

**PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)****UNIVERSIDAD DE NAVARRA****SEPTIEMBRE - 2005**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

**MATEMÁTICAS II****Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Responde a una pregunta de cada una de las opciones.

**OPCIÓN A**

1º) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro  $a$  y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x - ay + z = 0 \\ x + 3z = a - 2 \\ -x + 2ay + (a + 3)z = a^2 + a - 6 \end{cases}.$$

-----

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2a & a+3 \end{pmatrix} \quad y \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & -a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & a-2 \\ -1 & 2a & a+3 & a^2+a-6 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro  $a$  es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2a & a+3 \end{vmatrix} = 2a + 3a - 6a + a(a+3) = -a + a^2 + 3a = a(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = -2 \end{cases}$$

Para  $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Deter min ado}$

---

$$\text{Para } a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \text{ Equivalente a la matriz } M'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = -18 + 2 + 6 + 6 = -4 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}$$

Para  $a = 0 \Rightarrow \text{Rango } M = 2$  ;  $\text{Rango } M' = 3 \Rightarrow \text{Incompatible}$

$$\text{Para } a = -2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -4 \\ -1 & -4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Veamos cual es el rango de } M':$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 16 + 8 = 16 - 16 = 0 \\ \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 4 + 4 + 4 = 12 - 12 = 0 \\ \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -24 + 16 + 8 = 24 - 24 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2}$$

Para  $a = -2 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$

En primer lugar resolvemos para el caso de compatible determinado, para los valores reales de  $x$  distintos de 0 y -2, aplicando la Regla de Cramer:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & -a & 1 \\ a-2 & 0 & 3 \\ a^2+a-6 & 2a & a+3 \end{vmatrix}}{a(a+2)} = \frac{2a(a-2) - 3a(a^2+a-6) + a(a-2)(a+3)}{a(a+2)} = \\ &= \frac{2a^2 - 4a - 3a^3 - 3a^2 + 18a + a^3 + 3a^2 - 2a^2 - 6a}{a(a+2)} = \frac{-2a^3 + 8a}{a(a+2)} = \frac{-2a(a^2 - 4)}{a(a+2)} = \\ &= \frac{-2(a+2)(a-2)}{a+2} = \underline{\underline{2(2-a) = x}} \end{aligned}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & a-2 & 3 \\ -1 & a^2+a-6 & a+3 \end{vmatrix}}{a(a+2)} = \frac{(a-2)(a+3) + (a^2+a-6) + (a-2) - 3(a^2+a-6)}{a(a+2)} =$$

$$= \frac{a^2 + 3a - 2a - 6 - 2(a^2 + a - 6) + a - 2}{a(a+2)} = \frac{a^2 + 2a - 8 - 2a^2 - 2a + 12}{a(a+2)} = \frac{-a^2 + 4}{a(a+2)} =$$

$$= \frac{-(a+2)(a-2)}{a(a+2)} = \frac{2-a}{a} = y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a & 0 \\ 1 & 0 & a-2 \\ -1 & 2a & a^2 + a - 6 \end{vmatrix}}{a(a+2)} = \frac{a(a-2) - 2a(a-2) + a(a^2 + a - 6)}{a(a+2)} =$$

$$= \frac{a^2 - 2a - 2a^2 + 4a + a^3 + a^2 - 6a}{a(a+2)} = \frac{a^3 - 4a}{a(a+2)} = \frac{a(a^2 - 4)}{a(a+2)} = \frac{(a+2)(a-2)}{a+2} = \underline{\underline{a-2}} = z$$

Resolvemos ahora el caso de compatible indeterminado, que resulta para  $a = -2$ , en cuyo caso resulta el siguiente sistema: 
$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 3z = -4 \\ -x - 4y + z = -4 \end{cases}$$
; despreciando una ecuación, por ejemplo la tercera, y parametrizando la variable  $z$ :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + 3z = -4 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow x = -4 - 3\lambda \Rightarrow x + 2y + z = 0 \;; \; -4 - 3\lambda + 2y + \lambda = 0 \;;$$

$$2y = 4 + 2\lambda \;; \; \underline{y = 2 + \lambda}$$

$$\text{Solución : } \begin{cases} x = -4 - 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \forall \lambda \in R$$

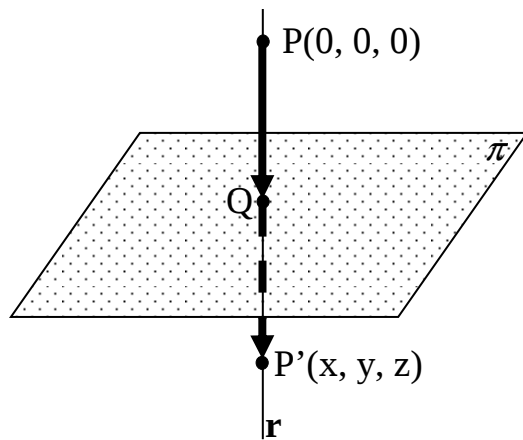

---

\*\*\*\*\*

2º) Halla el simétrico del punto  $P(0, 0, 0)$  respecto del plano  $\pi \equiv 2x - y + z + 6 = 0$ .

-----

Un vector normal al plano  $\pi$  es  $\vec{n} = (2, -1, 1)$ .



La recta  $r$  es la que pasa por el punto  $P$  y es perpendicular al plano, por lo tanto su vector director puede ser el vector normal del plano, y entonces:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2k \\ y = -k \\ z = k \end{cases}$$

El punto  $Q$ , intersección del plano  $\pi$  con la recta  $r$ , tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo tanto:

$$\pi \equiv 2x - y + z + 6 = 0 \Rightarrow (4k) - (-k) + k + 6 = 0 \;; \; 6k + 6 = 0 \;; \; k + 1 = 0 \;; \; \underline{k = -1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Q(-2, 1, -1)}$$

Para que  $P'$  sea el punto simétrico de  $P$  con respecto a  $\pi$ , tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \Rightarrow Q - P = P' - Q \;; \; (-2, 1, -1) - (0, 0, 0) = (x, y, z) - (-2, 1, -1) \;;$$

$$(-2, 1, -1) = (x + 2, y - 1, z + 1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 2 = -2 \rightarrow \underline{x = -4} \\ y - 1 = \quad \rightarrow \underline{y = 2} \\ z + 1 = -1 \rightarrow \underline{z = -2} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{P'(-4, 2, -2)}}$$

\*\*\*\*\*

## OPCIÓN B

1º) Siendo las matrices  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  y  $B = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ , calcular el valor del determinante de la matriz  $A + B$ .

-----

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A + B| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 2 + 6 - 3 - 4 - 4 = 12 - 11 = 1$$

$$\underline{\underline{|A + B| = 1}}$$

\*\*\*\*\*

2º) Hallar la ecuación continua de la recta  $s$  que pasa por el punto  $P(1, 1, 0)$  y corta a las rectas  $r_1 \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$  y  $r_2 \equiv \begin{cases} 3x+2y+z-1=0 \\ x-2y-z-3=0 \end{cases}$ .

-----

En primer lugar determinamos un plano  $\alpha$  que contenga a la recta  $r_1$  y al punto  $P$ .

Un punto y un vector director de la recta  $r_1$  son  $A(0, 1, 1)$  y  $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 1)$ .

Los puntos  $A$  y  $P$  determinan el vector  $\overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{AP} = P - A = (1, 0, -1)$ .

La expresión general del plano  $\alpha$  es la siguiente:

$$\alpha(P; \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{w_1}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad -(x-1) + (y-1) - z + (y-1) = 0 \quad ; ;$$

$$-(x-1) + 2(y-1) - z = 0 \quad ; ; \quad -x + 1 + 2y - 2 - z = 0 \Rightarrow \underline{\alpha \equiv x - 2y + z + 1 = 0}$$

Ahora determinamos un plano  $\beta$  que contenga a la recta  $r_2$  y al punto  $P$ .

La expresión de la recta  $r_2$  por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r_2 \equiv \begin{cases} 3x+2y+z-1=0 \\ x-2y-z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \quad ; ; \quad \begin{cases} 3x-2y=1-\lambda \\ x-2y=3+\lambda \end{cases} \Rightarrow 4x=4 \quad ; ; \quad \underline{x=1}$$

$$x-2y=3+\lambda \quad ; ; \quad 1-2y=3+\lambda \quad ; ; \quad 2y=-2-\lambda \quad ; ; \quad y=-1-\frac{1}{2}\lambda \Rightarrow r_2 \equiv \underline{\begin{cases} x=1 \\ y=-1-\frac{1}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Un punto y un vector director de la recta  $r_2$  son  $B(1, -1, 0)$  y  $\overrightarrow{v_2} = (0, -1, 2)$ .

Los puntos  $B$  y  $P$  determinan el vector  $\overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{BP} = P - B = (0, 2, 0)$ .

La expresión general del plano  $\beta$  es la siguiente:

$$\beta(P; \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w_2}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad -4(x-1) = 0 \Rightarrow \underline{\beta \equiv x-1=0}$$

La recta pedida  $s$ , es la intersección de los planos  $\alpha$  y  $\beta$  por lo que su expresión

por dos ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$$

---

\*\*\*\*\*

## OPCIÓN C

1º) Dada la función  $f(x) = x^3 + \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2}$ , demuestra que existe  $\alpha \in (0, 1)$  tal que  $f'(\alpha) = 2$ . Di qué teorema utilizas.

-----

Teniendo en cuenta que la función  $f(x)$  es continua y derivable en su dominio, que es  $\mathbb{R}$ , por ser suma de dos funciones continuas y derivables es sus respectivos dominios que ambos son  $\mathbb{R}$ , le es aplicable el Teorema del Valor Medio o de Lagrange en cualquier intervalo finito considerado.

El Teorema del Valor Medio dice:

Si  $f(x)$  es una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $(a, b)$ , entonces existe al menos un punto  $c \in (a, b)$  que cumple:  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

$$f'(\alpha) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{\left(1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) - (0 + \operatorname{sen} 0)}{1 - 0} = \frac{(1 + 1) - 0}{1} = 2 = f'(\alpha) \quad \underline{\text{c.q.d.}}$$

En efecto, existe un valor  $\alpha \in (0, 1)$  tal que  $f'(\alpha) = 2$ .

\*\*\*\*\*

2º) Calcular los siguientes límites:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{e^{-x}+x-1}$ .

-----

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}} &= \frac{1}{\infty-\infty} \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}[(x+1)-(x-1)]} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}(x+1-x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x}} = \frac{\infty+\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}}{\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\sqrt{\frac{x-1}{x}}}{2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{2} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}+\sqrt{1-\frac{1}{\infty}}}{2} = \frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{e^{-x}+x-1} = \frac{1-\cos 0}{e^{-0}+0-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{-e^{-x}+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1-e^{-x}} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{e^{-x}+0} = \frac{\cos 0}{e^{-0}} = \frac{1}{1} = 1$$

\*\*\*\*\*

## OPCIÓN D

1º) Halla los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones definidas en el intervalo  $[0, 4]$ . Dibuja sus gráficas a partir de esos datos y los cortes con los ejes.

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x \quad \text{si } 0 \leq x \leq 4 ; \quad g(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x \quad \text{si } 0 \leq x \leq 4$$

-----

$$f(x) = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} \quad ; ; \quad f'(x) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi x}{2} = \pi \cos \frac{\pi x}{2} = \underline{f'(x)}$$

$$f''(x) = -\pi \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} = -\frac{\pi^2}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} = \underline{f''(x)}$$

$$f'(x) = 0 \text{ en } [0, 4] \Rightarrow \pi \cos \frac{\pi x}{2} = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 1} ; ; \underline{x_2 = 3}$$

$$f''(1) = -\frac{\pi^2}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{2} \cdot 1 = -\frac{\pi^2}{2} < 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo relativo para } x = 1}$$

$$f''(3) = -\frac{\pi^2}{2} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{2} \cdot (-1) = +\frac{\pi^2}{2} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo relativo para } x = 3}$$

$$f(1) = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máx.: } A(1, 2)}}$$

$$f(3) = 2 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = 2 \cdot (-1) = -2 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mín.: } B(3, -2)}}$$

$$g(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} \quad ; ; \quad \underline{g'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi x}{2}}$$

$$g''(x) = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} = -\frac{\pi^2}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} = \underline{g''(x)}$$

$$g'(x) = 0 \text{ en } [0, 4] \Rightarrow \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2} = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 1} ; ; \underline{x_2 = 3}$$

$$g''(1) = -\frac{\pi^2}{4} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{4} \cdot 1 = -\frac{\pi^2}{4} < 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo relativo para } x = 1}$$

$$g''(3) = -\frac{\pi^2}{4} \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi^2}{4} \cdot (-1) = +\frac{\pi^2}{4} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo relativo para } x = 3}$$

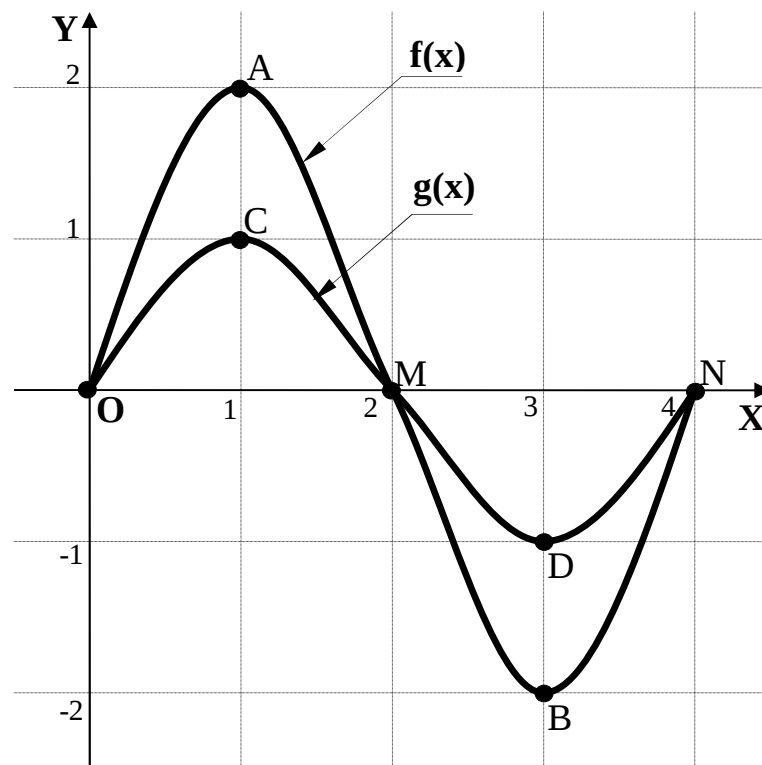
$$g(1) = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máx.: } C(1, 1)}} \quad ; \quad g(3) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mín.: } D(3, -1)}}$$

Los cortes con los ejes de las funciones en el intervalo  $[0, 4]$  son los siguientes:

$$f(x) = 2 \sin \frac{\pi x}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = 2 \quad ; \quad x_3 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{O(0, 0)}} \quad ; \quad \underline{\underline{M(2, 0)}} \quad ; \quad \underline{\underline{N(4, 0)}}$$

$$g(x) = \sin \frac{\pi x}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = 2 \quad ; \quad x_3 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{O(0, 0)}} \quad ; \quad \underline{\underline{M(2, 0)}} \quad ; \quad \underline{\underline{N(4, 0)}}$$

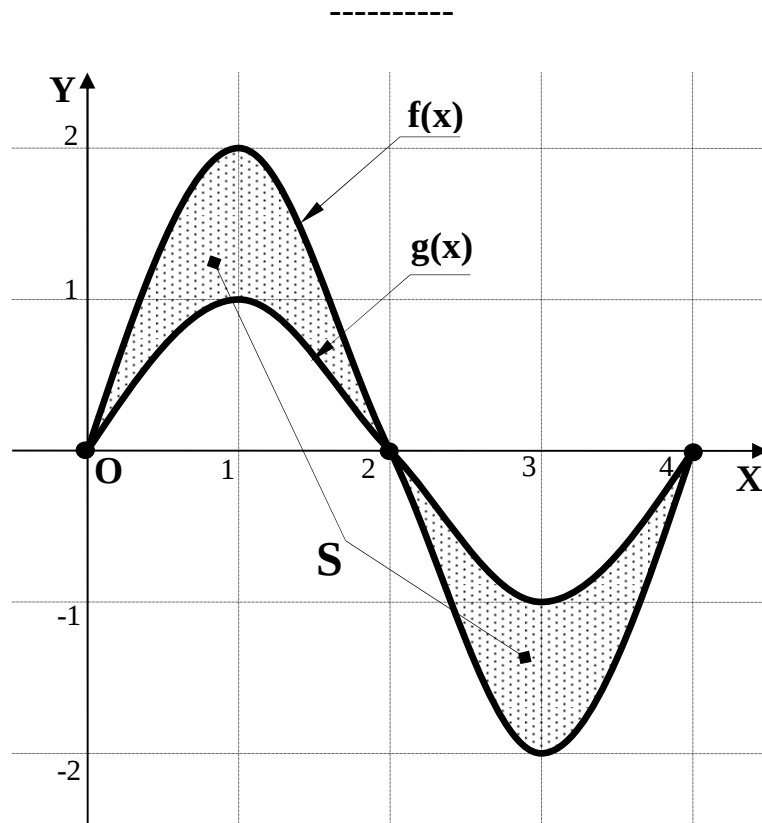
La representación gráfica de las funciones es, aproximadamente, la siguiente:



\*\*\*\*\*

2º) Calcular el área de la región del plano encerrada entre las gráficas de las funciones dadas en el apartado anterior; es decir, calcula la integral definida siguiente:

$$\int_0^4 [f(x) - g(x)] \cdot dx.$$



$$S = \int_0^4 [f(x) - g(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 [f(x) - g(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 \left( 2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} - \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} \right) \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \left[ \int_0^2 2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} \cdot dx - \int_0^2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} \cdot dx \right] = 2 \cdot \left[ 2 \cdot \int_0^2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} \cdot dx - \int_0^2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} \cdot dx \right] =$$

$$= 2 \cdot \int_0^2 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi x}{2} = t \rightarrow x = \frac{2}{\pi} \\ dx = \frac{2}{\pi} dt \end{array} \right\} \left\| \begin{array}{l} x = 2 \rightarrow t = \pi \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow S = 2 \cdot \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t \cdot \frac{2}{\pi} dt =$$

$$= \frac{4}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \operatorname{sen} t \cdot dt = \frac{4}{\pi} \cdot [-\cos t]_0^{\pi} = -\frac{4}{\pi} \cdot [\cos t]_0^{\pi} = -\frac{4}{\pi} \cdot (\cos \pi - \cos 0) = -\frac{4}{\pi} \cdot (-1 - 1) =$$

$$= \frac{8}{\pi} u^2 = S$$

\*\*\*\*\*