

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDADES DE NAVARRA****JUNIO – 2015**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} ax - y = 0 \\ -2ax + a^2y + az = -2a \\ -ax + (a^2 - 1)y + (a + 1)z = -a - 2 \end{cases}$$
 dependiente del parámetro a y resuélvelo en los casos en que sea compatible.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ -2a & a^2 & a \\ -a & a^2 - 1 & a + 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 0 \\ -2a & a^2 & a & -2a \\ -a & a^2 - 1 & a + 1 & -a - 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ -2a & a^2 & a \\ -a & a^2 - 1 & a + 1 \end{vmatrix} = a^3(a + 1) + a^2 - a^2(a^2 - 1) - 2a(a + 1) = 0;$$

$$= a^4 + a^3 + a^2 - a^4 + a^2 - 2a^2 - 2a = a^3 - 2a = a(a^2 - 2) = 0 \Rightarrow a_1 = 0,$$

$$a_2 = -\sqrt{2}, a_3 = \sqrt{2}.$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq -\sqrt{2} \\ a \neq 0 \\ a \neq +\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Ran } M = \text{Ran } M' = 3 = n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow S.C.D.$$

$$\text{Para } a = 0 \text{ es } M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' = 2.$$

Para $a = 0 \Rightarrow \text{Ran } M = \text{Ran } M' = 2 < n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}$

$$\text{Para } a = -\sqrt{2} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} + 1 & \sqrt{2} - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 2 & 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} - 2 \end{vmatrix} = \sqrt{2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} - 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{2} \cdot (-2\sqrt{2} + 4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 4) \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

$$\text{Para } a = \sqrt{2} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ -2\sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} + 1 & -\sqrt{2} - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} + 1 & -\sqrt{2} - 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} + 1 & -\sqrt{2} - 2 \end{vmatrix} = \sqrt{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \sqrt{2} + 1 & \sqrt{2} + 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} - 2) \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

Para $a = -\sqrt{2}$ y $a = \sqrt{2} \Rightarrow \text{Ran } M = 2; \text{Ran } M' = 3 \Rightarrow \text{Incompatible.}$

Resolvemos en el caso de compatible determinado:

$$\left. \begin{array}{l} ax - y = 0 \\ -2ax + a^2y + az = -2a \\ -ax + (a^2 - 1)y + (a + 1)z = -a - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} ax - y = 0 \\ -2x + ay + z = -2 \\ -ax + (a^2 - 1)y + (a + 1)z = -a - 2 \end{array} \right\} \rightarrow y = ax \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} -2x + a^2x + z = -2 \\ -ax + a(a^2 - 1)x + (a + 1)z = -a - 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} (a^2 - 2)x + z = -2 \\ a(a^2 - 2)x + (a + 1)z = -a - 2 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} -a(a^2 - 2)x - az = 2a \\ a(a^2 - 2)x + (a + 1)z = -a - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow -az + (a + 1)z = a - 2 \Rightarrow z = a - 2.$$

$$(a^2 - 2)x + a - 2 = -2 \Rightarrow x = \frac{a}{2 - a^2}. \quad y = \frac{a^2}{2 - a^2}.$$

$$\underline{\text{Solución: } x = \frac{a}{2-a^2}, y = \frac{a^2}{2-a^2}, z = a - 2.}$$

Para $\alpha = 0$ es $M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

$$\underline{\text{Solución: } x = \lambda, y = 0, z = -2, \forall \lambda \in R.}$$

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta s que pasa por el punto $P(1, -2, 3)$ y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 3x + y - 3z - 2 = 0 \end{cases}$.

Un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$ y $\vec{n}_2 = (3, 1, -3)$.

$$\begin{aligned} \vec{v}_r' &= \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3i + 3j + k - 3k - i + 3j = \\ &= -4i + 6j - 2k \Rightarrow \vec{v}_r = (2, -3, 1). \end{aligned}$$

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv 2x - 3y + z + D = 0$.

El plano $\pi \in \beta$ que contiene al punto $P(1, -2, 3)$ es el que satisface su ecuación:

$$\begin{aligned} \left. \beta \equiv 2x - 3y + z + D = 0 \right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 3 + D = 0; 2 + 6 + 3 + D = 0 \Rightarrow \\ P(1, -2, 3) \\ \Rightarrow 11 + D = 0 \rightarrow D = -11 \Rightarrow \pi \equiv 2x - 3y + z - 11 = 0. \end{aligned}$$

El punto de intersección de la recta r y el plano π es la solución del sistema que forman:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} r &\equiv \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ 3x + y - 3z - 2 = 0 \end{cases} \\ \pi &\equiv 2x - 3y + z - 11 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 3x + y - 3z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} -2y - 6z = -10 \\ -5y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 3z = 5 \\ -15y - 3z = 9 \end{cases} \Rightarrow -14y = 14; \mathbf{y = -1}. \\ -1 + 3z = 5; 3z = 6; \mathbf{z = 2}. \quad x - 1 + 2 = 4; \mathbf{x = 3}. \end{aligned}$$

El punto de corte es $Q(3, -1, 2)$.

La recta pedida s es la que pasa por P y Q .

$$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(3, -1, 2) - (1, -2, 3)] = (2, 1, -1).$$

La expresión de s dada por unas ecuaciones paramétricas es: $s \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$.

3º) Halla las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^2-1}{x-2}$.

Verticales: Son de la forma $x = k$; son los valores que anulan el denominador.

Asíntota vertical: $x = 2$.

Horizontales: Son de la forma $y = k$; son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a $\pm \infty$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-1}{x-2} = \infty.$$

No tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx].$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2-1}{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-1}{x^2-2x} = 2.$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2-1}{x-2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-1-2x^2+4x}{x-2} = 4.$$

Asíntota oblicua: $y = 2x + 4$.

4º) Dadas las funciones $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} \cdot \cos \frac{\pi x}{2}$ y $g(x) = 4 - 4x^2$, encuentra los dos puntos en que se cortan. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas curvas.

La función $f(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} \cdot \cos \frac{\pi x}{2}$ puede expresarse de forma más sencilla de la forma: $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} (\pi x)$.

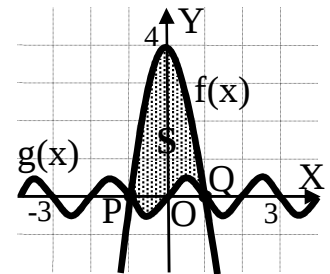
Las abscisas de los puntos de corte de las funciones son las soluciones reales de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen}(\pi x) = 4 - 4x^2; \operatorname{sen}(\pi x) = 8 - 8x^2.$$

Las únicas raíces reales de la ecuación obtenida son $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$.

Los puntos de corte son $P(-1, 0)$ y $Q(1, 0)$.

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la indicada en la figura adjunta.



En el intervalo correspondiente a la superficie a calcular, $(-1, 1)$, todas las ordenadas de la parábola son mayores que las correspondientes ordenadas de la función seno, por lo cual, la superficie S a calcular es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_{-1}^1 \left[(4 - 4x^2) - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} (\pi x) \right] \cdot dx = \\ &= \left[4x - \frac{4x^3}{3} + \frac{1}{2\pi} \cdot \cos(\pi x) \right]_{-1}^1 = \left(4 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2\pi} \cdot \cos \pi \right) - \left[-4 + \frac{4}{3} + \frac{1}{2\pi} \cdot \cos(-\pi) \right] = \\ &= 4 - \frac{4}{3} - \frac{1}{2\pi} + 4 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2\pi} = 8 - \frac{8}{3} = \underline{\underline{\frac{16}{3} u^2}}. \end{aligned}$$

Aclaración:

$$\int \operatorname{sen} (\pi x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \pi x = t \\ dx = \frac{dt}{\pi} \end{array} \right\} \Rightarrow \int \operatorname{sen} t \cdot \frac{dt}{\pi} = -\frac{1}{\pi} \cdot \cos t = -\frac{1}{\pi} \cdot \cos(\pi x).$$

OPCIÓN B

1º) Encuentra los valores de $t \in \mathbb{R}$ para los que el determinante de la matriz $A \cdot B$ vale

0, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 0 & 1+t & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2+t & -1 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 4 & 7 & t \end{pmatrix}$.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & t & 2 \\ 0 & 1+t & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2+t & -1 & 0 \\ 1 & t & 0 \\ 4 & 7 & t \end{vmatrix} =$$

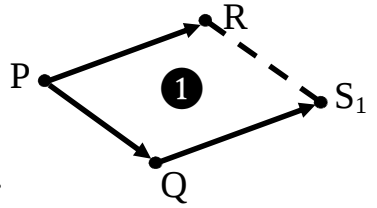
$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} t & 2 \\ 1+t & 3 \end{vmatrix} \cdot t \cdot \begin{vmatrix} 2+t & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = 2t \cdot [3t - 2 \cdot (1+t)] \cdot (2t + t^2 + 1) =$$

$$= 2t \cdot (3t - 2 - 2t) \cdot (t + 1)^2 = 2t \cdot (t - 2) \cdot (t + 1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 2 \\ t_3 = -1 \end{cases}.$$

$$\underline{|A \cdot B| = 0 \text{ para } t = 0, t = 2 \text{ y } t = -1.}$$

2º) Dados los puntos P (1, 2, -1), Q (2, -1, 1) y R (3, 1, 2), encuentra todos los posibles puntos S tales que P, Q, R y S son los vértices de un paralelogramo.

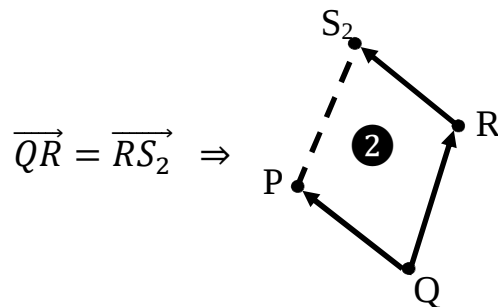
Los casos posibles son los siguientes: $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS_1} \Rightarrow$



$$\overrightarrow{PR} = [R - P] = [(3, 1, 2) - (1, 2, -1)] = (2, -1, 3).$$

$$\overrightarrow{QS_1} = [S_1 - Q] = [(x, y, z) - (2, -1, 1)] = (x - 2, y + 1, z - 1).$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 2 = 2 \rightarrow x = 4 \\ y + 1 = -1 \rightarrow y = -2 \\ z - 1 = 3 \rightarrow z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{S_1(4, -2, 4)}.$$

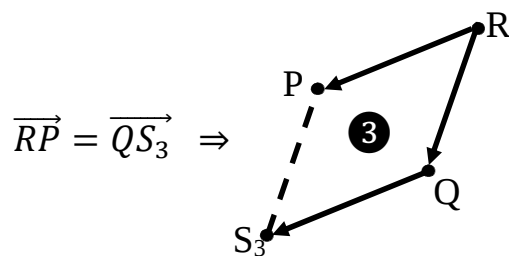


$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS_2} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{QR} = [R - Q] = [(3, 1, 2) - (2, -1, 1)] = (1, 2, 1).$$

$$\overrightarrow{PS_2} = [S_2 - P] = [(x, y, z) - (1, 2, -1)] = (x - 1, y - 2, z + 1).$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 1 = 1 \rightarrow x = 2 \\ y - 2 = 2 \rightarrow y = 4 \\ z + 1 = 1 \rightarrow z = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{S_2(2, 4, 0)}.$$



$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{QS_3} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{RP} = [P - R] = [(1, 2, -1) - (3, 1, 2)] = (-2, 1, -3).$$

$$\overrightarrow{QS_3} = [S_3 - Q] = [(x, y, z) - (2, -1, 1)] = (x - 2, y + 1, z - 1).$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 2 = -2 \rightarrow x = 0 \\ y + 1 = 1 \rightarrow y = 0 \\ z - 1 = -3 \rightarrow z = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{S_3(0, 0, -2)}.$$

3º) Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{5x^2 + 4x - 1} - \sqrt{5x^2 - 6x}).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3} \right)^{3x-1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{5x^2 + 4x - 1} - \sqrt{5x^2 - 6x}) = \infty - \infty \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{5x^2 + 4x - 1} - \sqrt{5x^2 - 6x}) \cdot (\sqrt{5x^2 + 4x - 1} + \sqrt{5x^2 - 6x})}{\sqrt{5x^2 + 4x - 1} + \sqrt{5x^2 - 6x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{5x^2 + 4x - 1})^2 - (\sqrt{5x^2 - 6x})^2}{\sqrt{5x^2 + 4x - 1} + \sqrt{5x^2 - 6x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 4x - 1 - (5x^2 - 6x)}{\sqrt{5x^2 + 4x - 1} + \sqrt{5x^2 - 6x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 4x - 1 - 5x^2 + 6x}{\sqrt{5x^2 + 4x - 1} + \sqrt{5x^2 - 6x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x - 1}{\sqrt{5x^2 + 4x - 1} + \sqrt{5x^2 - 6x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{10x-1}{x}}{\frac{\sqrt{5x^2 + 4x - 1}}{x} + \frac{\sqrt{5x^2 - 6x}}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{10x-1}{x}}{\sqrt{\frac{5x^2 + 4x - 1}{x^2}} + \sqrt{\frac{5x^2 - 6x}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10 - \frac{1}{x}}{\sqrt{5 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{5 - \frac{6}{x}}} = \frac{10 - \frac{1}{\infty}}{\sqrt{5 + \frac{4}{\infty} - \frac{1}{\infty}} + \sqrt{5 - \frac{6}{\infty}}} = \frac{10 - 0}{\sqrt{5 + 0 - 0} + \sqrt{5 - 0}} =$$

$$= \frac{10}{\sqrt{5} + \sqrt{5}} = \frac{10}{2\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 3} \right)^{3x-1} = 1^\infty \Rightarrow \text{Indet. tipo } n^\circ e \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 3 + 2x - 2}{x^2 + 3} \right)^{3x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2x-2}{x^2+3} \right)^{3x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2+3}{2x-2}} \right)^{3x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2+3}{2x-2}} \right)^{(3x-1) \cdot \frac{x^2+3}{2x-2} \cdot \frac{2x-2}{x^2+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2+3}{2x-2}} \right)^{\frac{x^2+3}{2x-2}} \right]^{(3x-1) \cdot \frac{2x-2}{x^2+3}} =$$

$$= \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2+3}{2x-2}} \right)^{\frac{x^2+3}{2x-2}} \right]^{\frac{6x^2-6x-2x+2}{x^2+3}} = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2+3}{2x-2}} \right)^{\frac{x^2+3}{2x-2}} \right]^{\frac{6x^2-8x+2}{x^2+3}} = \underline{\underline{e^6}}.$$

4º) Demuestra que existen $\alpha \in (-1, 1)$ y $\beta \in (-1, 1)$, $\alpha \neq \beta$, tales que $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$, siendo $f(x) = (x^3 + 1) \cdot e^{\sqrt[3]{3x+2}} \cdot \sqrt[3]{(x-1) \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}}$.

La función $f(x)$ es continua y derivable en su dominio, que es $\mathbb{R}$, por ser producto de tres funciones continuas y derivables en $\mathbb{R}$, por cual le es aplicable el teorema del valor medio o de Lagrange, que dice que: “Si una función es continua en $[m, n]$ y derivable en (m, n) , entonces existe al menos un valor $c \in (m, n)$ que cumple lo siguiente: $f'(c) = \frac{f(m)-f(n)}{m-n}$,”

Aplicando el teorema de Lagrange a la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, 0)$:

$$f(-1) = 0 \cdot e^{\sqrt[3]{-1}} \cdot \sqrt[3]{-2 \cdot \operatorname{sen} \frac{-\pi}{2}} = 0.$$

$$f(0) = (0 + 1) \cdot e^{\sqrt[3]{0+2}} \cdot \sqrt[3]{(0-1) \cdot \operatorname{sen} 0} = 0.$$

$$f'(a) = \frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)} = \frac{0-0}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Lo anterior prueba que $\exists a \in (-1, 0)$ tal que $f'(a) = 0$.

Aplicando el teorema de Lagrange a la función $f(x)$ en el intervalo $(0, 1)$:

$$f(1) = (1 + 1) \cdot e^{\sqrt[3]{3+2}} \cdot \sqrt[3]{0 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = 0.$$

$$f'(b) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{0-0}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Lo anterior prueba que $\exists b \in (0, 1)$ tal que $f'(b) = 0$.

Existen $\alpha \in (-1, 1)$ y $\beta \in (-1, 1)$, $\alpha \neq \beta$, tales que $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$, c. q. d.
