PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

SEPTIEMBRE – 2013 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realizar una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real α y resuélvelo en los casos en que es compatible: $\begin{cases} (a^2+a)x+2y+z=2 \\ (a^2+a)x+(a^2-a)y=4 \\ (a^2-a-2)y+(a^2-2a-1)z=2 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguiente:

$$M=\begin{pmatrix} a^2+a & 2 & 1 \\ a^2+a & a^2-a & 0 \\ 0 & a^2-a-2 & a^2-2a-1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} a^2+a & 2 & 1 & 2 \\ a^2+a & a^2-a & 0 & 4 \\ 0 & a^2-a-2 & a^2-2a-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a^2+a & 2 & 1 \\ a^2+a & a^2-a & 0 \\ 0 & a^2-a-2 & a^2-2a-1 \end{vmatrix} \Rightarrow \{F_2-F_1\} \Rightarrow \begin{vmatrix} a^2+a & 2 & 1 \\ 0 & a^2-a-2 & -1 \\ 0 & a^2-a-2 & a^2-2a-1 \end{vmatrix}=$$

$$=(a^2+a)\cdot\begin{vmatrix} a^2-a-2 & -1 \\ a^2-a-2 & a^2-2a-1 \end{vmatrix}=(a^2+a)\cdot(a^2-a-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & a^2-2a-1 \end{vmatrix}=$$

$$=(a^2+a)(a^2-a-2)(a^2-2a-1+1)=(a^2+a)(a^2-a-2)(a^2-2a)=a^2(a+1)(a-2)(a^2-a-2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a^2-a-2=0\ ;;\ a=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\ \Rightarrow\ a=-1\ y\ a=2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a^2(a+1)(a-2)(a^2-a-2)=0\ \Rightarrow\ a^2(a+1)^2(a-2)^2=0\ ;;\ [a(a+1)(a-2)]^2=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a(a+1)(a-2)=0\ \Rightarrow\ \underline{a_1=0}\ ;;\ \underline{a_2=-1}\ ;;\ \underline{a_3=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \left\{\begin{matrix} a\neq -1 \\ a\neq 0 \\ a\neq 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 3 = n^{o}\ incóg. \Rightarrow Sistema\ compatible\ \det er \min ado.}}$$

Para α = 0 es $M=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\ M=1}$

Para α = 0 es $M'=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, cuyo rango es equivalente al rango de la matriz

$$M''=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{Rango\ M=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=0 \Rightarrow Rango\ M=1\ ;;\ Rango\ M'=2 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}}$$

Para α = -1 es $M'=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, cuyo rango es equivalente al rango de la matriz

$$M'''=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8-16-4=-12\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ M=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=-1 \Rightarrow Rango\ M=2\ ;;\ Rango\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}}$$

Para α = 2 es $M'=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ M' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 24-24=0 \\ \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -12+24-12=0 \\ \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4+8-4=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{Rango\ M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=2\ \Rightarrow\ Rango\ M=Rango\ M'=2<n^{o}\ incóg.\Rightarrow\ Sistema\ compatible\ indeterminado.}}$$

Resolvemos, en primer lugar, el caso de compatible determinado, que es cuando el valor de α es distinto de las raíces encontradas: -1, 0 y 2.

Se procede por el método de Gauss:

$$M'=\begin{pmatrix} a^2+a & 2 & 1 & 2 \\ a^2+a & a^2-a & 0 & 4 \\ 0 & a^2-a-2 & a^2-2a-1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2-F_1\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+a & 2 & 1 & 2 \\ 0 & a^2-a-2 & -1 & 2 \\ 0 & a^2-a-2 & a^2-2a-1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3-F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+a & 2 & 1 & 2 \\ 0 & a^2-a-2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-2a & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{z=0}}\ ;;\ \underline{\underline{y=\frac{2}{a^2-a-2}}}\ ;;\ x=\frac{2-2y}{a^2+a}=$$

$$=\frac{2-2\cdot\frac{2}{a^2-a-2}}{a^2+a}=\frac{2\cdot\left(a^2-a-2\right)-4}{\left(a^2+a\right)\left(a^2-a-2\right)}=\frac{2a^2-2a-4-4}{\left(a^2+a\right)\left(a^2-a-2\right)}=\frac{2a^2-2a-8}{\left(a^2+a\right)\left(a^2-a-2\right)}=\frac{2\left(a^2-a-4\right)}{\left(a^2+a\right)\left(a^2-a-2\right)}=$$

$$=\frac{2\left(a^2-a-4\right)}{a(a+1)(a+1)(a-2)}=\underline{\underline{\frac{2\left(a^2-a-4\right)}{a(a+1)^2(a-2)}}}=x.$$

Resolvemos ahora en el caso de compatible indeterminado:

Para α = 2 es $\begin{cases} 6x+2y+z=2 \\ 6x+2y=4 \\ 0y-z=2 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=-2} \Rightarrow \begin{cases} 6x+2y-2=2 \\ 6x+2y=4 \end{cases}\ ;;\ \begin{cases} 6x+2y=4 \\ 6x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ 6x+2y=4\ ;;\ 3x+y=2\ \Rightarrow\ \underline{x=\lambda}\ \Rightarrow\ \underline{y=2-3\lambda}.$$

$$\underline{\underline{Solución:\ \begin{cases} x=\lambda \\ y=2-3\lambda,\ \forall\lambda\in R \\ z=-2 \end{cases}}}$$

****

2º) Encuentra el punto R que pertenece a la recta $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+3}{2}$ y equidista de los puntos P(-1, 1, 2) y Q(1, 3, 6).

Los puntos P y Q determinan el vector:

$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,\ 3,\ 6) - (-1,\ 1,\ 2) = (2,\ 2,\ 4)$.

El punto medio de P y Q es M(0, 2, 4), cuyas coordenadas son las medias aritméticas de las coordenadas de los puntos P y Q.

El haz de planos paralelos β perpendiculares al segmento que determinan los puntos P y Q tiene como expresión general: $\beta \equiv x + y + 2z + D = 0$, por tener como vector normal al vector $\overrightarrow{v'} = (1,\ 1,\ 2)$, que es linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{v} = (2,\ 2,\ 4)$.

De los infinitos plano de haz β, el plano α que contiene al punto M es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv x + y + 2z + D = 0 \\ M(0,\ 2,\ 4) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 + 2 + 2 \cdot 4 + D = 0 \ ;;\ 2 + 8 + D = 0 \ ;;\ D = -10 \Rightarrow \underline{\alpha \equiv x + y + 2z - 10 = 0}.$$

El punto R pedido es la intersección del plano α y la recta r:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+3}{2} \\ \alpha \equiv x + y + 2z - 10 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -x - 1 = 2y - 6 \\ x + 1 = z + 3 \\ x + y + 2z = 10 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + 2y = 5 \\ x - z = 2 \\ x + y + 2z = 10 \end{array}\right\} \rightarrow x = 5 - 2y \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} 5 - 2y - z = 2 \\ 5 - 2y + y + 2z = 10 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} -2y - z = -3 \\ -y + 2z = 5 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -4y - 2z = -6 \\ -y + 2z = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow -5y = -1 \ ;;\ \underline{y = \frac{1}{5}} \ ;;\ z = 3 - 2y = 3 - \frac{2}{5} = \underline{\frac{13}{5} = z} \ ;;\ x = 5 - 2y =$$

$$= 5 - \frac{2}{5} = \underline{\frac{23}{5} = x}.$$

$$\underline{\underline{R\left(\frac{23}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{13}{5}\right)}}$$

De otra forma:

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -3 + 2\lambda \end{cases}$. Un punto genérico de r es $R(-1 + 2\lambda,\ 3 - \lambda,\ -3 + 2\lambda)$.

Tiene que cumplirse que $\overline{PR} = \overline{QR}$.

$$\overline{PR}=\sqrt{(-1+2\lambda+1)^2+(3-\lambda-1)^2+(-3+2\lambda-2)^2}=\sqrt{(2\lambda)^2+(2-\lambda)^2+(2\lambda-5)^2}=$$

$$=\underline{\sqrt{4\lambda^2+4-4\lambda+\lambda^2+4\lambda^2-20\lambda+25}}.$$

$$\overline{QR}=\sqrt{(-1+2\lambda-1)^2+(3-\lambda-3)^2+(-3+2\lambda-6)^2}=\sqrt{(2\lambda-2)^2+(-\lambda)^2+(2\lambda-9)^2}=$$

$$=\underline{\sqrt{4\lambda^2-8\lambda+4+\lambda^2+4\lambda^2-36\lambda+81}}.$$

$$\overline{PR}=\overline{QR}\ \Rightarrow\ \sqrt{4\lambda^2+4-4\lambda+\lambda^2+4\lambda^2-20\lambda+25}=\sqrt{4\lambda^2-8\lambda+4+\lambda^2+4\lambda^2-36\lambda+81}\ ;;$$

$$4\lambda^2+4-4\lambda+\lambda^2+4\lambda^2-20\lambda+25=4\lambda^2-8\lambda+4+\lambda^2+4\lambda^2-36\lambda+81\ ;;\ 29-24\lambda=85-44\lambda\ ;;$$

$$20\lambda=56\ ;;\ 5\lambda=14\ \rightarrow\ \underline{\lambda=\frac{14}{5}}.$$

$$r\equiv\begin{cases}x=-1+2\lambda=-1+\frac{28}{5}=\frac{23}{5}\\ y=3-\lambda=3-\frac{14}{5}=\frac{1}{5}\\ z=-3+2\lambda=-3+\frac{28}{5}=\frac{13}{5}\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{R\left(\frac{23}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{13}{5}\right)}}.$$

****

3º) Halla el valor de $\alpha \in R$ para que la función $f(x)=\begin{cases} \sqrt{e^{3-x}} & si\ \ x \le 0 \\ (1+x)^{1+\frac{a}{x}} & si\ \ x>0 \end{cases}$ sea continua en todo R.

La función f(x) es continua en todo R para cualquier valor de $\alpha \in R$, excepto para el valor x = 0 cuya continuidad es dudosa y vamos a determinar el valor de α para que lo sea.

Para que la función f(x) sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \sqrt{e^{3-x}} = \underline{\sqrt{e^3}} = f(0) \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{1+\frac{a}{x}} = \underline{\sqrt{e^3}}\ \ (*) \end{array}\right\}.$$

Para que f(x) sea continua en x = 0 tiene que ser $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{1+\frac{a}{x}} = \sqrt{e^3} = e^{\frac{3}{2}}$, lo que significa que el límite tiene que ser del tipo nº e.

$$(*)\quad \lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{1+\frac{a}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{x+a}{x}} = 1^{\frac{a}{0}} = 1^{\infty} \Rightarrow \underline{a>0}.$$

$$\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{1+\frac{a}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{a+x}{x}} = 1^{\infty} \Rightarrow Ind.\ n^{o}\ e \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \left(1+\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}\cdot\frac{a+x}{x}\cdot x} =$$

$$= \left[\lim\limits_{x \to 0} \left(1+\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}}\right]^{a+x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(a+x)} = e^{a} = e^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \underline{\underline{a=\frac{3}{2}}}.$$

****

4º) Dada la función $f(x)=sen\,(x\cdot\cos x)$, demuestra que existe un valor $\alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f'(\alpha)=-1$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

El teorema del valor intermedio para la derivada, conocido como la propiedad de Darboux dice:

"Si f es una función continua y derivable en [m, n] y se cumple que $f'(m)>f'(n)$, y sea $z\in[f'(m),\ f'(n)]$, existe al menos un punto $\alpha\in(m,\ n)$ tal que $f'(\alpha)=z$".

La función $f(x)=sen\,(x\cdot\cos x)$ es continua y derivable en $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, por lo que le es aplicable el teorema del valor intermedio para la derivada.

$$f'(x)=(1\cdot\cos\ x-x\cdot sen\ x)\cdot\cos\ (x\cdot\cos\ x)=(\cos\ x-x\cdot sen\ x)\cdot\cos\ (x\cdot\cos\ x).$$

$$f'(0)=(\cos 0-0\cdot sen\ 0)\cdot\cos\ (0\cdot\cos 0)=(1-0)\cdot\cos 0=1\cdot 1=\underline{1}$$

$$f'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\left(\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot sen\,\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2}\right)=\left(0-\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right)=-\frac{\pi}{2}\cdot 1=\underline{-\frac{\pi}{2}}.$$

Se cumple que $f'(0)>f'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)$ y también que $f'(0)>f'(\alpha)>f'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)$, por lo que podemos asegurar que:

$$\underline{\underline{\exists\alpha\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)\ tal\ \ que\ \ f'(\alpha)=-1}}$$

(como teníamos que demostrar)

.

****

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ encuentra todas las matrices B que cumplen $A \cdot B = B \cdot A$.

Sea la matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

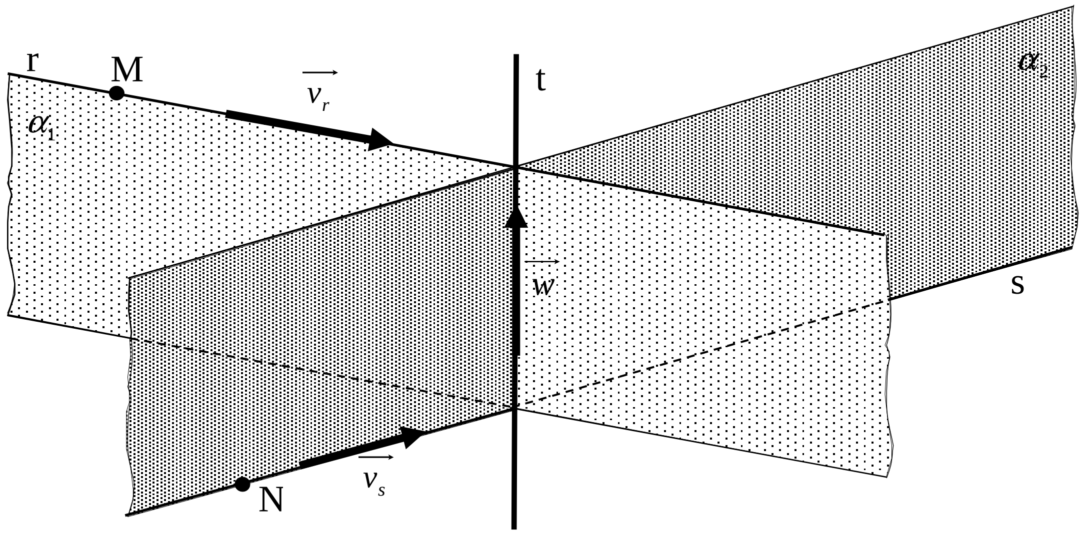
$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ;; \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -a+b \\ c+d & -c+d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a-c = a+b \\ a+c = c+d \\ b-d = -a+b \\ b+d = -c+d \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = -c \\ a = d \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ \forall a,\ b \in R}}.$$

****

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x+y+z+2=0 \\ 3x+y+2z+1=0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{2}$.

Para determinar la recta t, perpendicular común a las rectas dadas, nos guiamos por el siguiente gráfico.



Para determinar un punto y un vector de la recta r se expresa por unas ecuaciones paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} 2x+y+z+2=0 \\ 3x+y+2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x+y=-2-\lambda \\ 3x+y=-1-2\lambda \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -2x-y=2+\lambda \\ 3x+y=-1-2\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{x=1-\lambda} \;;;$$

$$2x+y=-2-\lambda \;;;\; y=-2-\lambda-2x=-2-\lambda-2+2\lambda=\underline{-4+\lambda=y} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=-4+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}.$$

Un punto y un vector director de r son $M(1,\ -4,\ 0)$, $\overrightarrow{v_r}=(-1,\ 1,\ 1)$ y un punto y un vector director de s son N(-3, 0, -3) y $\overrightarrow{v_s}=(1,\ 1,\ 2)$.

Un vector $\overrightarrow{w}$, perpendicular a $\overrightarrow{v_r}\ y\ \overrightarrow{v_s}$ es cualquiera que sea linealmente dependiente de su producto vectorial:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2i+j-k-k-i+2j=i+3j-2k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{w}=(1,\ 3,\ -2)}.$$

Ahora determinamos los planos $\alpha_1\ y\ \alpha_2$, de la forma siguiente:

$$\alpha_1\left(M;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{w}\right)\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y+4 & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=0\ ;;\ -2(x-1)+(y+4)-3z-z-3(x-1)-2(y+4)=0\ ;;$$

$$-5(x-1)-(y+4)-4z=0\ ;;\ 5x-5+y+4+4z=0\ \Rightarrow\ \underline{\alpha_1\equiv 5x+y+4z-1=0}.$$

$$\alpha_2\left(N;\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right)\equiv\begin{vmatrix} x+3 & y & z+3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=0\ ;;\ -2(x+3)+2y+3(z+3)-(z+3)-6(x+3)+2y=0\ ;;$$

$$-8(x+3)+4y+2(z+3)=0\ ;;\ 4(x+3)-2y-(z+3)=0\ ;;\ 4x+12-2y-z-3=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{\alpha_2\equiv 4x-2y-z+9=0}.$$

La recta t pedida es la que determinan los planos α_1 y α_2 en su intersección, que es la siguiente: $\underline{t\equiv\begin{cases}5x+y+4z-1=0\\4x-2y-z+9=0\end{cases}}$. A continuación se expresa mediante unas ecuaciones continuas:

$$t\equiv\begin{cases}5x+y+4z-1=0\\4x-2y-z+9=0\end{cases}\Rightarrow\ \underline{z=\lambda}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}5x+y=1-4\lambda\\4x-2y=-9+\lambda\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}10x+2y=2-8\lambda\\4x-2y=-9+\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow 14x=-7-7\lambda\ ;;$$

$$\underline{x=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda}\ ;;\ y=1-4\lambda-5x=1-4\lambda+\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\lambda=\underline{\frac{7}{2}-\frac{3}{2}\lambda=y}\ \Rightarrow\ t\equiv\frac{x+\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=\frac{y-\frac{7}{2}}{-\frac{3}{2}}=\frac{z}{1}\ \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{t\equiv\frac{2x+1}{-1}=\frac{2y-7}{-3}=\frac{z}{1}}}$$

****

3º) Halle el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)=\frac{\pi}{2}x+sen\,(\pi x)$ en el intervalo $\left[0,\ \frac{3}{2}\right]$.

$$f(0)=\frac{\pi}{2}\cdot 0+sen\,(\pi\cdot 0)=0+sen\,0=\underline{0}.$$

$$f\left(\tfrac{3}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{2}+sen\,\frac{3\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}-1=\underline{\frac{3\pi-4}{4}\cong 1'36}.$$

Una función tienen un máximo o un mínimo relativo para los valores que anulan su primera derivada:

$f'(x)=\frac{\pi}{2}+\pi\cdot\cos\,(\pi x)=0$;; $\frac{1}{2}+\cos\,(\pi x)=0$;; $\cos\,(\pi x)=-\frac{1}{2}\Rightarrow x\in\left[0,\ \frac{3}{2}\right]\Rightarrow$ Existen dos ángulos que cumplen la condición: 120º y 240º, que expresados en radianes son, respectivamente, $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$. Soluciones: $\underline{x_1=\frac{2}{3}}$ y $\underline{x_2=\frac{4}{3}}$.

Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x)=-\pi^2\cdot sen\,(\pi x).\qquad f''\left(\tfrac{2}{3}\right)=-\pi^2\cdot sen\,\left(\tfrac{2\pi}{3}\right)=-\pi^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}<0\Rightarrow \underline{Máx.\ para\ x=\frac{2}{3}}$$

$$f\left(\tfrac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{3}+sen\,\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\underline{\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}\cong 1'91}.$$

El máximo absoluto pedido es: $\underline{\underline{Máx.\ absoluto:\ P\left(\frac{2}{3},\ \frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}\right)}}$.

$$f''\left(\tfrac{4}{3}\right)=-\pi^2\cdot sen\,\left(\tfrac{4\pi}{3}\right)=-\pi^2\cdot\frac{-\sqrt{3}}{2}>0\Rightarrow \underline{Mín.\ para\ x=\frac{4}{3}}.$$

$$f\left(\tfrac{4}{3}\right)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{4}{3}+sen\,\frac{4\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\underline{\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{6}\cong 1'23}.$$

El mínimo absoluto pedido es: $\underline{\underline{Mín.\ absoluto:\ Q\left(\frac{4}{3},\ \frac{4\pi-3\sqrt{3}}{6}\right)}}$

****

4º) Dadas las funciones $f(x)=1+ex-x^2$ y $g(x)=e^x$, encuentra los dos puntos en que se cortan y calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de f(x) y g(x).

Los puntos de corte de dos funciones se obtienen de la resolución de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow 1+ex-x^2=e^x \;;;\; 1-x^2+ex-e^x=0 \Rightarrow \underline{x_1=0} \;;;\; \underline{x_2=1}.$$

Los puntos de corte son: $f(0)=1 \; y \; f(1)=e \Rightarrow \underline{A(0,\ 1)} \; y \; \underline{B(1,\ e)}$.

Teniendo en cuenta que $f'(x)=e-2x>0,\ \forall x \in (0,\ 1)$, f(x) es creciente en el intervalo (0, 1) y, además, todas sus ordenadas son positivas en este intervalo.

Siendo $g'(x)=e^x>0,\ \forall x \in R$, $g(x)=e^x$ es monótona creciente en su dominio, que es el conjunto de los números reales; también sus ordenadas son todas positivas en el intervalo (0, 1).

Tomando un valor intermedio del intervalo (0, 1), por ejemplo $\frac{1}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{e}{2}-\frac{1}{4}=\frac{4+2e-1}{4}=\frac{3+2e}{4}\cong \underline{1'93} \\ \\ g\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}\cong \underline{1'65} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{f\left(\frac{1}{2}\right)>g\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

El área pedida es la siguiente:

$$S=\int_0^1 [f(x)-g(x)]\cdot dx=\int_0^1 \left(1+ex-x^2-e^x\right)\cdot dx=\left[x+\frac{ex^2}{2}-\frac{x^3}{3}-e^x\right]_0^1=\left(1+\frac{e}{2}-\frac{1}{3}-e\right)-(-1)=$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{e}{2}+1=\frac{4-3e+6}{6}=\underline{\underline{\frac{10-3e}{6}\,u^2\cong 0'31\,u^2=S}}.$$

****