PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

SEPTIEMBRE - 2009

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responde a una opción del Grupo 1 y a una opción del Grupo 2.

GRUPO 1

OPCIÓN A

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real α y resuélvelo en los casos en que es compatible: $\left\{\begin{array}{l}(a-1)x+ay+2z=-1\\(a-1)x+2ay+3z=0\\(1-a)x+az=a^2+1\end{array}\right.$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}a-1 & a & 2\\ a-1 & 2a & 3\\ 1-a & 0 & a\end{pmatrix}\ ;;\ M'=\begin{pmatrix}a-1 & a & 2 & -1\\ a-1 & 2a & 3 & 0\\ 1-a & 0 & a & a^2+1\end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix}a-1 & a & 2\\ a-1 & 2a & 3\\ 1-a & 0 & a\end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix}a-1 & 1 & 2\\ a-1 & 2 & 3\\ 1-a & 0 & a\end{vmatrix}=a\cdot[2a(a-1)+3(1-a)-4(1-a)-a(a-1)]=$$

$$=a\left(2a^2-2a+3-3a-4+4a-a^2+a\right)=a\left(a^2-1\right)=a(a+1)(a-1)=0\ \Rightarrow\ \underline{a_1=0}\ ;;\ \underline{a_2=-1}\ ;;\ \underline{a_3=1}.$$

$$Para\left\{\begin{array}{c}a\neq 0\\ a\neq -1\\ a\neq 1\end{array}\right\}\Rightarrow\ Rango\ M=Rango\ M'=3=n^o\ incóg.\ \Rightarrow\ Compatible\ \det er\min ado$$

$$\underline{Para\ \ a=0}\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2 & -1\\ -1 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow Equivalente\ \ a\ \ M'=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow Rango\ \ M'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}-1 & 2 & -1\\ -1 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-3+3+2=2\neq 0\Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=3}.$$

$$\underline{Para\ \ a=1}\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow Equivalente\ \ a\ \ M'=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow Rango\ \ M'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=6-2-8=-4\neq 0\Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix}a=0\\ a=1\end{Bmatrix}\Rightarrow\ Rango\ \ M=2\ \ ;;\ \ Rango\ \ M'=3\ \Rightarrow\ Incompatible}}$$

$$Para\ \ a=-1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 2 & -1\\ -2 & -2 & 3 & 0\\ 2 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow Rango\ \ M'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}\{C_1,\ C_2,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix}-2 & -1 & -1\\ -2 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=8-4-4=0\\ \\ \{C_1,\ C_3,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix}-2 & 2 & -1\\ -2 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=-12-2+6+8=0\\ \\ \{C_2,\ C_3,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix}-1 & 2 & -1\\ -2 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}=-6-2+8=0\end{Bmatrix}\Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ a=-1\Rightarrow\ Rango\ \ M=Rango\ M'=2<n^o\ incóg.\Rightarrow\ Compatible\ \ indeterminado}}$$

Resolvemos para el caso de $\begin{Bmatrix}a\neq 0\\ a\neq -1\\ a\neq 1\end{Bmatrix}$, compatible determinado, mediante la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-1 & a & 2\\ 0 & 2a & 3\\ a^2+1 & 0 & a\end{vmatrix}}{a(a+1)(a-1)}=\frac{a\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\\ a^2+1 & 0 & a\end{vmatrix}}{a(a+1)(a-1)}=\frac{-2a+3\left(a^2+1\right)-4\left(a^2+1\right)}{(a+1)(a-1)}=\frac{-2a-\left(a^2+1\right)}{(a+1)(a-1)}=$$

$$=\frac{-2a-a^2-1}{(a+1)(a-1)}=\frac{-\left(a^2+2a+1\right)}{(a+1)(a-1)}=\frac{-(a+1)^2}{(a+1)(a-1)}=\underline{\underline{\frac{a+1}{1-a}}}=x\,.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}a-1 & -1 & 2\\ a-1 & 0 & 3\\ 1-a & a^2+1 & a\end{vmatrix}}{a(a+1)(a-1)}=\frac{(a-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ -1 & a^2+1 & a\end{vmatrix}}{a(a+1)(a-1)}=\frac{2\left(a^2+1\right)+3-3\left(a^2+1\right)+a}{a(a+1)}=$$

$$=\frac{-\left(a^2+1\right)+3+a}{a(a+1)}=\frac{-a^2-1+3+a}{a(a+1)}=\frac{-a^2+a+2}{a(a+1)}=\frac{-(a-2)(a+1)}{a(a+1)}=\underline{\underline{\frac{2-a}{a}}}=y\,.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}a-1 & a & -1\\ a-1 & 2a & 0\\ 1-a & 0 & a^2+1\end{vmatrix}}{a(a+1)(a-1)}=\frac{a(a-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & a^2+1\end{vmatrix}}{a(a+1)(a-1)}=\frac{2a^2+2-2-a^2-1}{a+1}=\frac{a^2-1}{a+1}=\underline{\underline{a-1=z}}\,.$$

****

2º) Se considera la recta s que pasa por el punto P(0, 2, 1) y es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 4y + 2z + 9 = 0 \end{cases}$. Encuentra el punto de corte de r y s.

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que determinan la recta.

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_1} = (1,\ -1,\ -1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,\ -4,\ 2)$.

$$\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -2i - j - 4k + k - 4i - 2j = -6i - 3j - 3k = (-6,\ -3,\ -3).$$

Un vector director de r es $\overrightarrow{u} = (2,\ 1,\ 1)$.

El haz de los infinitos planos paralelos que son perpendiculares a la recta r tienen una expresión general de la forma $\alpha \equiv 2x + y + z + D = 0$.

El plano π perteneciente a α que contiene al punto P(0, 2, 1) es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \equiv 2x + y + z + D = 0 \\ \\ P(0,\ 2,\ 1) \end{array} \right\} \Rightarrow\ 2 \cdot 0 + 2 + 1 + D = 0\ ;;\ D = -3\ \Rightarrow\ \underline{\pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0}.$$

El punto Q de corte del plano π con la recta r es la solución del sistema que determinan: $\left. \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x - 4y + 2z = -9 \\ 2x + y + z = 3 \end{array} \right\}$. Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -9 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{9 - 6 - 12 - 9}{-4 - 4 - 1 - 8 - 2 + 1} = \frac{-18}{-18} = \underline{1 = x}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -9 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-18} = \frac{-9 - 3 - 18 - 6}{-18} = \frac{-36}{-18} = \underline{2 = y}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & -9 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-18}=\frac{-12+18+9+3}{-18}=\frac{18}{-18}=\underline{-1=z}.$$

El punto de corte del plano π con la recta r es Q(1, 2, -1).

La recta s pedida es la que pasa por los puntos P(0, 2, 1) y Q(1, 2, -1), por lo cual el punto pedido es Q.

<u>El punto de corte de r y s es Q(1, 2, -1).</u>

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, calcula Rang (AB) y Rang (BA).

$$A \cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1+0 & 2-1+1 \\ 0-1-0 & 0+1-2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}2 & 2 \\ -1 & -1\end{pmatrix}=A \cdot B}$$

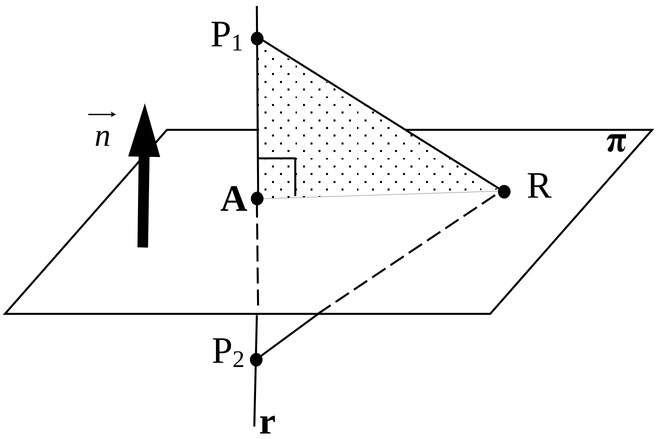
$$|A \cdot B|=\begin{vmatrix}2 & 2 \\ -1 & -1\end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Rang\ (AB)=1}}$$

$$B \cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+0 & -1+2 & 1-4 \\ -1+0 & 1+1 & -1-2 \\ 0+0 & -0+1 & 0-2\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}=B \cdot A}$$

$$|B \cdot A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=-4+3+3-2=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix}1 & 1 \\ -1 & 2\end{vmatrix}\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Rang\ (BA)=2}}$$

****

2º) Dado el punto R(1, -1, 2), encuentra los puntos P_1 y P_2 pertenecientes a la recta r dada por la ecuación $r \equiv \begin{cases} x+y+z-4=0 \\ x+2y+2z-6=0 \end{cases}$ tales que PQR sea un triángulo equilátero.



El gráfico adjunto ilustra el proceso que se realiza a continuación.

El plano π es perpendicular a r por el punto R.

El vector normal del plano π es linealmente dependiente al vector director de la recta r.

Un vector director de la recta r es el producto vectorial de los vectores normales de los planos que determinan la recta, que son $\overrightarrow{n_1} = (1,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,\ 2,\ 2)$.

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2i + j + 2k - k - 2i - 2j = -j + k = (0,\ -1,\ 1).$$

Un vector normal de π es $\overrightarrow{n} = (0,\ 1,\ -1)$.

El haz de los infinitos planos paralelos que son perpendiculares a la recta r tienen una expresión general de la forma $\alpha \equiv y - z + D = 0$.

El plano π perteneciente a α que contiene al punto R(1, -1, 2) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv y - z + D = 0 \\ R(1,\ -1,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 + D = 0\ \ ;;\ \ D = 3\ \Rightarrow\ \underline{\pi \equiv y - z + 3 = 0}.$$

Para conocer cualquier punto genérico de r la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-4=0 \\ x+2y+2z-6=0 \end{cases} \Rightarrow\ \underline{z=\lambda}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{r} x+y=4-\lambda \\ x+2y=6-2\lambda \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} -x-y=-4+\lambda \\ x+2y=6-2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow\ \underline{y=2-\lambda}\ ;;$$

$$x = 4 - \lambda - y = 4 - \lambda - 2 + \lambda = \underline{2 = x}\ \ \Rightarrow\ \ \underline{r \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=2-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}.$$

Los puntos de r son de la forma $P(2,\ 2-\lambda,\ \lambda)$.

El punto A de corte de la recta r con el plano π es:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 2-\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \\ \pi \equiv y - z + 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ (2-\lambda)-\lambda+3=0\ ;;\ 5-2\lambda=0\ ;;\ \underline{\lambda=\frac{5}{2}}\ \Rightarrow\ \underline{A\left(2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)}.$$

Por condición del problema es $\overline{PR} = 2\,\overline{AP}$:

$$\overline{PR} = \sqrt{(1-2)^2 + (-1-2+\lambda)^2 + (2-\lambda)^2} = \sqrt{1+9-6\lambda+\lambda^2+4-4\lambda+\lambda^2} = \underline{\sqrt{2\lambda^2-10\lambda+14}}$$

$$2\,\overline{AP} = 2\sqrt{(2-2)^2 + \left(2-\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\lambda-\frac{5}{2}\right)^2} = 2\sqrt{0^2 + \left(\frac{5}{2}-\lambda\right)^2 + \left(\lambda-\frac{5}{2}\right)^2} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{25}{4}-5\lambda+\lambda^2+\lambda^2-5\lambda+\frac{25}{4}} = 2\sqrt{2\lambda^2-10\lambda+\frac{50}{4}} = \underline{\sqrt{8\lambda^2-40\lambda+50}}$$

$$\overline{PR} = 2\,\overline{AP}\ \Rightarrow\ \sqrt{2\lambda^2-10\lambda+14} = \sqrt{8\lambda^2-40\lambda+50}\ ;;\ 2\lambda^2-10\lambda+14 = 8\lambda^2-40\lambda+50\ ;;$$

$$6\lambda^2-30\lambda+36=0\ ;;\ 3\lambda^2-15\lambda+18=0.$$

$$\lambda = \frac{15\pm\sqrt{225-216}}{6} = \frac{15\pm\sqrt{9}}{6} = \frac{15\pm 3}{6} = \frac{5\pm 1}{2}\ \Rightarrow\ \underline{\lambda_1 = 2}\ ;;\ \underline{\lambda_2 = 3}$$

$$P(2,\ 2-\lambda,\ \lambda)\ \Rightarrow\ \begin{cases} \lambda_1 = 2\ \Rightarrow\ \underline{\underline{P_1(2,\ 0,\ 2)}} \\ \\ \lambda_2 = 3\ \Rightarrow\ \underline{\underline{P_2(2,\ -1,\ 3)}} \end{cases}$$

****

GRUPO 2

OPCIÓN C

1º) Halla las integrales indefinidas: $I_1 = \int \frac{2\,dx}{x^2-4}$ e $I_2 = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

$$I_1 = 2 \cdot \int \frac{1}{x^2-4} \cdot dx = 2 \cdot \int \frac{dx}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{Ax+2A+Bx-2B}{(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{(A+B)x+(2A-2B)}{(1-x)(1+x)} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ 2A-2B=1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 2A = \frac{1}{2} \;;;\; \underline{A = \frac{1}{4}} \;;;\; \underline{B = -\frac{1}{4}}$$

$$I_1 = 2\int\left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}\right) \cdot dx = 2\left(\frac{1}{4}\int \frac{1}{x-2} \cdot dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+2} \cdot dx\right) = \frac{1}{2}M_1 - \frac{1}{2}M_2 = \underline{\frac{1}{2}(M_1 - M_2) = I_1}$$

$$M_1 = \int \frac{1}{x-2} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-2=t \\ dx=dt \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t} \cdot dt = \int \frac{1}{t} \cdot dt = L\,t = \underline{L|\,x-2\,| = M_1}$$

$$M_2 = \int \frac{1}{x+2} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2=t \\ dx=dt \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{1}{t} \cdot dt = L\,t = \underline{L|\,x+2\,| = M_2}$$

Sustituyendo los valores obtenidos de M_1 y M_2, queda:

$$I_1 = \frac{1}{2}\left[L|\,x-2\,| - L|\,x+2\,|\right] + C = \frac{1}{2}\left[L|\,x-2\,| - L|\,x+2\,|\right] + C = \frac{1}{2}L\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

$$\underline{\underline{I_1 = L\sqrt{\left|\frac{x-2}{x+2}\right|} + C}}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1+\sqrt{x} = t \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = dt \\ \sqrt{x} = t-1 \rightarrow dx = 2(t-1)dt \end{array}\right\} \Rightarrow I_2 = \int \frac{2(t-1)}{t} \cdot dt = 2\int\left(1-\frac{1}{t}\right) \cdot dt =$$

$$= 2 \cdot (t - L\,t) + C = 2 \cdot \left[1+\sqrt{x} - L\left|1+\sqrt{x}\right|\right] + C$$

$$\underline{\underline{I_2 = 2 \cdot \left[\sqrt{x} - L\left|1+\sqrt{x}\right|\right] + C}}$$

****

2º) Dada la función $f(x)=x^{Lx}$, demuestra que existe $c\in(1,\ e)$ tal que f'(c) = 1. Menciona los resultados teóricos que utilices.

En este ejercicio tenemos que utilizar el Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial, también conocido como Teorema de Lagrange, que dice: "si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b), entonces, existe al menos un punto $c\in(a,\ b)$ que cumple: $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$".

La función $f(x)=x^{Lx}$ es continua en $[1,\ e]$ y derivable en $(1,\ e)$ por lo cual le es aplicable en mencionado teorema en este intervalo.

$$f'(c)=\frac{f(e)-f(1)}{e-1}=\frac{e^{Le}-1^{L1}}{e-1}=\frac{e^{1}-1^{0}}{e-1}=\frac{e-1}{e-1}=1\ \Rightarrow\ \underline{\underline{f'(c)=1,\ \ c.q.d.}}.$$

****

OPCIÓN D

1º) Demuestra que la derivada de la función $f(x)=\sqrt{x^{\cos\frac{\pi x}{2}}}$ se anula en algún punto del intervalo $(1,\ 3)$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

$$f(x)=\sqrt{x^{\cos\frac{\pi x}{2}}}=x^{\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}}\ \Rightarrow\ L[f(x)]=\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}\cdot Lx\ ;;$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\cdot sen\frac{\pi x}{2}\cdot Lx+\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot Lx\cdot sen\frac{\pi x}{2}\right)\ ;;$$

$$\underline{f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x^{\cos\frac{\pi x}{2}}}\cdot\left(\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{\pi x}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot Lx\cdot sen\frac{\pi x}{2}\right)}$$

La función f'(x) es continua en su dominio, que es $(0,\ +\infty)$, por estar compuesta por sumas y productos de funciones continuas en el dominio de f'(x), por lo cual les es aplicable el Teorema de Bolzano, que dice que "si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c\in(a,\ b)$ tal que $f(c)=0$".

Aplicándolo a la función f'(x) en el intervalo $(2,\ 3)$:

$$f'(2)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2^{\cos\pi}}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\cos\pi-\frac{\pi}{2}\cdot L2\cdot sen\,\pi\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2^{-1}}\cdot\left(-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot L2\cdot 0\right)=-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}<0$$

$$f'(3)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3^{\cos\frac{3\pi}{2}}}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\cos\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot L3\cdot sen\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3^0}\cdot\left[\frac{1}{3}\cdot 0-\frac{\pi}{2}\cdot L3\cdot(-1)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\pi L3}{2}=\frac{\pi L3}{4}>0$$

Lo anterior demuestra que lo pedido.

****

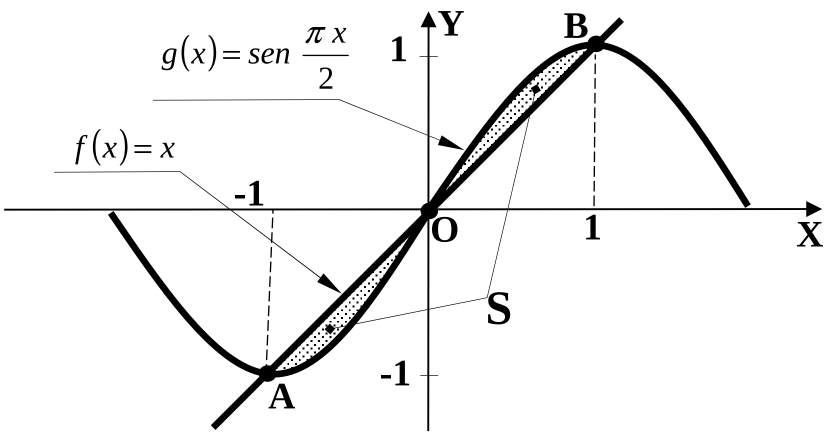
2º) Encuentra los tres puntos en que se cortan las funciones $f(x)=x$ y $g(x)=sen\frac{\pi x}{2}$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre sus gráficas.

Los puntos de corte de las funciones se obtienen de la igualdad de ambas funciones:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x=sen\frac{\pi x}{2} \Rightarrow \underline{x_1=-1} \;;;\; \underline{x_2=0} \;;;\; \underline{x_3=1}.$$

Los puntos de corte son los siguientes: $\underline{\underline{A(-1, -1)}}$, $\underline{\underline{O(0, 0)}}$ y $\underline{\underline{B(1, 1)}}$.

La representación gráfica de la situación se refleja en el gráfico, donde puede apreciarse la simetría que tienen con respecto al origen de ambas funciones por cumplirse que $f(-x)=-f(x)$ y $g(-x)=-g(x)$.



Observando la figura y teniendo en cuenta la simetría de las gráficas, teniendo en cuenta que:

$$I=\int sen\frac{\pi x}{2}\cdot dx \Rightarrow \left\{\frac{\pi x}{2}=t \;;;\; \frac{\pi}{2}dx=dt \;;;\; dx=\frac{2}{\pi}dt\right\} \Rightarrow \frac{2}{\pi}\int sen\ t\cdot dt=\frac{2}{\pi}\cos\ t=\underline{\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}=I},$$

la superficie pedida es la siguiente:

$$S=2\cdot\int_0^1[g(x)-f(x)]\cdot dx=2\cdot\int_0^1[g(x)-f(x)]\cdot dx=2\cdot\int_0^1\left(sen\frac{\pi x}{2}-x\right)\cdot dx=$$

$$=2\cdot\left[\frac{2}{\pi}\cdot sen\frac{\pi x}{2}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=2\cdot\left[\left(\frac{2}{\pi}\cdot sen\frac{\pi}{2}-\frac{1^2}{2}\right)-0\right]=2\cdot\left(\frac{2}{\pi}\cdot 1-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{\pi}-1=\underline{\underline{\frac{4-\pi}{\pi}\ u^2=S}}$$

****