

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE NAVARRA****JUNIO – 2011 (GENERAL)**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Realizar una de las dos opciones propuestas (A o B).

OPCIÓN A1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real α y resuélvelo en los casos en que es compatible:
$$\begin{cases} 2y + a^2z = a + 4 \\ ax - y + (a + 2)z = 1. \\ ax - 2y + az = 0 \end{cases}$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a^2 \\ a & -1 & a+2 \\ a & -2 & a \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a^2 & a+4 \\ a & -1 & a+2 & 1 \\ a & -2 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función del parámetro real α es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & a^2 \\ a & -1 & a+2 \\ a & -2 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 0 & 2 & a^2 \\ 1 & -1 & a+2 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = a[-2a^2 + 2(a+2) + a^2 - 2a] = a(-a^2 + 2a + 4 - 2a) =$$

$$= a(4 - a^2) = 0 \Rightarrow \underline{a_1 = 0} \ ; \ ; \ ; \ \underline{a_2 = 2} \ ; \ ; \ \underline{a_3 = -2}.$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 2 \\ a \neq -2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } A = \text{Rango } A' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Determinado}$$

$$\text{Para } a = 0 \text{ ez } A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } A' \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } A' = 3}.$$

$$\text{Para } a=2 \text{ es } A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } A' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -24 + 4 + 12 = -8 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } A' = 3}.$$

$$\text{Para } \begin{cases} a=0 \\ a=2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } A = 2 \text{ ; ; Rango } A' = 3 \Rightarrow \underline{\text{Incompatible}}$$

$$\text{Para } a=-2 \text{ es } A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 + C_4 = C_2\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } A' = 2}$$

$$\underline{\underline{\text{Para } a=-2 \Rightarrow \text{Rango } A = \text{Rango } A' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}}}$$

Resolvemos los casos de compatibilidad; primero cuando $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 2 \\ a \neq -2 \end{cases}$ mediante la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a+4 & 2 & a^2 \\ 1 & -1 & a+2 \\ 0 & -2 & a \end{vmatrix}}{a(2+a)(2-a)} = \frac{-a(a+4) - 2a^2 + 2(a+2)(a+4) - 2a}{a(2+a)(2-a)} =$$

$$= \frac{-a^2 - 4a - 2a^2 + 2(a^2 + 6a + 8) - 2a}{a(2+a)(2-a)} = \frac{-3a^2 - 6a + 2a^2 + 12a + 16}{a(2+a)(2-a)} = \frac{-a^2 + 6a + 16}{a(2+a)(2-a)} = \frac{-(a+2)(a-8)}{a(2+a)(2-a)} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{8-a}{a(2-a)}}} = x.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a+4 & a^2 \\ a & 1 & a+2 \\ a & 0 & a \end{vmatrix}}{a(2+a)(2-a)} = \frac{a(a+2)(a+4) - a^3 - a^2(a+4)}{a(2+a)(2-a)} = \frac{(a+2)(a+4) - a^2 - a(a+4)}{(2+a)(2-a)} =$$

$$= \frac{a^2 + 6a + 8 - a^2 - a^2 - 4a}{(2+a)(2-a)} = \frac{2a + 8 - a^2}{(2+a)(2-a)} = \frac{-a^2 + 2a + 8}{(2+a)(2-a)} = \frac{-(a+2)(a-4)}{(2+a)(2-a)} = \underline{\underline{\frac{4-a}{2-a}}} = y.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & a+4 \\ a & -1 & 1 \\ a & -2 & 0 \end{vmatrix}}{a(2+a)(2-a)} = \frac{-2a(a+4)+2a+a(a+4)}{a(2+a)(2-a)} = \frac{-2(a+4)+2+(a+4)}{(2+a)(2-a)} = \frac{-2a-8+2+a+4}{(2+a)(2-a)} =$$

$$= \frac{-a-2}{(2+a)(2-a)} = \frac{-(a+2)}{(2+a)(2-a)} = \frac{-1}{2-a} = z.$$

Resolvemos para $\alpha = -2$; el sistema resulta $\begin{cases} 2y+4z=2 \\ -2x-y=1 \\ -2x-2y-2z=0 \end{cases}$, que es compatible

indeterminado y cuya solución es:

$$\begin{cases} y+2z=1 \\ 2x+y=-1 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \;; \; \underline{y=1-2\lambda} \;; \; x=-y-z=-1+2\lambda-\lambda=\underline{-1+\lambda=x}.$$

$$\underline{\underline{\text{Solución: } \begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}, \forall \lambda, m \in R}}$$

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta s que está contenida en el plano $\pi \equiv x+2y-z+2=0$ y corta perpendicularmente a la recta $r \equiv \begin{cases} 2x+y-z+1=0 \\ x+2y-2z-1=0 \end{cases}$.

El punto de intersección de la recta r con el plano π es la solución del sistema que forman:

$$\left. \begin{array}{l} 2x+y-z+1=0 \\ x+2y-2z-1=0 \\ x+2y-z+2=0 \end{array} \right\}.$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x+y-z+1=0 \\ x+2y-2z-1=0 \\ x+2y-z+2=0 \end{array} \right\} \rightarrow z=1+2x+y \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2y-2(1+2x+y)-1=0 \\ x+2y-(1+2x+y)+2=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+2y-2-4x-2y-1=0 \\ x+2y-1-2x-y+2=0 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} -3x-3=0 \\ -x+y+1=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+1=0 \\ -x+y=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{x=-1}; 1+y=-1; \underline{y=-2}; z=1-2-2=\underline{-3}=z \Rightarrow \underline{P(-1, -2, -3)}.$$

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los dos planos que la definen al cortarse, que son $\vec{n}_1 = (2, 1, -1)$ y $\vec{n}_2 = (1, 2, -2)$.

$$\vec{v}'_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2i - j + 4k - k + 2i + 4j = 3j + 3k = (0, 3, 3) \Rightarrow \underline{\vec{v}_r = (0, 1, 1)}.$$

El haz de planos perpendiculares a r tienen como vector normal al vector director de r y su expresión general es de la forma $\alpha \equiv y+z+D=0$.

De los infinitos planos del haz $\alpha \equiv y+z+D=0$, el plano μ que contiene al punto P es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \equiv y+z+D=0 \\ P(-1, -2, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow -2-3+D=0 \;; \underline{D=5} \Rightarrow \underline{\mu \equiv y+z+5=0}.$$

La recta s pedida es la que determinan los planos π y μ : $s \equiv \begin{cases} x+2y-z+2=0 \\ y+z+5=0 \end{cases}$.

La expresión de s por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x+2y-z+2=0 \\ y+z+5=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \;; \underline{y=-5-\lambda} \;; x=-2-2y+z=-2-2(-5-\lambda)+\lambda =$$

$$= -2+10+2\lambda+\lambda = \underline{8+3\lambda} = x.$$

$$\underline{\underline{s \equiv \frac{x-8}{3} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z}{1}}}$$

3º) Halla las integrales definidas $I_1 = \int \frac{\text{tag}^3 x + \text{tag} x}{\text{tag}^2 x - 1} \cdot dx$ e $I_2 = \int \frac{dx}{x^2 + x - 2}$.

$$I_1 = \int \frac{\text{tag}^3 x + \text{tag} x}{\text{tag}^2 x - 1} \cdot dx = \int \text{tag} x \cdot \frac{\text{tag}^2 x + 1}{\text{tag}^2 x - 1} \cdot dx = \int \text{tag} x \cdot \frac{\text{tag}^2 x - 1 + 2}{\text{tag}^2 x - 1} \cdot dx =$$

$$= \int \text{tag} x \cdot \left(1 + \frac{2}{\text{tag}^2 x - 1} \right) \cdot dx = \int \text{tag} x \cdot dx + \int \frac{2 \text{tag} x}{\text{tag}^2 x - 1} \cdot dx = \underline{A + B = I_1} \quad (*)$$

$$A = \int \text{tag} x \cdot dx = \int \frac{\text{sen} x}{\cos x} \cdot dx \Rightarrow \begin{cases} \cos x = t \\ -\text{sen} x \cdot dx = dt \\ \text{sen} x \cdot dx = -dt \end{cases} \Rightarrow A = -\int \frac{dt}{t} = -Lt + C_1 = \underline{-L \cos x + C_1 = A}$$

$$B = \int \frac{2 \text{tag} x}{\text{tag}^2 x - 1} \cdot dx = \int \frac{2 \cdot \frac{\text{sen} x}{\cos x}}{\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} - 1} \cdot dx = \int \frac{2 \cdot \frac{\text{sen} x}{\cos x}}{\frac{\text{sen}^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x}} \cdot dx = \int \frac{2 \text{sen} x \cdot \cos x}{-(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)} \cdot dx =$$

$$= -\int \frac{\text{sen}(2x)}{\cos(2x)} \cdot dx \Rightarrow \begin{cases} \cos(2x) = u \\ -2 \text{sen}(2x) \cdot dx = du \\ \text{sen}(2x) \cdot dx = -\frac{1}{2} du \end{cases} \Rightarrow B = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} Lu + C_2 = \underline{\frac{1}{2} L[\cos(2x)] + C_2 = B}$$

Sustituyendo en (*) los valores de A y B queda: $I_1 = \underline{\underline{\frac{1}{2} L[\cos(2x)] - L \cos x + C}}$

Esta integral puede resolverse de otra forma teniendo en cuenta que la derivada de $\text{tag}^2 x - 1$ es $2 \cdot \text{tag} x \cdot (1 + \text{tag}^2 x) = 2 \cdot (\text{tag} x + \text{tag}^3 x)$. Sería como sigue:

$$I_1 = \int \frac{\text{tag}^3 x + \text{tag} x}{\text{tag}^2 x - 1} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2 \cdot (\text{tag}^3 x + \text{tag} x)}{\text{tag}^2 x - 1} \cdot dx = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot L|\text{tag}^2 x - 1| + C = I_1}}$$

Nótese que aunque son expresiones diferentes tienen la misma derivada, que es la expresión $\frac{\text{tag}^3 x + \text{tag} x}{\text{tag}^2 x - 1}$, como puede comprobarse.

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^2 + x - 2} \quad x^2 + x - 2 = 0 \quad ; \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{Ax + 2A + Bx - B}{x^2 + x - 2} = \frac{(A+B)x + (2A-B)}{x^2 + x - 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2A-B=1 \end{cases} \Rightarrow 3A=1 \;; \; \underline{A=\frac{1}{3}} \;; \; \underline{B=-\frac{1}{3}}.$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} \cdot dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+2} \cdot dx = \frac{1}{3} L(x-1) - \frac{1}{3} L(x+2) + C = \underline{\underline{L\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}} + C = I_2}}.$$

4º) Dada la función $f(x) = \sqrt{2 + \operatorname{sen} \sqrt[3]{x+1} + \operatorname{sen} \left(\pi - \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} \right)}$, demuestra que existe un valor $x \in (1, 2)$ tal que $f'(x) = 0$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Vamos a utilizar el teorema de Rolle, que se puede enunciar diciendo:

“Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en (a, b) y si se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$ ”.

La función $f(x)$ es continua y derivable en todo su dominio, que es \mathbb{R} , por lo tanto, le es aplicable el Teorema de Rolle en el intervalo $(1, 2)$.

Aplicando el Teorema de Rolle:

$$f(1) = \sqrt{2 + \operatorname{sen} \sqrt[3]{1+1} + \operatorname{sen} \left(\pi - \sqrt[3]{1 + \frac{2}{1}} \right)} = \sqrt{2 + \operatorname{sen} \sqrt[3]{2} + \operatorname{sen} (\pi - \sqrt[3]{3})} = \sqrt{2 + \operatorname{sen} \sqrt[3]{2} + \operatorname{sen} \sqrt[3]{3}}.$$

$$f(2) = \sqrt{2 + \operatorname{sen} \sqrt[3]{2+1} + \operatorname{sen} \left(\pi - \sqrt[3]{1 + \frac{2}{2}} \right)} = \sqrt{2 + \operatorname{sen} \sqrt[3]{3} + \operatorname{sen} (\pi - \sqrt[3]{2})} = \sqrt{2 + \operatorname{sen} \sqrt[3]{3} + \operatorname{sen} \sqrt[3]{2}}.$$

Como se aprecia, se cumple que $f(1) = f(2)$.

De todo lo anterior se deduce que:

$$\underline{\underline{\exists c \in (1, 2) \text{ tal que } f'(c) = 0, \text{ como teníamos que demostrar.}}}$$

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, encuentra todas las matrices G que cumplen $A \cdot G = G \cdot A$.

Sea la matriz $G = \begin{pmatrix} b & c \\ x & y \end{pmatrix}$. Por condición del problema tiene que cumplirse:

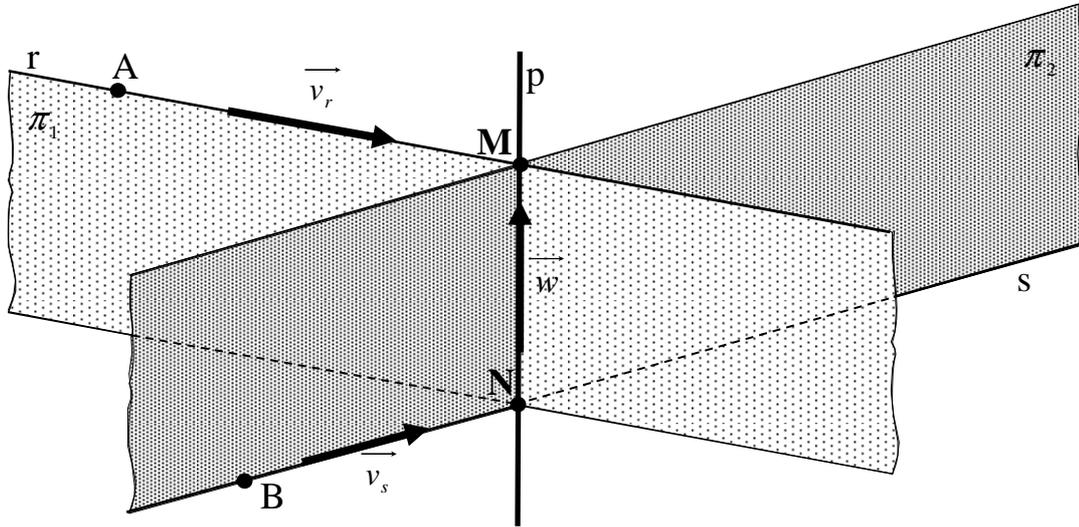
$$\left. \begin{array}{l} A \cdot G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & c \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \\ G \cdot A = \begin{pmatrix} b & c \\ x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 2c \\ x & 2y \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cdot G = G \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} b & c \\ 2x & 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 2c \\ x & 2y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ \underline{x=0} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{G = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \forall (b, y) \in R}}$$

2º) Encuentra la ecuación continua de la recta t que corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \begin{cases} 3x - y - z + 2 = 0 \\ 5x - 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \text{ y a la recta } s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}.$$

En primer lugar vamos a determinar la recta p , perpendicular común a las rectas dadas, para lo cual nos guiamos por el siguiente gráfico.



Determinamos un punto y un vector director de cada una de las rectas dadas, para lo cual expresamos la recta r por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - y - z + 2 = 0 \\ 5x - 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \lambda} \Rightarrow \begin{cases} -y - z = -2 - 3\lambda \\ -2y - z = 1 - 5\lambda \end{cases} \begin{cases} -y - z = -2 - 3\lambda \\ 2y + z = -1 + 5\lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{y = -3 + 2\lambda} ; ;$$

$$-y - z = -2 - 3\lambda ; ; z = 2 + 3\lambda - y = 2 + 3\lambda + 3 - 2\lambda ; ; \underline{z = 5 + \lambda} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 + 2\lambda \\ z = 5 + \lambda \end{cases}}$$

Un punto y un vector director de r son: $A(0, -3, 5)$ y $\vec{v}_r = (1, 2, 1)$.

Un punto y un vector director de s son: $B(1, -1, 0)$ y $\vec{v}_s = (2, 1, -1)$.

Un vector \vec{w} , perpendicular a \vec{v}_r y \vec{v}_s es cualquiera que sea linealmente dependiente de su producto vectorial:

$$\vec{w} = \vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2i + 2j + k - 4k - i + j = -3i + 3j - 3k \Rightarrow \underline{\vec{w} = (1, -1, 1)}.$$

Ahora determinamos los planos π_1 y π_2 , de la forma siguiente:

$$\pi_1(A; \vec{v}_r, \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x & y+3 & z-5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad 2x + (y+3) - (z-5) - 2(z-5) + x - (y+3) = 0 \quad ; ;$$

$$3x - 3(z-5) = 0 \quad ; ; \quad x - (z-5) = 0 \Rightarrow \underline{\pi_1 \equiv x - z + 5 = 0}.$$

$$\pi_2(B; \vec{v}_s, \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad (x-1) - (y+1) - 2z - z - (x-1) - 2(y+1) = 0 \quad ; ;$$

$$-3(y+1) - 3z = 0 \quad ; ; \quad (y+1) + z = 0 \Rightarrow \underline{\pi_2 \equiv y + z + 1 = 0}.$$

La recta pedida p, es la que determinan los planos π_1 y π_2 en su intersección, que es la siguiente: $p \equiv \begin{cases} x - z + 5 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases}$.

Como se nos pide, expresamos la recta p por unas ecuaciones continuas:

$$p \equiv \begin{cases} x - z + 5 = 0 \\ y + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \underline{x = -5 + \lambda} \quad ; ; \quad \underline{y = -1 - \lambda}.$$

$$\underline{\underline{p \equiv \frac{x+5}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}}}$$

3º) Encuentra los extremos absolutos de la función $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

El teorema de los valores extremos dice que toda función continua en un intervalo cerrado tiene extremos absolutos en dicho intervalo (mínimo absoluto y máximo absoluto).

La función $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$ es continua en \mathbb{R} , por lo cual lo será en cualquier intervalo cerrado considerado.

Los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$ en el intervalo dado $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ son los siguientes:

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x + \cos x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \cos x.$$

El único valor que satisface la ecuación $\operatorname{sen} x = \cos x$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ es para $x = \frac{5\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\cos x - \operatorname{sen} x \Rightarrow f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos \frac{5\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} = -\cos 225^\circ - \operatorname{sen} 225^\circ = \\ &= -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo para } x = \frac{5\pi}{4}}. \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos \frac{5\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \Rightarrow \underline{\text{Mínimo: } P\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)}.$$

Los valores de la función en los extremos del intervalo son los siguientes:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 0 + 1 = 1 \Rightarrow \underline{A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)}; \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos \frac{3\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = 0 - 1 = -1 \Rightarrow \underline{B\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)}.$$

De todo lo anterior se deduce que la función $f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$ tiene los siguientes extremos absolutos en el intervalo dado:

$$\underline{\underline{\text{Máximo absoluto: } A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \text{ y Mínimo absoluto: } P\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)}}$$

4º) Calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ y $g(x)=\frac{1-x^2}{2}$. (Observa que $f(x)$ es parte no negativa de la circunferencia de centro y radio 1).

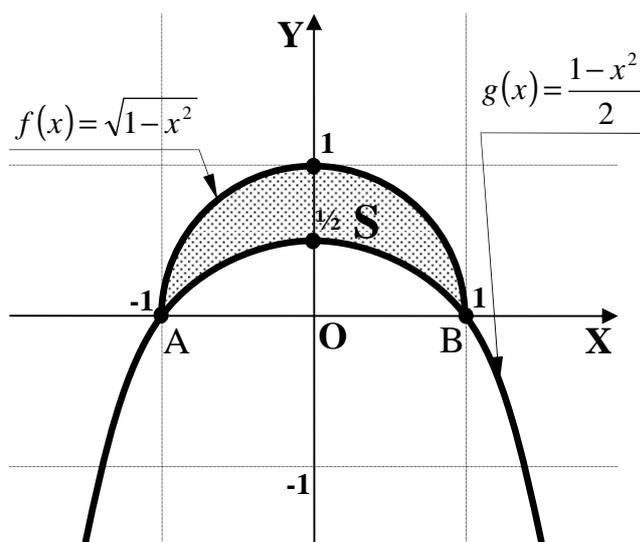
Las dos funciones son simétricas con respecto al eje OY por ser $f(x)=f(-x)$ y también $g(x)=g(-x)$. Los puntos de corte de las funciones son los que se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \frac{1-x^2}{2} \quad ; ; \quad 2\sqrt{1-x^2} = 1-x^2 \quad ; ; \quad 4(1-x^2) = (1-x^2)^2 \quad ; ;$$

$$4-4x^2 = 1-2x^2+x^4 \quad ; ; \quad x^4+2x^2-3=0 \quad ; ; \quad x^2 = y \Rightarrow y^2+2y-3=0 \quad ; ; \quad y = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = -1 \pm 2 \Rightarrow \underline{y_1 = -3} \quad ; ; \quad \underline{y_2 = 1}.$$

Deshaciendo el cambio de variable con el valor posible (el positivo), resulta:



$$x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow \underline{A(-1, 0)} \\ x_1 = 1 \rightarrow \underline{B(1, 0)} \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.

Teniendo en cuenta que el área limitada por $f(x)$ es un semicírculo (como se nos indica en el enunciado del problema), el área pedida es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 - \int_{-1}^1 g(x) \cdot dx = \frac{\pi}{2} - \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{2} \cdot dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^1 (1-x^2) \cdot dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left\{ 1 - \frac{1^3}{3} - \left[-1 - \frac{(-1)^3}{3} \right] \right\} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} = \\ &= \underline{\underline{\frac{3\pi-4}{6} \cong 0'904 \text{ u}^2 = S.}} \end{aligned}$$
