow az = \sqrt{2} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{a}.$$

$$(a^2-2)y + 2z = 2 \Rightarrow y = \frac{2-2z}{a^2-2} = \frac{2-\frac{2\sqrt{2}}{a}}{a^2-2} = \frac{\frac{2a-2\sqrt{2}}{a}}{a^2-2} = \frac{2\left(a-\sqrt{2}\right)}{a(a^2-2)}.$$

$2x+4y+z=1 \Rightarrow 2x=1-4y-z=1+\frac{-8(a-\sqrt{2})}{a(a^2-2)}+\frac{-\sqrt{2}}{a}=$

$=\frac{a(a^2-2)-8(a-\sqrt{2})-\sqrt{2}(a^2-2)}{a(a^2-2)}=\frac{a^3-2a-8a+8\sqrt{2}-a^2\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{a(a^2-2)}=\frac{a^3-10a+10\sqrt{2}-a^2\sqrt{2}}{a(a^2-2)}=$

$=\frac{a^2(a-\sqrt{2})-10(a-\sqrt{2})}{a(a^2-2)}=\frac{(a-\sqrt{2})(a^2-10)}{a(a^2-2)} \Rightarrow x=\frac{(a-\sqrt{2})(a^2-10)}{2a(a^2-2)}$.

$\underline{Solución: x=\frac{(a-\sqrt{2})(a^2-10)}{2a(a^2-2)},\ y=\frac{2(a-\sqrt{2})}{a(a^2-2)},\ \ z=\frac{\sqrt{2}}{a};\ \ \forall a \in R-\{0,\sqrt{2}\}.}$

Se resuelve ahora para $a=\sqrt{2}$ en cuyo caso el sistema es:

$\begin{cases} 2x+4y+z=1 \\ 2x+4y+3z=3 \\ -2x-4y+(\sqrt{2}-3)z=\sqrt{2}-3 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Para su resolución se elimina una de las ecuaciones, por ejemplo la tercera, y se parametriza una de las incógnitas, por ejemplo $y=\lambda$, con lo que resulta:

$\left.\begin{array}{r} 2x+4\lambda+z=1 \\ 2x+4\lambda+3z=3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+z=1-4\lambda \\ 2x+3z=3-4\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x-z=-1+4\lambda \\ 2x+3z=3-4\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2z=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow z=1;\ \ 2x+z=1-4\lambda;\ \ 2x=1-4\lambda-1=-4\lambda \Rightarrow x=-2\lambda.$

$\underline{Solución: \begin{cases} x=-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=1 \end{cases},\forall \lambda \in R.}$

****

2º) Comprueba que las rectas $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2}$ y $s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{2}$ se cortan perpendicularmente y halla el punto P de corte. Encuentra un punto $R \in r$ y un punto $S \in s$ de forma que P, R , S sean vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos son de longitud 3.

Un punto y un vector de r son $A(1, -1, 1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1, 2, -2)$.

Un punto y un vector de s son $B(0, 0, -3)$ y $\overrightarrow{v_s} = (2, 1, 2)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0, 0, -3) - (1, -1, 1)] = (-1, 1, -4)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 4 - 4 - 2 - 2 + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan}.$$

Dos rectas son perpendiculares cuando lo son sus vectores directores; dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = (1, 2, -2) \cdot (2, 1, 2) = 2 + 2 - 4 = 0.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan\ perpendicularmente}.$$

El punto P de corte de ambas rectas es el siguiente:

$\frac{x-1}{1} = \frac{x}{2}$; $2x - 2 = x$; $x = 2$. $\frac{y+1}{2} = \frac{y}{1}$; $y + 1 = 2y$; $y = 1$.

$\frac{z-1}{-2} = \frac{z+3}{2}$; $2z - 2 = -2z - 6$; $4z = -4$; $z = -1 \Rightarrow \underline{P(2, 1, -1)}$.

Las expresiones de ambas rectas por ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \; y \; s \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases}.$$

Unos puntos de r y s son $R(1+\lambda, -1+2\lambda, 1-2\lambda)$ y $S(2\lambda, \lambda, -3+2\lambda)$.

Los puntos P, R y S determinan los siguiente vectores:

$\overrightarrow{PR} = [R - P] = [(1+\lambda, -1+2\lambda, 1-2\lambda) - (2, 1, -1)] =$

$= (-1+\lambda, -2+2\lambda, 2-2\lambda)$.

$\left|\overrightarrow{PR}\right| = 3 \Rightarrow \sqrt{(-1+\lambda)^2 + (-2+2\lambda)^2 + (2-2\lambda)^2} = 3;$

$1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 + 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 = 9;\;\; 9\lambda^2 - 18\lambda + 9 = 9;$

$9\lambda^2 - 18\lambda = 0;\;\; \lambda^2 - 2\lambda = 0;\;\; \lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2.$

$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \underline{R_1(1, -1, 1)}$. $\qquad \lambda_2 = 2 \Rightarrow \underline{R_2(3, 3, -3)}$.

$\overrightarrow{PS} = [S - P] = [(2\lambda, \lambda, -3+2\lambda) - (2, 1, -1)] =$

$= (-2+2\lambda, -1+\lambda, -2+2\lambda)$.

$\left|\overrightarrow{PS}\right| = 3 \Rightarrow \sqrt{(-2+2\lambda)^2 + (-1+\lambda)^2 + (-2+2\lambda)^2} = 3;$

$4 - 8\lambda + 4\lambda^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 = 9;\;\; 9\lambda^2 - 18\lambda = 0;\;\; \lambda^2 - 2\lambda = 0;$

$\lambda(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2.$

$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \underline{S_1(0, 0, -3)}$. $\qquad \lambda_2 = 2 \Rightarrow \underline{S_2(4, 2, 1)}$.

****

3º) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$a)\ \ I=\int \frac{dx}{x^2-x-2}.$ $\qquad$ $b)\ \ I=\int x^2\cdot e^{2x}\cdot dx.$

$a)$

$$I=\int \frac{dx}{x^2-x-2}.$$

$$x^2-x-2=0;\ \ x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\Rightarrow x_1=-1, x_2=2.$$

$$x^2-x-2=(x+1)(x-2).$$

$$\frac{1}{x^2-x-2}=\frac{M}{x+1}+\frac{N}{x-2}=\frac{Mx-2M+Nx+N}{(x+1)(x-2)}=\frac{(M+N)x+(-2M+N)}{x^2-x-2}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} M+N=0\\ -2M+N=1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} M+N=0\\ 2M-N=-1\end{array}\right\}\Rightarrow 3M=-1;\ \ M=-\frac{1}{3};\ -\frac{1}{3}+N=0\Rightarrow N=\frac{1}{3}.$$

$$I=\int \frac{1}{x^2+x-2}\cdot dx=\int\left(\frac{-\frac{1}{3}}{x+1}+\frac{\frac{1}{3}}{x-2}\right)\cdot dx=-\frac{1}{3}\cdot L|x+1|+\frac{1}{3}\cdot L|x-2|+C=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot(L|x-2|-L|x+1|)=L\sqrt[3]{\left|\frac{x-2}{x+1}\right|}+C.$$

$$\underline{I=\int \frac{dx}{x^2-x-2}=L\sqrt[3]{\left|\frac{x-2}{x+1}\right|}+C.}$$

$b)$

$$I=\int x^2\cdot e^{2x}\cdot dx.$$

$$I=\int x^2e^{2x}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} u=x^2\rightarrow du=2xdx\\ e^{2x}dx=dv\rightarrow v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right\}\Rightarrow x^2\frac{1}{2}e^{2x}-\int e^{2x}2x\cdot\frac{1}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\cdot e^{2x}-\int x\cdot e^{2x}\cdot dx=\frac{1}{2}x^2\cdot e^{2x}-A.\qquad (*)$$

$$A=\int xe^{2x}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} u=x\rightarrow du=dx\\ e^{2x}\cdot dx=dv\rightarrow v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right\}\Rightarrow x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}\cdot dx=$$

$$=\frac{1}{2}x\cdot e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C=\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)+C.$$

Sustituyendo en (*) el valor de A:

$$I=\frac{1}{2}x^2\cdot e^{2x}-\frac{1}{4}\cdot e^{2x}(2x-1)+C=\frac{1}{4}e^{2x}(2x^2-2x+1)+C.$$

$$\underline{I = \int x^2 \cdot e^{2x} \cdot dx = \frac{1}{4} e^{2x}(2x^2 - 2x + 1) + C.}$$

****

4º) Demuestra que existe $a \in (0,2)$ tal que $f'(a) = -\frac{1}{3}$, siendo la función primitiva $f(x) = (x+1)^{(x-1)\cdot\cos\frac{\pi x}{2}}$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

Las funciones $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas y derivables en el intervalo $(0,2)$.

$$f(x) = (x+1)^{(x-1)\cdot\cos\frac{\pi x}{2}} \Rightarrow L[f(x)] = \left[(x-1)\cdot\cos\frac{\pi x}{2}\right]\cdot L(x+1).$$

Derivando:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \left[1\cdot\cos\frac{\pi x}{2} - (x-1)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\right]L(x+1) + \left[(x-1)\cdot\cos\frac{\pi x}{2}\right]\cdot\frac{1}{x+1} =$$

$$= \left[\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi(x-1)}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\right]L(x+1) + \frac{x-1}{x+1}\cdot\cos\frac{\pi x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = (x+1)^{(x-1)\cdot\cos\frac{\pi x}{2}}\cdot\left\{\left[\cos\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi(x-1)}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}\right]L(x+1) + \frac{x-1}{x+1}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}\right\}.$$

$$f'(0) = 1^{-1\cdot 1}\cdot\left\{\left[1+\frac{\pi}{2}\cdot 0\right]\cdot 0 - 1\right\} = -1.$$

$$f'(1) = 2^{0\cdot 0}\cdot\{[0 - 0\cdot 1]L2 + 0\cdot 0\} = 2\cdot 0 = 0.$$

En el intervalo $(0,1) \in (0,2)$ le es aplicable a $f'(x)$ el teorema de los Valores Intermedios o propiedad de Darboux que dice: “si una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a,b]$ y un número k está comprendido entre los valores extremos de la función, o sea, $f(a) \le k \le f(b)$ o $f(a) \ge k \ge f(b)$, entonces existe un valor $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = k$”.

Como quiera que es $f'(0) = -1 < -\frac{1}{3} < f'(1) = 0$:

$$\underline{\exists a \in (0,2)\ tal\ que\ f'(a) = -\frac{1}{3}, como\ ten\acute{\imath}amos\ que\ demostrar.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Encuentra la matriz X que verifica $7A - A^7 = B \cdot B^t \cdot X$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$7A - A^7 = B \cdot B^t \cdot X;\ \ 7A - A^7 = M \cdot X;\ \ M^{-1} \cdot (7A - A^7) = M^{-1} \cdot M \cdot X;$$

$$M^{-1} \cdot (7A - A^7) = I \cdot X \ \Rightarrow \ \underline{X = M^{-1} \cdot (7A - A^7)}.$$

$$M = B \cdot B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 4 = 6. \quad M^t = M = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}. \qquad Adj.\,de\ M^t = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} = \frac{Adj.de\ M^t}{|M|} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

....

$$A^7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}. \qquad 7A - A^7 = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -7 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I.$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de X:

$$X = M^{-1} \cdot (7A - A^7) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot 6I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) A, B y C son los puntos de corte del plano $\pi \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0$ con los ejes coordenados. Encuentra el punto D de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-3}{-1}$ tal que A, B, C y D son vértices de un paralelepípedo de volumen 6 u^3.

$$Eje\ X \Rightarrow s_1 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}. \quad Eje\ Y \Rightarrow s_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}. \quad Eje\ Z \Rightarrow s_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Corte con el eje X: $\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0 \\ s_1 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow A(1, 0, 0).$

Corte con el eje Y: $\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0 \\ s_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(0, 2, 0).$

Corte con el eje Z: $\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 4x + 2y + z - 4 = 0 \\ s_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow z = 4 \Rightarrow C(0, 0, 4).$

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3 \\ z = 3 - \lambda \end{cases}.$

El punto D tiene por expresión general: $D(1 + \lambda, 3, 3 - \lambda)$.

Los puntos A, B, C y D determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0, 2, 0) - (1, 0, 0)] = (-1, 2, 0).$

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0, 0, 4) - (1, 0, 0)] = (-1, 0, 4).$

$\overrightarrow{AD} = [D - A] = [(1 + \lambda, 3, 3 - \lambda) - (1, 0, 0)] = (\lambda, 3, 3 - \lambda).$

Sabiendo que el volumen de un paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores que lo determinan:

$$V_{ABCD} = \left\| \begin{matrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \\ \lambda & 3 & 3 - \lambda \end{matrix} \right\| = 6; \;\; |8\lambda + 12 + 2(3 - \lambda)| = 6;$$

$|4\lambda + 6 + 3 - \lambda| = 3; \; |3\lambda + 9| = 3 \Rightarrow |\lambda + 3| = 1 \Rightarrow \lambda + 3 = \pm 1 \Rightarrow.$

$\Rightarrow \lambda_1 = -4 \Rightarrow \underline{D_1(-3, 3, 7)}; \;\; \lambda_2 = -2 \Rightarrow \underline{D_2(-1, 3, 5)}.$

****

3º) Demuestra que existe $\alpha \in (0,1)$ tal que $f'(\alpha) = 3$ siendo la función primitiva $f(x) = (x+1)^{(x+1)}$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

La función $f(x) = (x+1)^{(x+1)}$ es continua y derivable en $(0,1)$.

$f(0) = (0+1)^{(0+1)} = 1$

$f(1) = (1+1)^{(1+1)} = 2^2 = 4.$

$L[f(x)] = L(x+1)^{(x+1)} = (x+1) \cdot L(x+1).$

Derivando:

$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \cdot L(x+1) + (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} = 1 + L(x+1).$

$f'(x) = (x+1)^{(x+1)} \cdot [1 + L(x+1)].$

$f'(0) = (0+1)^{(0+1)} \cdot [1 + L(0+1)] = 1 \cdot 1 = 1.$

$f'(1) = (1+1)^{(1+1)} \cdot [1 + L(2+1)] = 4 \cdot (1 + L3) \cong 8{,}39.$

Por ser $f'(0) \neq f'(1)$ no es posible la aplicación del teorema de Rolle, pero si es posible la aplicación del teorema de los Valores Intermedios o propiedad de Darboux que dice: "si una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a,b]$ y un número k está comprendido entre los valores extremos de la función, o sea, $f(a) \leq k \leq f(b)$ o $f(a) \geq k \geq f(b)$, entonces existe un valor $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = k$".

Como es $f'(0) < 3 < f'(1) \Rightarrow \exists a \in (0,1)\ tal\ que\ f'(a) = 3.$

$\underline{Lo\ anterior\ demuestra\ lo\ pedido.}$

****

4º) Dadas las funciones: $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}$ y $g(x) = x^3 - 4x$, encuentra los tres puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas.

Los tres puntos de corte son $A(-2, 0), O(0, 0)\ y\ B(2, 0)$.

Teniendo en cuenta que $f(-x) = -f(x)\ y\ g(-x) = -g(x)$, ambas funciones son simétricas con respecto al origen.

Considerando el valor $x = 1 \in (0, 2)$:

$f(1) = sen\ \frac{\pi}{2} = 1;\ \ g(1) = 1 - 4 = -3 \Rightarrow f(1) > g(1)$.

De lo expresado anteriormente se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^2 [f(x) - g(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 \left[\operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} - (x^3 - 4x)\right] \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \int_0^2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} \cdot dx - 2 \cdot \int_0^2 (x^3 - 4x) \cdot dx = 2M - 2N. \quad (*)$$

$$M = \int_0^2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \frac{\pi x}{2} = t \\ dx = \frac{2}{\pi} \cdot dt \end{array} \middle| \begin{array}{c} x = 2 \rightarrow t = \pi \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \int_0^\pi sen\ t \cdot \frac{2}{\pi} \cdot dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot [-cos\ t]_0^\pi = \frac{2}{\pi} \cdot [cos\ t]_\pi^0 = \frac{2}{\pi} \cdot (\cos 0 - \cos \pi) = \frac{2}{\pi} \cdot [1 - (-1)] = \frac{4}{\pi}.$$

$$N = \int_0^2 (x^3 - 4x) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_0^2 = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_0^2 = \left(\frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^2\right) - 0 =$$

$$= 4 - 8 = -4.$$

Sustituyendo los valores obtenidos de M y N en la expresión (*):

$$S = 2M - 2N = 2 \cdot \frac{4}{\pi} - 2 \cdot (-4) = \frac{8}{\pi} + 8 = \frac{8+8\pi}{\pi} = \frac{8(1+\pi)}{\pi}.$$

$$\underline{S = \frac{8(1+\pi)}{\pi}\ u^2 \cong 10{,}55\ u^2.}$$

****