

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE NAVARRA****JUNIO – 2012 (GENERAL)**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Realizar una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real α y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a^2 + a - 2)x - 2ay + az = -1 \\ (a^2 + a - 2)x + a^2y + (a+1)z = 0 \\ (a^2 + a - 2)x - 2ay + a^2z = 3a - 1 \end{cases}$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} a^2 + a - 2 & -2a & a \\ a^2 + a - 2 & a^2 & a+1 \\ a^2 + a - 2 & -2a & a^2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a^2 + a - 2 & -2a & a & -1 \\ a^2 + a - 2 & a^2 & a+1 & 0 \\ a^2 + a - 2 & -2a & a^2 & 3a-1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$\begin{aligned} |M| &= \begin{vmatrix} a^2 + a - 2 & -2a & a \\ a^2 + a - 2 & a^2 & a+1 \\ a^2 + a - 2 & -2a & a^2 \end{vmatrix} = a(a^2 + a - 2) \begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & a & a+1 \\ 1 & -2 & a^2 \end{vmatrix} = a(a+2)(a-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & a \\ 1 & a & a+1 \\ 1 & -2 & a^2 \end{vmatrix} = \\ &= a(a+2)(a-1)[a^3 - 2a - 2(a+1) - a^2 + 2(a+1) + 2a^2] = a(a+2)(a-1)[a^3 + a^2 - 2a] = \\ &= a^2(a+2)(a-1)(a^2 + a - 2) = [a(a+2)(a-1)]^2 = 0 \Rightarrow \underline{a_1 = 0} \;; \; \underline{a_2 = -2} \;; \; \underline{a_3 = 1}. \end{aligned}$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -2 \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible determinado}$$

$$\text{Para } a=0 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2}.$$

Para $a=0 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible indeterminado}$

$$\text{Para } a=-2 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M = 2}.$$

$$\text{Veamos cual es el rango de } M': \begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 28 - 16 - 4 - 56 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}.$$

$$\text{Para } a=1 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M = 2}.$$

$$\text{Veamos cual es el rango de } M': \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -8 - 1 - 4 - 2 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}.$$

$$\text{Para } \begin{cases} a=-2 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = 2 \text{ ;; Rango } M' = 3 \Rightarrow \underline{\text{Incompatible}}$$

Resolvemos en el caso de compatible determinado aplicando el método de Gauss.

$$\left. \begin{aligned} (a^2 + a - 2)x - 2ay + az &= -1 \\ (a^2 + a - 2)x + a^2y + (a+1)z &= 0 \\ (a^2 + a - 2)x - 2ay + a^2z &= 3a - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Restando a cada fila la primera:}$$

$$\left. \begin{aligned} (a^2 + a - 2)x - 2ay + az &= -1 \\ (a^2 + 2a)y + z &= 1 \\ (a^2 - a)z &= 3a \end{aligned} \right\} \Rightarrow z = \frac{3a}{a^2 - a} = \frac{3}{a-1} = z. \quad (a^2 + 2a)y + z = 1 \text{ ;;}$$

$$a(a+2)y + \frac{3}{a-1} = 1 \text{ ;; } a(a+2)y = 1 - \frac{3}{a-1} = \frac{a-1-3}{a-1} = \frac{a-4}{a-1} \text{ ;; } y = \frac{a-4}{a(a+2)(a-1)}.$$

$$(a^2 + a - 2)x - 2ay + az = -1 \text{ ;; } (a^2 + a - 2)x - 2a \cdot \frac{a-4}{a(a+2)(a-1)} + a \cdot \frac{3}{a-1} = -1 \text{ ;;}$$

$$(a+2)(a-1)x - \frac{2a-8}{(a+2)(a-1)} + \frac{3a}{a-1} = -1 \;; \; (a+2)(a-1)x = \frac{2a-8}{(a+2)(a-1)} - \frac{3a}{a-1} - 1 =$$

$$(a+2)(a-1)x = \frac{2a-8-3a(a+2)-(a+2)(a-1)}{(a+2)(a-1)} = \frac{2a-8-3a^2-6a-(a^2+a-2)}{(a+2)(a-1)} = \frac{-4a^2-5a-6}{(a+2)(a-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \underline{\underline{\frac{-(4a^2+5a+6)}{(a+2)^2(a-1)^2}}}.$$

Resolvemos ahora en el caso de compatible indeterminado, para $\alpha = 0$, en cuyo caso el sistema resulta $\begin{cases} -2x = -1 \\ -2x + z = 0 \\ -2x = -1 \end{cases}$, equivalente al sistema $\begin{cases} 2x = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$, cuyas soluciones son las siguientes:

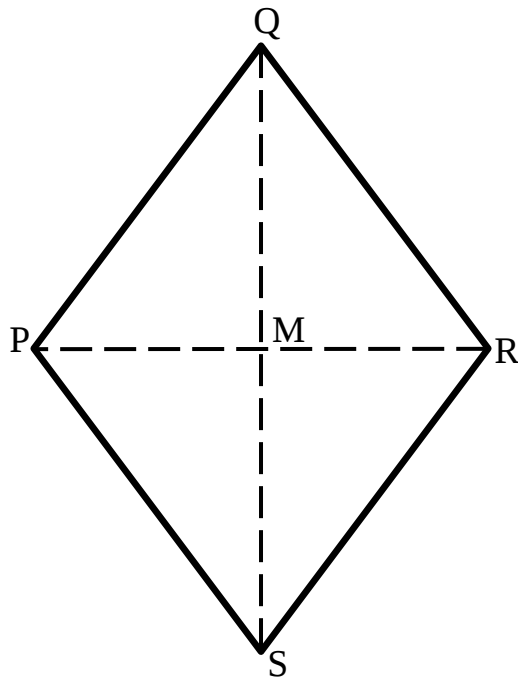
$$\text{Solución: } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \lambda, \forall \lambda \in R \\ z = 1 \end{cases}$$

2º) Los puntos P(0, -1, 3), Q(3, 0, 1) y R(2, 3, 3) son tres vértices de un rombo. Encuentra el cuarto vértice.

$$\overline{PQ} = \sqrt{(3-0)^2 + (0+1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14} = \overline{PQ}.$$

$$\overline{PR} = \sqrt{(2-0)^2 + (3+1)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{4+16+0} = \sqrt{20} = \overline{PR}.$$

$$\overline{QR} = \sqrt{(2-3)^2 + (3-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14} = \overline{QR}.$$



$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S(-1, 2, 5)}}.$$

El punto S puede obtenerse de diversas formas; una de ellas es tener en cuenta que el punto M es el punto medio de los segmentos $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$.

$$M \Rightarrow \frac{P+R}{2} \Rightarrow \frac{(0, -1, 3) + (2, 3, 3)}{2} \Rightarrow \underline{M(1, 1, 3)}.$$

$$\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{MS} \Rightarrow M - Q = S - M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1, 1, 3) - (3, 0, 1) = (x, y, z) - (1, 1, 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2, 1, 2) = (x-1, y-1, z-3) \Rightarrow \begin{cases} x-1 = -2 \\ y-1 = 1 \\ z-3 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

Otra forma de obtener S es teniendo en cuenta que $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS}$:

$$R - Q = S - P \Rightarrow (2, 3, 3) - (3, 0, 1) = (x, y, z) - (0, -1, 3) ; ; (-1, 3, 2) = (x, y+1, z-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y+1 = 3 \\ z-3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S(-1, 2, 5)}}.$$

3º) Calcula las siguientes integrales definidas $I_1 = \int (2x+1) \cdot e^{-x} \cdot dx$ e $I_2 = \int \frac{-4 \cdot dx}{x^2 + 2x - 3}$.

$$I_1 = \int (2x+1) \cdot e^{-x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = 2x+1 \rightarrow du = 2 dx \\ e^{-x} \cdot dx = dv \rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = (2x+1) \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} \cdot 2 dx = -(2x+1) \cdot e^{-x} + 2 \int e^{-x} \cdot dx = -(2x+1) \cdot e^{-x} - 2e^{-x} =$$

$$= -(2x+1+2) \cdot e^{-x} + C = \underline{\underline{-(2x+3) \cdot e^{-x} + C = I_1}}.$$

$$I_2 = \int \frac{-4 \cdot dx}{x^2 + 2x - 3}.$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \quad ; \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{array} \right. \Rightarrow \underline{x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)}.$$

$$I_2 = \int \frac{-4}{x^2 + 2x - 3} \cdot dx = \int \frac{-4}{(x-1)(x+3)} \cdot dx \Rightarrow \frac{-4}{x^2 + 2x - 3} = \frac{-4}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} =$$

$$= \frac{Ax + 3A + Bx - B}{(x-1)(x+3)} = \frac{(A+B)x + (3A-B)}{x^2 + 2x - 3} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A+B=0 \\ 3A-B=-4 \end{array} \right\} \Rightarrow 4A = -4 \quad ; \quad \underline{A = -1} \quad ; \quad \underline{B = 1}.$$

$$I_2 = \int \left(\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x+3} \right) \cdot dx = -L|x-1| + L|x+3| + C = \underline{\underline{L \left| \frac{x+3}{x-1} \right| + C = I_2}}.$$

4º) Dada la función $f(x) = \frac{2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi x^2}{2}}{2^{x \cos(\pi x^2)} \cdot \sqrt[3]{x^2 - 4x + 11}}$, demuestra que existe un valor $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = 3$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Llamando $g(x) = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi x^2}{2}$, $h(x) = 2^{x \cos(\pi x^2)}$ e $i(x) = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 11}$; las tres tienen por dominio el conjunto de los números reales. Teniendo en cuenta que toda función exponencial es siempre positiva y $x^2 - 4x + 11 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, el denominador de $f(x)$ es positivo, lo que implica que el dominio de f es $\mathbb{R}$.

Por otra parte, las derivadas de $g(x)$, $h(x)$ e $i(x)$ son las siguientes:

$$g'(x) = 2\pi x \cos \frac{\pi x^2}{2}.$$

$$h'(x) = [\cos(\pi x^2) - 2\pi x^2 \operatorname{sen}(\pi x^2)] L2 \cdot 2^{x \cos(\pi x^2)}.$$

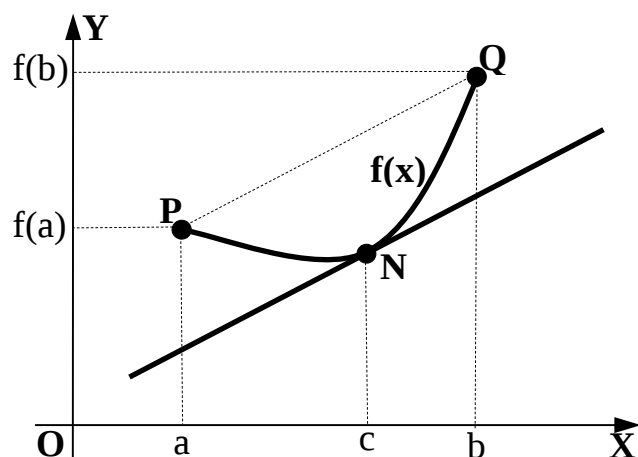
$$i'(x) = \frac{2x - 4}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^2 - 4x + 11)^2}}.$$

Como se aprecia, las funciones $g(x)$, $h(x)$ e $i(x)$ son continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

De lo anterior se deduce que $f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por lo cual se puede aplicar el teorema de Lagrange a cualquier intervalo finito que se considere y, en particular, al intervalo $(1, 3)$.

El teorema del Valor Medio del cálculo diferencial, también conocido como teorema de Lagrange, se puede enunciar del modo siguiente:

“Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ que cumple: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.”.



La interpretación geométrica puede apreciarse más fácilmente mediante la figura adjunta.

Considerada la función $f(x)$, continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) existe, por lo menos un punto N perteneciente al intervalo (a, b) en el que la recta tangente a la gráfica $f(x)$ es paralela a la cuerda que une los puntos P y Q de coordenadas

$P[a, f(a)]$ y $Q[b, f(b)]$.

Aplicando el teorema a $f(x)$ en el intervalo considerado:

$$f(1) = \frac{2 \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{2^{\cos \pi} \cdot \sqrt[3]{1-4+11}} = \frac{2 \cdot 1}{2^{-1} \cdot \sqrt[3]{8}} = \frac{2 \cdot 2}{2} = \underline{2 = f(1)}.$$

$$f(3) = \frac{2 \cdot \sin \frac{9\pi}{2}}{2^{3 \cos(9\pi)} \cdot \sqrt[3]{9-12+11}} = \frac{2 \cdot 1}{2^{-3} \cdot \sqrt[3]{8}} = \frac{2 \cdot 8}{2} = \underline{8 = f(3)}.$$

$$f'(\alpha) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{8 - 2}{2} = \frac{6}{2} = \underline{\underline{3 = f'(a)}}.$$

Queda demostrado que existe $\alpha \in (1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = 3$.

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 2 \\ t+1 & t+1 & 1 \\ 1-t & 0 & t-1 \end{pmatrix}$, encuentra los valores $t \in R$ para los que la matriz A no es regular.

Una matriz es regular cuando su determinante es distinto de cero.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ t+1 & t+1 & 1 \\ 1-t & 0 & t-1 \end{vmatrix} = t(t+1)(t-1) + (1-t) - 2(t+1)(1-t) - (t+1)(t-1) = \\ &= t(t+1)(t-1) + (1-t) + 2(t+1)(t-1) - (t+1)(t-1) = t(t+1)(t-1) + 1 - t + (t+1)(t-1) = \\ &= (t+1)(t-1)(t+1) - (t-1) = (t-1)[(t+1)^2 - 1] = (t-1)(t^2 + 2t + 1 - 1) = t(t-1)(t+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{t_1 = 0} \\ \underline{t_2 = 1} \\ \underline{t_3 = -2} \end{cases} . \end{aligned}$$

La matriz A no es regular para $t = 0$, $t = 1$ y $t = -2$.

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta t que pasa por el punto P(0, -2, 1) y corta a la rectas $r \equiv \begin{cases} 2x+y-z+2=0 \\ x-y-z+1=0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y+4}{0} = \frac{z+1}{2}$.

La expresión de $r \equiv \begin{cases} 2x+y-z+2=0 \\ x-y-z+1=0 \end{cases}$ por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2x+y-z+2=0 \\ x-y-z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=-2+\lambda \\ x-y=-1+\lambda \end{cases} \Rightarrow 3x=-3+2\lambda \;; \; \underline{x=-1+\frac{2}{3}\lambda} \;;$$

$$y = x+1-\lambda = -1+\frac{2}{3}\lambda+1-\lambda = \underline{-\frac{1}{3}\lambda = y} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=-1+\frac{2}{3}\lambda \\ y=-\frac{1}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}.$$

Un punto y un vector director de r son A(-1, 0, 0) y $\overrightarrow{v_r} = (2, -1, 3)$.

Los puntos A y P determinan el vector $\overrightarrow{AP} = P - A = (1, -2, 1)$.

El plano π_1 que pasa por P y contiene a la recta r es el siguiente:

$$\pi_1(P; \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{AP}) \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;; \; -x+3(y+2)-4(z-1)+(z-1)+6x-2(y+2)=0 \;;$$

$$5x+(y+2)-3(z-1)=0 \;; \; 5x+y+2-3z+3=0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi_1 \equiv 5x+y-3z+5=0}}.$$

Un punto y un vector director de s son B(-1, -4, -1) y $\overrightarrow{v_s} = (1, 0, 2)$.

Los puntos B y P determinan el vector $\overrightarrow{BP} = P - B = (1, 2, 2)$.

El plano π_2 que pasa por P y contiene a la recta s es el siguiente:

$$\pi_2(P; \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{BP}) \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;; \; 2(y+2)+2(z-1)-4x-2(y+2)=0 \;;$$

$$-4x+2(z-1)=0 \;; \; 2x-(z-1)=0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi_2 \equiv 2x-z+1=0}}.$$

La recta t es la que determinan los planos π_1 y π_2 al cortarse; su expresión dada por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$t \equiv \begin{cases} \pi_1 \equiv 5x + y - 3z + 5 = 0 \\ \pi_2 \equiv 2x - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \lambda} \Rightarrow \underline{z = 1 + 2\lambda} ;; y = -5 - 5x + 3z = -5 - 5\lambda + 3 + 6\lambda =$$

$$\underline{= -2 + \lambda = y} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{t \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{2}}}$$

3º) Demuestra que la derivada de la función $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$ se anula en algún punto del intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Para derivar la función $f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$ tomamos logaritmos neperianos:

$L[f(x)] = L x^{\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x \cdot L x$. Derivando ahora los dos términos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \cdot L x + \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{x} \quad ; \quad f'(x) = x^{\operatorname{sen} x} \cdot \left(\cos x \cdot L x + \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x \right).$$

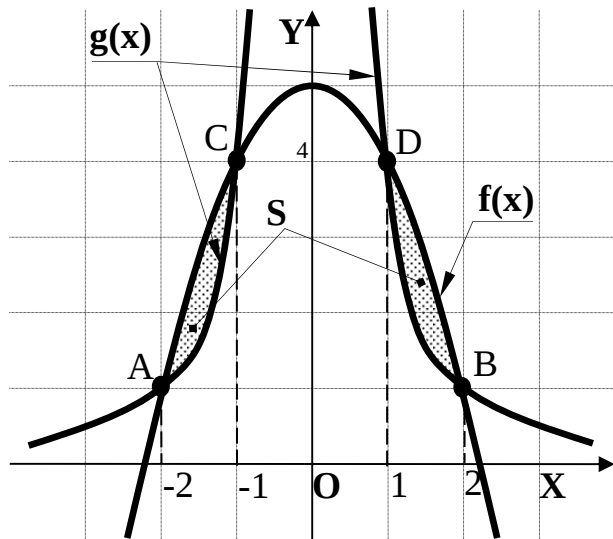
La función $f'(x)$ es continua en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano, que dice: “Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ ”.

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} \cdot L \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^1 \cdot \left(0 \cdot L \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot 1 \right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi} = 1 > 0.$$

$$f'(\pi) = \pi^{\operatorname{sen} \pi} \cdot (\cos \pi \cdot L \pi + \pi \cdot \operatorname{sen} \pi) = \pi^0 \cdot (-1 \cdot L \pi + \pi \cdot 0) = 1 \cdot (-L \pi) = -L \pi < 0.$$

Lo anterior prueba que $f'(x)$ se anula para algún valor del intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

4º) Dadas las funciones $f(x)=5-x^2$ y $g(x)=\frac{4}{x^2}$, calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.



La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que indica la figura adjunta.

Los puntos de corte de las junciones se obtienen de la igualación de sus expresiones; son los siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} f(x)=5-x^2 \\ g(x)=\frac{4}{x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow 5-x^2 = \frac{4}{x^2} ; ;$$

$$5x^2 - x^4 = 4 ; ; x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 ; ; a = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 4 = x^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -2 \rightarrow \underline{A(-2, 1)} \\ x_2 = 2 \rightarrow \underline{B(2, 1)} \end{array} \right. \\ a_2 = 1 = x^2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_3 = -1 \rightarrow \underline{C(-1, 4)} \\ x_4 = 1 \rightarrow \underline{D(1, 4)} \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Por ser $f(-x)=f(x)$ y $g(-x)=g(x)$, ambas funciones son simétricas con respecto al eje OY; además, como se aprecia en la figura, las ordenadas de la función $f(x)=5-x^2$ son iguales o mayores que las ordenadas correspondientes a la función $g(x)=\frac{4}{x^2}$ en los intervalos correspondientes al área a calcular, por lo que el área pedida es:

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \int_1^2 [f(x) - g(x)] dx = 2 \cdot \int_1^2 \left(5 - x^2 - \frac{4}{x^2} \right) dx = 2 \cdot \left[5x - \frac{x^3}{3} - \frac{4x^{-1}}{-1} \right]_1^2 = 2 \cdot \left[5x - \frac{x^3}{3} + \frac{4}{x} \right]_1^2 \\ &= 2 \cdot \left[\left(5 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} + \frac{4}{2} \right) - \left(5 \cdot 1 - \frac{1^3}{3} + \frac{4}{1} \right) \right] = 2 \cdot \left(10 - \frac{8}{3} + 2 - 5 + \frac{1}{3} - 4 \right) = 2 \cdot \left(3 - \frac{7}{3} \right) = 2 \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3} u^2 = S}}. \end{aligned}$$
