PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

SEPTIEMBRE - 2004

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contestar una opción en cada grupo de preguntas.

Grupo 1

Opción   A

1º) Estudiar el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro a y resolverlo en los casos en que sea compatible: $\begin{cases} x+2y+az=a-1 \\ x+(a+1)y+(2a+1)z=a \\ -x-2y+z=2-a \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a+1 & 2a+1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a & a-1 \\ 1 & a+1 & 2a+1 & a \\ -1 & -2 & 1 & 2-a \end{pmatrix}$$

El rango de M es, en función de a, el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a+1 & 2a+1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=a+1-2a-2(2a+1)+a(a+1)-2+2(2a+1)=$$

$$=-a-1+a^2+a=a^2-1=0 \;;;\; \underline{a_1=1} \;;;\; \underline{a_2=-1}$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{cases} a\neq 1 \\ a\neq -1 \end{cases} \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Determinado}}$$

Veamos que ocurre con el rango de M' para los valores de a que hacen que el rango de M sea dos:

$$Para\ \ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2=2C_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6-2-2-2=0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ de\ \ M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=1 \Rightarrow Rango\ \ M = Rango\ \ M'=2 < n^o\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Indeterminado}}$$

$$Para\ \ a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3=-C_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 4+2-2-6=-2 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ de\ \ M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=-1 \Rightarrow Rango\ \ M \neq Rango\ \ M' \Rightarrow Incompatible}}$$

Resolvemos en los casos de compatibilidad:

1º) En el caso de ser $a \neq 1\ \ y\ \ a \neq -1$ aplicamos la Regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a-1 & 2 & a \\ a & a+1 & 2a+1 \\ 2-a & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & a+1 & 2a+1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{a^2-1-2a^2+2(2-a)(2a+1)-a(a+1)(2-a)+2(a-1)(2a+1)-2a}{a^2-1}=$$

$$=\frac{-a^2-2a-1+2(4a+2-2a^2-a)-a(2a-a^2+2-a)+2(2a^2+a-2a-1)}{a^2-1}=$$

$$x=\frac{-a^2-2a-1+6a+4-4a^2-a^2+a^3-2a+4a^2-2a-2}{a^2-1}=\frac{a^3-2a^2+1}{a^2-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (El\ \ numerador\ \ se\ \ descompone\ \ por\ \ Ruffini) \Rightarrow \frac{(a-1)(a^2-a-1)}{(a+1)(a-1)}=\underline{\underline{\frac{a^2-a-1}{a+1}}}=x$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & a-1 & a\\ 1 & a & 2a+1\\ -1 & 2-a & 1\end{vmatrix}}{a^2-1}=\frac{a+a(2-a)-(a-1)(2a+1)+a^2-(a-1)-(2-a)(2a+1)}{a^2-1}=$$

$$=\frac{a^2+a+2a-a^2-\left(2a^{2\prime}+a-2a-1\right)-a+1-\left(4a+2-2a^2-a\right)}{a^2-1}=$$

$$=\frac{2a+1-2a^2+a+1-3a-2+2a^2}{a^2-1}=\frac{0}{a^2-1}=\underline{\underline{0=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & a-1\\ 1 & a+1 & a\\ -1 & -2 & 2-a\end{vmatrix}}{a^2-1}=\frac{(a+1)(2-a)-2(a-1)-2a+(a+1)(a-1)+2a-2(2-a)}{a^2-1}=$$

$$=\frac{2a-a^2+2-a-2a+{}^{\prime}2+a^2-1-4+2a}{a^2-1}=\frac{a-1}{a^2-1}=\frac{a-1}{(a+1)(a-1)}=\underline{\underline{\frac{1}{a+1}=z}}$$

2º) Resolvemos en el caso de a = 1, que resulta el sistema compatible indeterminado:

$$\left.\begin{cases}x+2y+az=a-1\\ x+(a+1)y+(2a+1)z=a\\ -x-2y+z=2-a\end{cases}\right. \Rightarrow \quad a=1 \quad \Rightarrow \left.\begin{array}{r}x+2y+z=0\\ x+2y+3z=1\\ -x-2y+z=1\end{array}\right\}$$

Despreciando la primera ecuación y parametrizando la variable $y=\lambda$:

$$\left.\begin{array}{r}x+2y+3z=1\\ -x-2y+z=1\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=\lambda}\ ;;\ \underline{z=\frac{1}{2}}\ ;;\ x=1-2\lambda-\frac{3}{2}=\underline{-\frac{1}{2}-2\lambda=x}$$

$$\underline{\underline{Solución:\begin{cases}x=-\frac{1}{2}-2\lambda\\ y=\lambda \qquad\qquad \forall\lambda\in R\\ z=\frac{1}{2}\end{cases}}}$$

****

2º) Calcular el valor de b para que el plano $\pi \equiv bx + y - z = 3$ sea perpendicular a la *recta* r, intersección de los planos $\pi_1 \equiv y + z = 1$ y $\pi_2 \equiv x - y + z = 0$. Hallar el punto de intersección de r y π.

La expresión por unas ecuaciones cartesianas de r es: $r \equiv \begin{cases} y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ y por unas ecuaciones paramétricas es:

$$r \equiv \begin{cases} y + z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \;;;\; \underline{y = 1 - \lambda} \;;;\; x = 1 - \lambda - \lambda = \underline{1 - 2\lambda = x} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Un vector director de r es $\overrightarrow{v} = (-2,\ -1,\ 1)$.

Para que la recta r sea perpendicular al plano π, el vector director de la recta y el vector normal del plano tienen que ser linealmente dependientes (paralelos).

El vector normal del plano es $\overrightarrow{n} = (b,\ 1,\ -1)$.

Tiene que cumplirse que: $\overrightarrow{n} = k \cdot \overrightarrow{v} \;;;\; \frac{\overrightarrow{n}}{\overrightarrow{v}} = k \Rightarrow \frac{b}{-2} = \frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \underline{\underline{b = 2}}$

El punto de intersección de r con π se obtiene de la siguiente manera:

Los puntos genéricos de r son de la forma $P(1 - 2\lambda,\ 1 - \lambda,\ \lambda)$.

Si el punto P pertenece al plano tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x + y - z = 3 \\ P(1 - 2\lambda,\ 1 - \lambda,\ \lambda) \end{array}\right\} \Rightarrow 2(1 - 2\lambda) + 1 - \lambda - \lambda = 3 \;;;\; 2 - 4\lambda - 2\lambda = 2 \;;;\; -6\lambda = 0 \;;;\; \underline{\lambda = 0}$$

$$\underline{\underline{P(1,\ 1,\ 0)}}$$

****

Opción B

1º) Siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-2 & -3 & 9\\ 1 & -1 & 17\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, hallar el determinante de la matriz P, producto de A · B.

$$P=A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & -3 & 9\\ 1 & -1 & 17\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+2+0 & -3-2+0 & 9+34-1\\ -0+1+0 & -0-1+0 & 0+17-1\\ -4+1+0 & -6-1+0 & 18+17-0\end{pmatrix}=$$

$$=\underline{\begin{pmatrix}0 & -5 & 42\\ 1 & -1 & 16\\ -3 & -7 & 35\end{pmatrix}=P}$$

$$|P|=|A\cdot B|=\begin{vmatrix}0 & -5 & 42\\ 1 & -1 & 16\\ -3 & -7 & 35\end{vmatrix}=-7\cdot 42+3\cdot 80-3\cdot 42+5\cdot 35=-420+240+175=$$

$$=415-420=\underline{\underline{-5=|A\cdot B|}}$$

****

2º) Encontrar la ecuación continua de la recta r que es perpendicular a las siguientes rectas: $r_1 \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{0}$ y $r_2 \equiv (x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 1)+\lambda(1,\ 1,\ 1)$.

Los vectores directores de las rectas $r_1\ \ y\ \ r_2\ \ son\ \ \overrightarrow{u}=(2,\ 1,\ 0)\ \ y\ \ \overrightarrow{v}=(1,\ 1,\ 1)$, respectivamente.

La recta r perpendicular común a las dos rectas dadas tiene como vector director un vector que es, al mismo tiempo, perpendicular a las dos rectas; su vector director puede ser cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores de las rectas $r_1\ \ y\ \ r_2$:

$$\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\equiv\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=i+2k-k-2j=i-2j+k=\underline{(1,\ -2,\ 1)=\overrightarrow{w}}$$

Existen infinitas rectas perpendiculares al mismo tiempo a las rectas $r_1\ \ y\ \ r_2$, pero entendemos como perpendicular común aquella que, además de ser perpendicular, se apoya en ambas. Para calcularla determinamos un vector que tenga como origen un punto P de r_1 y como extremo un punto Q de r_2, que sea linealmente dependiente de $\overrightarrow{w}$.

Un punto genérico de cada una de las rectas son:

$$r_1\equiv\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=2\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases}\Rightarrow\ \underline{P(1+2\lambda,\ 2\lambda,\ 2+2\lambda)}\ \ ;;\ \ r_2\equiv\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}\Rightarrow\ \underline{Q(\lambda,\ \lambda,\ 1+\lambda)}$$

El vector $\overrightarrow{PQ}=Q-P=(\lambda,\ \lambda,\ 1+\lambda)-(1+2\lambda,\ 2\lambda,\ 2+2\lambda)=(-1-\lambda,\ -\lambda,\ -1-\lambda)$ tiene que ser paralelo a $\overrightarrow{w}$, sus componentes tienen que ser proporcionales:

$$\frac{-1-\lambda}{1}=\frac{-\lambda}{-2}=\frac{-1-\lambda}{1}\ \Rightarrow\ -\lambda=2+2\lambda\ \ ;;\ \ 3\lambda=-2\ \ ;;\ \ \underline{\lambda=-\frac{2}{3}}$$

Los puntos de cada una de las rectas son:

$$P\Rightarrow\begin{cases} x=1-\frac{4}{3}=-\frac{1}{3} \\ y=-\frac{4}{3} \\ z=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3} \end{cases}\Rightarrow\ \underline{P\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{4}{3},\ \frac{2}{3}\right)}\qquad Q\Rightarrow\begin{cases} x=-\frac{2}{3} \\ y=-\frac{2}{3} \\ z=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \end{cases}\Rightarrow\ \underline{Q\left(-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)}$$

La recta pedida r es la que pasa por P y Q:

El vector director de r puede ser cualquier vector linealmente dependiente de $\overrightarrow{PQ} = Q - P = \left(-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3},\ -\frac{4}{3},\ \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$, p. e. $\overrightarrow{v_r} = (1,\ -2,\ 1)$.

Como punto puede tomarse, por ejemplo, $P\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{4}{3},\ \frac{2}{3}\right)$.

La expresión en unas ecuaciones continuas de r es:

$$r \equiv \frac{x+\frac{1}{3}}{1} = \frac{y+\frac{4}{3}}{-2} = \frac{z-\frac{2}{3}}{1} \ ;; \ \frac{3x+1}{3} = \frac{3y+4}{-6} = \frac{3z-2}{3}$$ Simplificando:

$$\underline{\underline{r \equiv \frac{3x+1}{1} = \frac{3y+4}{-2} = \frac{3z-2}{1}}}$$

****

Grupo 2

Opción C

1º) Calcular los siguientes límites: $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1} \right)^x$;; $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1} \right)^x = 1^\infty \Rightarrow Indeterminación\ \ con\ \ e \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x-1+2}{3x-1} \right)^x =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{3x-1} \right)^x$$

A partir de aquí, vamos a resolver el ejercicio de dos formas diferentes:

$\underline{Primera}$:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{3x-1} \right)^x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} \frac{2}{3x-1} = \frac{1}{n} & x \to \infty \\ 3x-1 = 2n & \\ x = \frac{2n+1}{3} & n \to \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{2n+1}{3}} = e^{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{e^2}}}$$

$\underline{Segunda}$:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{3x-1} \right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x-1}{2}} \right)^x = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x-1}{2}} \right)^{x \cdot \frac{3x-1}{2} \cdot \frac{2}{3x-1}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x-1}{2}} \right)^{\frac{3x-1}{2} \cdot \frac{2x}{3x-1}} = \left[\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x-1}{2}} \right)^{\frac{3x-1}{2}} \right]^{\frac{2x}{3x-1}} = e^{\frac{2}{3}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{e^2}}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) = \infty - \infty \Rightarrow Ind. \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right)}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}} - x}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \underline{\underline{-\infty}} \quad (Grado\ \ del\ \ numerador > grado\ \ denominador)$$

****

2º) Hallar el máximo relativo, el mínimo relativo y el punto de inflexión de la función $f(x)=x-2\,sen\ x$ en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

$$f'(x)=1-2\cos\ x\ \ ;;\ \ f'(x)=0\ \Rightarrow\ 1-2\cos\ x=0\ \ ;;\ \ \cos\ x=\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}\underline{x_1=-\frac{\pi}{3}}\\ \underline{x_2=\frac{\pi}{3}}\end{cases},\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x)=2\,sen\ x\ \Rightarrow\ \begin{cases}f''\left(-\frac{\pi}{3}\right)=2\,sen\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-2\,sen\ \frac{\pi}{3}=-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}<0\Rightarrow\underline{\mathit{Máximo}}\\ f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\,sen\ \frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}>0\Rightarrow\underline{\mathit{Mínimo}}\end{cases}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{3}-2\,sen\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{3}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}\Rightarrow\ \underline{\underline{\mathit{Máx.}\left(-\frac{\pi}{3},\ \frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}\right)}}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}-2\,sen\ \frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}=\frac{\pi-3\sqrt{3}}{3}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\mathit{Mín..}\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi-3\sqrt{3}}{3}\right)}}$$

$$f''(x)=2\ sen\ x\ \ ;;\ \ f''(x)=0\ \Rightarrow\ 2\ sen\ x=0\ \ ;;\ \ \underline{x=0}\rightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x)=2\ \cos\ x\ \ ;;\ \ f'''(0)=2\cdot\cos\ 0=2\cdot 1=2\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{\mathit{Punto\ \ de\ \ inflexión}}$$

$$f(0)=0-2\cdot\ sen\ 0=-2\cdot 0=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{P.\ I.\Rightarrow O(0,\ 0)}}$$

****

Opción D

1º) Demostrar que la función $f(x)=e^{sen\ x}$ tiene un máximo relativo para $x=\frac{\pi}{2}$.

Una función continua tiene un máximo relativo en un punto cuando la derivada primera se anula en dicho punto y la segunda derivada es negativa para el mismo punto.

$$f'(x)=\cos\ x\cdot e^{sen\ x}\ ;;\ f'(x)=0\ \Rightarrow\ \cos\ x\cdot e^{sen\ x}=0\ ;;\ \cos\ x=0\ ;;\ \underline{x=\frac{\pi}{2}}$$

.

$$f''(x)=-sen\ x\cdot e^{sen\ x}+\cos\ x\cdot\left(\cos\ x\cdot e^{sen\ x}\right)=\underline{e^{sen\ x}\cdot\left(\cos^2 x-sen\ x\right)=f''(x)}$$

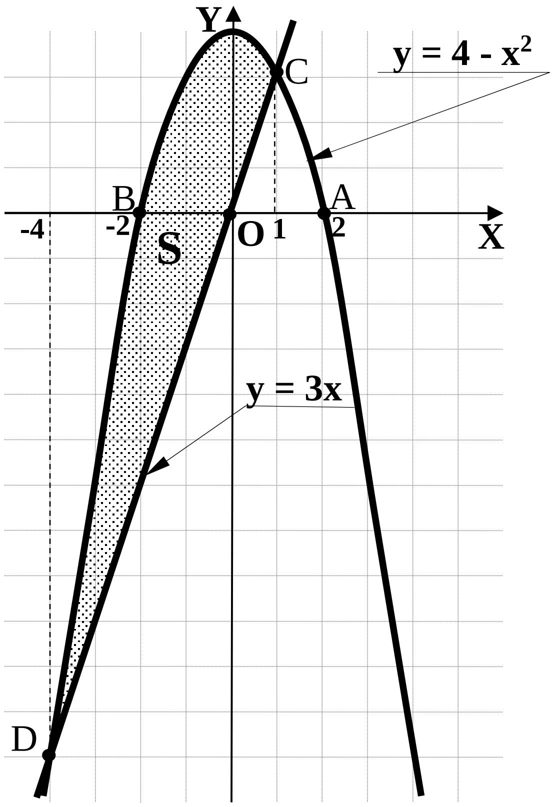
$$f'(x)=\cos\ x\cdot e^{sen\ x}\ ;;\ f'(x)=0\ \Rightarrow\ \cos\ x\cdot e^{sen\ x}=0\ ;;\ \cos\ x=0\ ;;\ \underline{x=\frac{\pi}{2}}$$

$$f''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=e^{sen\ \frac{\pi}{2}}\cdot\left(\cos^2\frac{\pi}{2}-sen\frac{\pi}{2}\right)=e^1\cdot\left(0^2-1\right)=-e>0\Rightarrow \underline{\underline{\mathit{Máximo\ \ relativo\ \ para\ \ }\frac{\pi}{2},\ c.q.d.}}$$

****

2º) Calcular el área de la región encerrada entre las gráficas de la curva $y = 4 - x^2$ y la recta y = 3x.

Los puntos de corte de cada función con el eje de abscisas son:



$$y = 4 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow \underline{A(2,\ 0)} \\ x_2 = -2 \rightarrow \underline{B(-2,\ 0)} \end{cases}$$

$$y = 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)}$$

Los puntos de corte de las dos funciones se obtienen igualándolas:

$$4 - x^2 = 3x \ ;; \ x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow \underline{C(1,\ 3)} \\ x_2 = -4 \rightarrow \underline{D(-4,\ -12)} \end{cases}$$

La representación gráfica de la situación es la de la figura.

Por ser todas las ordenadas de la parábola mayores que las de la recta en el intervalo (-4, 1), la superficie es la diferencia de las limitadas por la parábola y la recta, respectivamente, o sea:

$$S = \int_{-4}^{1} \left[\left(4 - x^2\right) - 3x \right] \cdot dx = \int_{-4}^{1} \left(-x^2 - 3x + 4\right) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x \right]_{-4}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 \right) - \left(+\frac{64}{3} - \frac{48}{2} - 16 \right) = -\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 - \frac{64}{3} + 24 + 16 = 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} =$$

$$= \frac{264 - 130 - 9}{6} = \frac{264 - 139}{6} = \underline{\underline{\frac{125}{6}\ u^2 = S}}$$

****