

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE NAVARRA****JUNIO - 2009**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Responde a una opción del Grupo 1 y a una opción del Grupo 2.

GRUPO 1**OPCIÓN A**

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real α y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x + y - az = 0 \\ -x + ay + az = 2a + 1 \\ x + y + (a^3 - 2a)z = a - 1 \end{cases}.$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ -1 & a & a \\ 1 & 1 & a^3 - 2a \end{pmatrix} \quad ; \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a & 0 \\ -1 & a & a & 2a + 1 \\ 1 & 1 & a^3 - 2a & a - 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ -1 & a & a \\ 1 & 1 & a^3 - 2a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 - 2 \end{vmatrix} = a \cdot [a(a^2 - 2) + 1 + 1 + a - 1 + (a^2 - 2)] =$$

$$= a(a^3 - 2a + a + 1 + a^2 - 2) = a(a^3 + a^2 - a - 1) = 0 \Rightarrow \underline{a_1 = 0}$$

Resolviendo por Ruffini la ecuación $a^3 + a^2 - a - 1 = 0$, se obtienen las raíces siguientes: $\underline{a_2 = a_3 = -1}$ y $\underline{a_4 = 1}$.

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1 \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible det er min ado}$$

$$\underline{\text{Para } a=0} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Equivalente a } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 - 1 = -1 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}$$

$$\underline{\underline{\text{Para } a=0 \Rightarrow \text{Rango } M = 2 \ ; \ ; \text{Rango } M' = 3 \Rightarrow \text{Incompatible}}}$$

$$\underline{\text{Para } a=-1} \Rightarrow \begin{cases} M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_2 = C_3\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M = 1} \\ M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_2 = C_3\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{\text{Para } a=-1 \Rightarrow \text{Rango } M = 1 \ ; \ ; \text{Rango } M' = 2 \Rightarrow \text{Incompatible}}}$$

$$\underline{\text{Para } a=1} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_3\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2}$$

$$\underline{\underline{\text{Para } a=1 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}}}$$

Resolvemos para el caso de $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \\ a \neq -1 \end{cases}$, compatible determinado, mediante la Regla

de Cramer:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -a \\ 2a+1 & a & a \\ a-1 & 1 & a^3-2a \end{vmatrix}}{a(a^3+a^2-a-1)} = \frac{a \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2a+1 & a & 1 \\ a-1 & 1 & a^2-2 \end{vmatrix}}{a(a-1)(a+1)^2} = \frac{(a-1) - (2a+1) + a(a-1) - (2a+1)(a^2-2)}{(a-1)(a+1)^2} = \\ &= \frac{a-1-2a-1+a^2-a-(2a^3-4a+a^2-2)}{(a-1)(a+1)^2} = \frac{a^2-2a-2-2a^3-a^2+4a+2}{(a-1)(a+1)^2} = \frac{-2a^3+2a}{(a-1)(a+1)^2} = \\ &= \frac{-2a(a^2-1)}{(a-1)(a+1)^2} = \frac{-2a(a+1)(a-1)}{(a-1)(a+1)^2} = \underline{\underline{\frac{-2a}{(a+1)} = x}} \end{aligned}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -a \\ -1 & 2a+1 & a \\ 1 & a-1 & a^3-2a \end{vmatrix}}{a(a^3+a^2-a-1)} = \frac{a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2a+1 & 1 \\ 1 & a-1 & a^2-2 \end{vmatrix}}{a(a-1)(a+1)^2} = \frac{(2a+1)(a^2-2) + (a-1) + (2a+1) - (a-1)}{(a-1)(a+1)^2} =$$

$$= \frac{2a^3 - 4a + a^2 - 2 + a - 1 + 2a + 1 - a + 1}{(a-1)(a+1)^2} = \frac{2a^3 + a^2 - 2a - 1}{(a-1)(a+1)^2} = \frac{(a-1)(a+1)(2a+1)}{(a-1)(a+1)^2} = \frac{2a+1}{a+1} = y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & a & 2a+1 \\ 1 & 1 & a-1 \end{vmatrix}}{a(a^3+a^2-a-1)} = \frac{a(a-1) + (2a+1) - (2a+1) + (a-1)}{a(a-1)(a+1)^2} = \frac{a^2 - a + a - 1}{a(a-1)(a+1)^2} = \frac{a^2 - 1}{a(a-1)(a+1)^2} =$$

$$= \frac{(a+1)(a-1)}{a(a-1)(a+1)^2} = \frac{1}{a(a+1)} = z$$

Resolvemos para el caso de $a = 1$: compatible indeterminado. El sistema resulta

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + y + z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}, \text{ equivalente al sistema } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -x + y + z = 3 \end{cases}.$$

Parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo $z = \lambda$, resulta:

$$\begin{cases} x + y = \lambda \\ -x + y = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow 2y = 3 \;; \; \underline{y = \frac{3}{2}} \;; \; x = \lambda - y = \lambda - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} + \lambda = x$$

$$\underline{\text{Solución para } a=1} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = -\frac{3}{2} + \lambda \\ y = \frac{3}{2} \\ z = \lambda \end{array} \right\} \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

2º) Encuentra el punto de la recta $r \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+2}{1}$ que forma un triángulo isósceles con los puntos P(1, 3, -2) y Q(3, 1, 0).

Este problema, en teoría, tiene varias interpretaciones, dependiendo de las distancias de los puntos P y Q a r y de la distancia entra P y Q.

La distancia entre los puntos es:

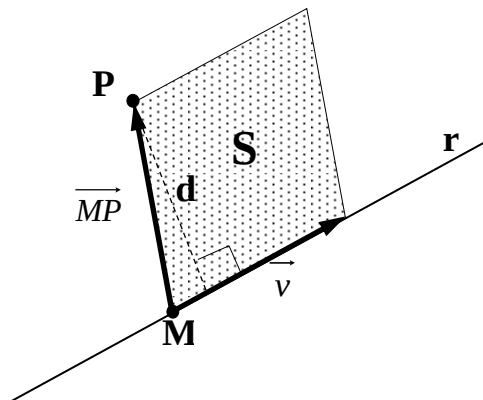
$$\overline{PQ} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-3)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} = \overline{PQ}$$

La distancia de un punto P a la recta r se determina del modo siguiente:

La recta r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$ y un punto genérico

de la misma es $A(-2 + \lambda, 1 - 2\lambda, -2 + \lambda)$.

Un punto y un vector director de r son: $M(-2, 1, -2)$ y $\vec{v} = (1, -2, 1)$.



Teniendo en cuenta que $S = d \cdot \left| \vec{v} \right|$ y que también puede ser $S = \left| \vec{v} \wedge \overrightarrow{MP} \right|$, se deduce que la distancia es: $d(N, r) = \frac{\left| \vec{v} \wedge \overrightarrow{MP} \right|}{\left| \vec{v} \right|}$.

$$\overrightarrow{MP} = P - M = (1, 3, -2) - (-2, 1, -2) = (3, 2, 0) = \overrightarrow{MP}$$

$$\begin{aligned} d(P, r) &= \frac{\left| \overrightarrow{MP} \wedge \vec{v} \right|}{\left| \vec{v} \right|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{\left| 2i - 6k - 2k - 3j \right|}{\sqrt{6}} = \frac{\left| 2i - 3j - 8k \right|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2^2 + 3^2 + 8^2}}{\sqrt{6}} = \\ &= \frac{\sqrt{4 + 9 + 64}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{77}{6}} = \sqrt{12.83} = d(P, r) > \overline{PQ} \end{aligned}$$

La distancia del punto Q a la recta r es la siguiente:

Teniendo en cuenta que $S = d \cdot \left| \vec{v} \right|$ y que también puede ser $S = \left| \vec{v} \wedge \overrightarrow{MQ} \right|$, se

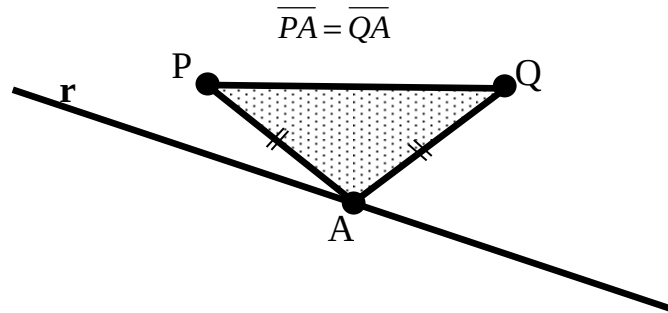
deduce que la distancia es: $d(Q, r) = \frac{|\vec{v} \wedge \overrightarrow{MQ}|}{|\vec{v}|}$.

$$\overrightarrow{MQ} = Q - M = (3, 1, 0) - (-2, 1, -2) = (5, 0, 2) = \overrightarrow{MQ}$$

$$d(Q, r) = \frac{|\overrightarrow{MQ} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|2j - 10k + 4i - 5j|}{\sqrt{6}} = \frac{|4i - 3j - 10k|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{4^2 + 3^2 + 10^2}}{\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{\sqrt{16 + 9 + 100}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{125}{6}} = \sqrt{20\overline{83}} = d(Q, r) > \overline{PQ}$$

La única solución posible es que $\overline{PA} = \overline{QA}$



$$\overline{PA} = \sqrt{(-2 + \lambda - 1)^2 + (1 - 2\lambda - 3)^2 + (-2 + \lambda + 2)^2} = \sqrt{(\lambda - 3)^2 + (-2\lambda - 2)^2 + \lambda^2} =$$

$$= \sqrt{\lambda^2 - 6\lambda + 9 + 4\lambda^2 + 8\lambda + 4 + \lambda^2} = \sqrt{6\lambda^2 + 2\lambda + 13} = \overline{PA}$$

$$\overline{QA} = \sqrt{(-2 + \lambda - 3)^2 + (1 - 2\lambda - 1)^2 + (-2 + \lambda - 0)^2} = \sqrt{(\lambda - 5)^2 + (-2\lambda)^2 + (\lambda - 2)^2} =$$

$$= \sqrt{\lambda^2 - 10\lambda + 25 + 4\lambda^2 + \lambda^2 - 4\lambda + 4} = \sqrt{6\lambda^2 - 14\lambda + 29} = \overline{QA}$$

$$\overline{PQ} = \overline{PA} \Rightarrow \sqrt{6\lambda^2 + 2\lambda + 13} = \sqrt{6\lambda^2 - 14\lambda + 29} \quad ; ; \quad 2\lambda + 13 = -14\lambda + 29 \quad ; ; \quad 16\lambda = 16 \quad ; ; \quad \underline{\lambda = 1}$$

El punto de la recta es A(-1, -1, -1).

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, calcula A^3 y A^{38} .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-7 & -14+21 \\ 2-3 & -7+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^2$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+7 & 21-21 \\ -2+2 & 7-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A^3$$

Teniendo en cuenta que $A^3 = I$, la potencia n-ésima de A es equivalente a la potencia de A cuyo exponente es el resto de la división de n entre tres.

$$\text{En general: } A^n = A^r \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} n \\ \textcircled{r} \end{matrix} \begin{matrix} \text{---} \\ c \end{matrix}$$

$$\text{En el caso que nos ocupa es: } \Rightarrow \begin{matrix} 38 \\ \textcircled{2} \end{matrix} \begin{matrix} \text{---} \\ 12 \end{matrix} \Rightarrow \underline{A^{38} = A^2}$$

$$\underline{\underline{A^{38} = A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}}$$

2º) Halla la ecuación continua de la recta r que es perpendicular común a las rectas

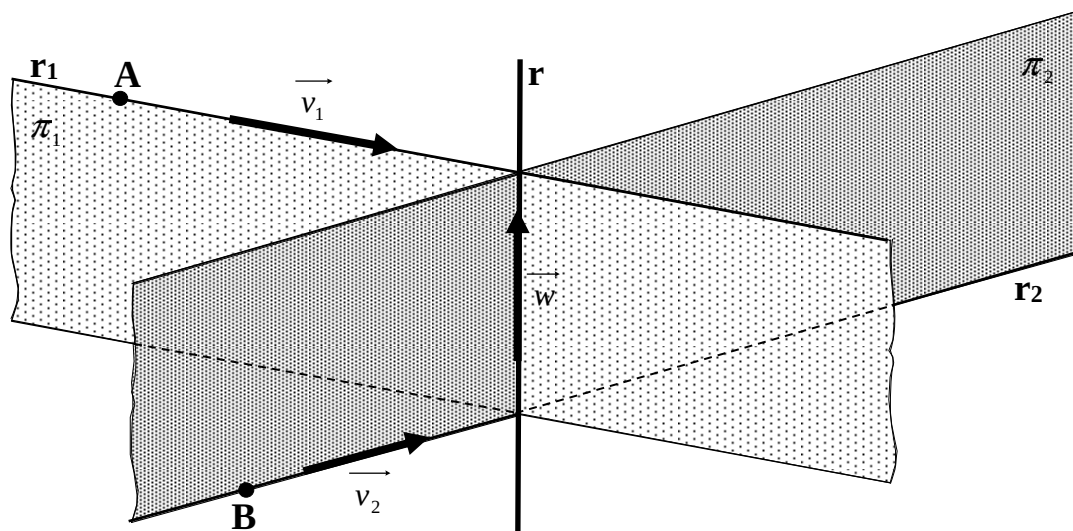
$$r_1 \equiv \begin{cases} x+3y-z+8=0 \\ x+4y-2z+12=0 \end{cases} \text{ y } r_2 \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-5}{-2}.$$

La expresión de la recta r_1 por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x+3y-z+8=0 \\ x+4y-2z+12=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \begin{cases} x+3y=-8+\lambda \\ x+4y=-12+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-3y=8-\lambda \\ x+4y=-12+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{y=-4+\lambda} ;;$$

$$x=-8+\lambda-3y=-8+\lambda+12-3\lambda=\underline{4-2\lambda=x} \Rightarrow \underline{r_1 \equiv \begin{cases} x=4-2\lambda \\ y=-4+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

El procedimiento para hallar la ecuación de la recta r se refleja en el gráfico siguiente.



1.- Determinamos los puntos $A \in r_1$ y $B \in r_2$: $A(4, -4, 0)$ y $B(0, -2, 5)$.

2.- Hallamos unos vectores directores de las rectas: $\vec{v}_1 = (-2, 1, 1)$ y $\vec{v}_2 = (1, 1, -2)$.

3.- Obtenemos un vector $\vec{w}$, perpendicular a $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, que es cualquier vector que sea linealmente dependiente del producto vectorial de $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$:

$$\vec{w} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2i + j - 2k - k - i - 4j = -3i - 3j - 3k \Rightarrow \underline{\vec{w} = (1, 1, 1)}.$$

4.- Determinamos los planos π_1 y π_2 , de la forma siguiente:

$$\pi_1(A; \vec{v}_1, \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y+4 & z \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ;; \quad (x-4) + (y+4) - 2z - z - (x-4) + 2(y+4) = 0 \quad ;;$$

$$3(y+4) - 3z = 0 \quad ;; \quad y + 4 - z = 0 \Rightarrow \underline{\pi_1 \equiv y - z + 4 = 0}$$

$$\pi_2(B; \vec{v}_2, \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ;; \quad x - 2(y+2) + (z-5) - (z-5) + 2x - (y-2) = 0 \quad ;;$$

$$3x - 3(y+2) = 0 \quad ;; \quad x - (y+2) = 0 \Rightarrow \underline{\pi_2 \equiv x - y - 2 = 0}$$

La recta r pedida es la que determinan los planos π_1 y π_2 : $r \equiv \begin{cases} y - z + 4 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$.

La expresión continua de r se obtiene de la siguiente forma:

$$r \equiv \begin{cases} y - z + 4 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{y = \lambda \quad ;; \quad x = 2 + \lambda \quad ;; \quad z = 4 + \lambda} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 + \lambda \end{cases}}.$$

$$\underline{\underline{r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{1} \quad o \quad también: \quad r \equiv x-2 = y = z-4}}}$$

GRUPO 2

OPCIÓN C

1º) Halla las integrales indefinidas: $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 - 2x - 3}$ e $I_2 = \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$.

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 - 2x - 3} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 = 0 \quad ; \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow x_1 = -1 \quad ; \quad x_2 = 3 \\ x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = \int \frac{dx}{x^2 - 2x - 3} = \int \frac{dx}{(x + 1)(x - 3)} = \int \left(\frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 3} \right) \cdot dx = A \int \frac{dx}{x + 1} + B \int \frac{dx}{x - 3} = I_1 \quad (*)$$

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 3} = \frac{Ax - 3A + Bx + B}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(A + B)x + (-3A + B)}{x^2 - 2x - 3} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ -3A + B = 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} A + B = 0 \\ 3A - B = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow 4A = -1 \quad ; \quad A = -\frac{1}{4} \quad ; \quad B = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{Sustituyendo éstos valores en (*):}$$

$$I_1 = -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x + 1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x - 3} = \frac{1}{4} [L|x - 3| - L|x + 1|] + C = \frac{1}{4} L \left| \frac{x - 3}{x + 1} \right| + C = I_1$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} \Rightarrow \left\{ x^2 - 2x + 2 = 0 \quad ; \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} \Rightarrow x \notin R \right\} \Rightarrow I_2 = \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 1 + 1} =$$

$$= \int \frac{dx}{(x - 1)^2 + 1} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - 1 = t \\ dx = dt \end{array} \right\} \Rightarrow I_2 = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \text{arc tag } t + C = \underline{\underline{\text{arc tag } (x - 1) + C = I_2}}$$

2º) Demuestra que la función $f(x) = L(1 + x \operatorname{sen} x)$ tiene un máximo relativo en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo en un punto es que su derivada se anule para ese punto: $f'(x) = \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x}{1 + x \operatorname{sen} x}$.

La función $f'(x)$ es continua en su dominio, que es $\mathbb{R}$, por lo cual es continua y derivable en cualquier intervalo considerado, por lo cual le es aplicable el Teorema de Bolzano, que dice que: “si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ ”.

Aplicando el Teorema de Bolzano a la función $f'(x) = \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x}{1 + x \operatorname{sen} x}$ en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$:

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x}{1 + x \operatorname{sen} x} \Rightarrow \begin{cases} f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = \frac{1 + \frac{\pi}{2} \cdot 0}{1 + \frac{\pi}{2} \cdot 1} = \frac{1}{\frac{2+\pi}{2}} = \frac{2}{2+\pi} > 0 \\ f'(\pi) = \frac{\operatorname{sen} \pi + \pi \cdot \cos \pi}{1 + \pi \cdot \operatorname{sen} \pi} = \frac{0 + \pi \cdot (-1)}{1 + \pi \cdot 0} = \frac{-\pi}{1} = -\pi < 0 \end{cases}$$

Lo anterior demuestra que la función $f(x)$ tiene un extremo relativo en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Considerando la continuidad de la función y teniendo en cuenta que la derivada es positiva para $x = \frac{\pi}{2}$ (función creciente) y negativa para $x = \pi$ (función decreciente), necesariamente la función $f(x)$

Tiene un máximo relativo en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, c.q.d.

OPCIÓN D

1º) Demuestra que la derivada de la función $f(x) = \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^{\sin x}\right)}$ se anula en algún punto del intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Menciona los resultados teóricos que utilices.

$$f(x) = \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^{\sin x}\right)} = \sqrt{\sin u} = \sqrt{z}$$

$$f'(x) = \frac{z'}{2\sqrt{z}} \Rightarrow \underline{z = \sin u} \quad ; \quad \underline{z' = u' \cdot \cos u} \Rightarrow f'(x) = \frac{u' \cdot \cos u}{2\sqrt{\sin u}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{u = \frac{\pi}{4} \cdot 3^{\sin x}} \quad ; \quad \underline{Lu = L\pi - L4 + \sin x \cdot L3} \quad ; \quad \underline{\frac{u'}{u} = 0 - 0 + L3 \cdot \cos x} \quad ;$$

$$\underline{u' = u \cdot L3 \cdot \cos x = \frac{\pi}{4} \cdot 3^{\sin x} \cdot L3 \cdot \cos x = \frac{\pi L3}{4} \cdot 3^{\sin x} \cdot \cos x = u'}$$

$$\underline{z' = u' \cdot \cos u = \left(\frac{\pi L3}{4} \cdot 3^{\sin x} \cdot \cos x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^{\sin x}\right) = \frac{\pi L3}{4} \cdot 3^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^{\sin x}\right) = z'}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{\pi L3}{4} \cdot 3^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^{\sin x}\right)}{2\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^{\sin x}\right)}} = \frac{\pi \cdot L3 \cdot 3^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^{\sin x}\right)}{8\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^{\sin x}\right)}} = f'(x)$$

La función $f'(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, por consiguiente le es aplicable el Teorema de Bolzano en cualquier intervalo considerado.

El Teorema de Bolzano dice que: “si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ ”.

Aplicando el Teorema del Bolzano a la función $f'(x)$ en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$f'(0) = \frac{\pi \cdot L3 \cdot 3^{\sin 0} \cdot \cos 0 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^{\sin 0}\right)}{8\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^{\sin 0}\right)}} = \frac{\pi \cdot L3 \cdot 3^0 \cdot 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^0\right)}{8\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^0\right)}} = \frac{\pi \cdot L3 \cdot \cos \frac{\pi}{4}}{8\sqrt{\sin \frac{\pi}{4}}} =$$

$$= \frac{\pi \cdot L 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{8 \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{\pi \cdot L 3 \cdot \sqrt{2}}{16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi \cdot L 3 \cdot 2}{16 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\pi \cdot L 3}{8 \cdot \sqrt{2}} = \underline{f'(0) > 0}$$

$$f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi \cdot L 3 \cdot 3^{\sin \frac{\pi}{2}} \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^{\sin \frac{\pi}{2}} \right)}{8 \sqrt{\sin \left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^{\sin \frac{\pi}{2}} \right)}} = \frac{\pi \cdot L 3 \cdot 3^1 \cdot 0 \cdot \cos \frac{3\pi}{4}}{8 \sqrt{\sin \left(\frac{\pi}{4} \cdot 3^1 \right)}} = \frac{0^-}{8 \sqrt{\sin \frac{3\pi}{4}}} = \underline{0^-}$$

La expresión $f'(\frac{\pi}{2}) = 0^-$ debe interpretarse que $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f'(x) = 0^- < 0$, con lo que debemos concluir que la función $f'(x)$ cumple los requisitos del Teorema de Bolzano en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, y en consecuencia:

La función $f'(x)$ se anula, al menos una vez, en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, c.q.d.

2º) Sabemos que las funciones $f(x) = \pi x - x^2$ y $g(x) = \sin x$ se cortan sólo en dos puntos. Encuentra esos dos puntos y calcula el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

Los puntos de corte de las funciones se hallan de la igualación de sus ecuaciones:

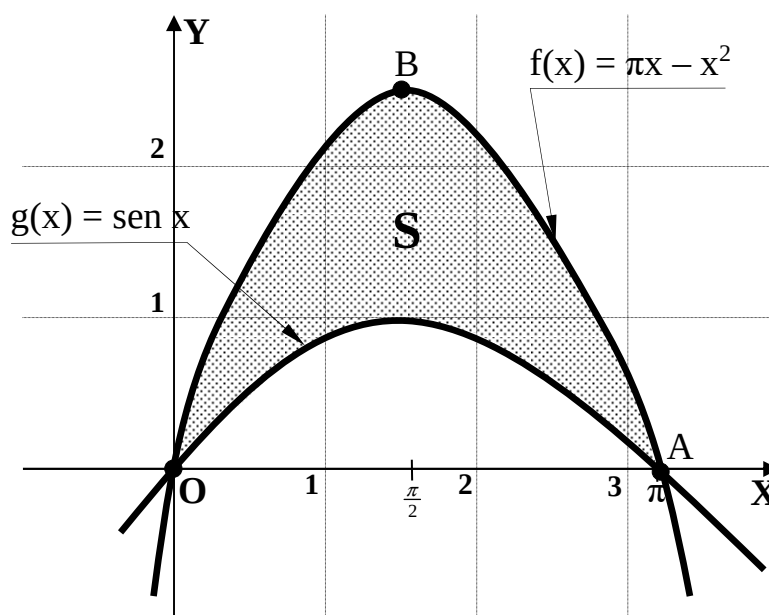
$$f(x) = g(x) \Rightarrow \pi x - x^2 = \sin x \quad ; ; \quad x^2 - \pi x + \sin x = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 0} \quad ; ; \quad \underline{x_2 = \pi}.$$

Los puntos de corte de las funciones son $O(0, 0)$ y $A(\pi, 0)$.

El punto máximo de la parábola cóncava ($\cap$) $f(x) = \pi x - x^2$ es el siguiente:

$$f'(x) = \pi - 2x = 0 \quad ; ; \quad x = \frac{\pi}{2} \cong 1'57 \quad ; ; \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi \cdot \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4} \cong 2'47 \Rightarrow \underline{B(1'57, 2'47)}.$$

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la siguiente:



Como puede observarse, todas las ordenadas correspondientes a la función $f(x)$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función $g(x)$ en el intervalo correspondiente al área a calcular.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_0^{\pi} [(\pi x - x^2) - \sin x] \cdot dx = \int_0^{\pi} (\pi x - x^2 - \sin x) \cdot dx = \left[\frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cos x \right]_0^{\pi} = \\ &= \left(\frac{\pi \cdot \pi^2}{2} - \frac{\pi^3}{3} + \cos \pi \right) - (\cos 0) = \frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3} - 1 - 1 = \frac{3\pi^3 - 2\pi^3 - 12}{6} = \frac{\pi^3 - 12}{6} \cong \frac{31'01 - 12}{6} = \\ &= \frac{19'01}{6} = \underline{\underline{3'17 \text{ u}^2}} = S \end{aligned}$$
