PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

SEPTIEMBRE – 2001

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Contestar una opción en cada grupo de preguntas.

GRUPO 1

Opción a)

a 1) Encontrar el valor o valores del parámetro α que hacen que el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 4 & \alpha & 2 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha^2 \\ \alpha^2 \\ \alpha^2 \end{pmatrix}$$

tenga solución única y que hacen además que x = 1.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 4 & \alpha & 2 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha & -2\alpha^2 \\ 4 & \alpha & 2 & \alpha^2 \\ \alpha & 1 & 1 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 4 & \alpha & 2 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\alpha + 2\alpha^2 - \alpha^3 - 4\alpha = 2\alpha^2 - \alpha^3 = \alpha^2(2-\alpha) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\alpha_1 = 0} \\ \underline{\alpha_2 = 2} \end{cases}$$

$$Para \left.\begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \alpha \neq 2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \; Rango\ M = Rango\ M' = 3 = n^o\ incógnitas \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Compatible\ \ Determinado}}$$

Para x = 1, sería:

$$\left.\begin{aligned} \alpha y + \alpha z = -2\alpha^2 \\ 4x + \alpha y + 2z = \alpha^2 \\ \alpha x + y + z = \alpha^2 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} y + z = -2\alpha \\ 4x + \alpha y + 2z = \alpha^2 \\ \alpha x + y + z = \alpha^2 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \;\Rightarrow\; (3)-(2) \to \left.\begin{cases} \alpha x = \alpha^2 + 2\alpha \\ x = \alpha + 2 = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = -1}}$$

****

a 2) Encontrar un punto de la recta $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$ que esté a la misma distancia de los planos $\pi_1 \equiv x+y=2$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda+\mu \\ y = -1-\lambda+2\mu \\ z = 0 \end{cases}$.

La expresión en ecuaciones paramétricas de la recta r es: $r \equiv \begin{cases} x = 2+k \\ y = 2+k \\ z = \sqrt{2}\,k \end{cases}$.

Un punto genérico de r es: $P\left(2+k,\ 2+k,\ \sqrt{2}\,k\right)$.

La expresión del plano π_2 en forma general es:

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2z + z = 3z = 0 \ \Rightarrow\ \underline{\underline{\pi_2 \equiv z = 0}}$$

(esto es evidente en las ecuaciones dadas del plano)

Los planos bisectores de π_1 y π_2 tienen la propiedad de que todos sus puntos equidistan de los planos dados. Las ecuaciones de estos planos se obtienen aplicando la siguiente fórmula:

$$\frac{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{A_2x_2 + B_2y_2 + C_2z_2 + D_2}{\pm\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Aplicando la fórmula a nuestro caso:

$$\frac{x+y-2}{\pm\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{z}{\pm\sqrt{0^2+0^2+1^2}} \ ;;\ \frac{x+y-2}{\pm\sqrt{2}} = \frac{z}{\pm 1} \ \Rightarrow\ \begin{cases} \underline{b_1 \equiv x+y+\sqrt{2}\,z-2=0} \\ \\ \underline{b_2 \equiv x+y-\sqrt{2}\,z-2=0} \end{cases}$$

(Los planos bisectores b_1 y b_2 se obtienen tomando signo diferentes e iguales, respectivamente, en la fórmula anterior)

Los puntos pedidos son los de la recta con los planos b_1 y b_2:

$$\{r,\, b_1\} \Rightarrow (2+k)+(2+k)+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\,k-2=0 \ ;;\ 2+k+2+k+2k=0 \ ;;\ 4k=-2 \ ;;\ \underline{k=-\frac{1}{2}}$$

$$k=-1 \ \Rightarrow\ \underline{\underline{P\left(1,\, 1,\, -\sqrt{2}\right)}}$$

$$\{r,\ b_2\} \Rightarrow (2+k)+(2+k)-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\,k-2=0\ \ ;;\ \ 2+k+2+k-2k=0\ \ ;;\ \ 4=0\ ?\Rightarrow \underline{k\ \mathit{no\ existe}}$$

La interpretación del resultado obtenido es el siguiente:

La recta r es paralela al plano b_2, cosa que puede observarse por el vector director de r $\left[\vec{v}=\left(1,\ 1,\ \sqrt{2}\right)\right]$ es el mismo que el vector normal de b_2, por lo tanto no tienen punto de corte.

Existe un único punto que cumple la condición pedida: $\underline{\underline{P\left(1,\ 1,\ -\sqrt{2}\right)}}$

****

Opción b)

b 1) Resolver la ecuación matricial: $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Para obtener como producto una matriz de dimensión 2 x 3 es necesario que la matriz pedida, X, tenga dimensión 2 x 3, o sea: $X = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+c+e & a+2c+3e \\ b & b+d+f & b+2d+3f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \underline{a=1} \\ \underline{b=2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 1+c+e=3 \\ 1+2c+3e=5 \end{matrix} \right\} \;;; \left\{ \begin{matrix} -2c-2e=-4 \\ 2c+3e=4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{e=0} \;;;\; 1+c+e=3 \;;;\; \underline{c=2} \\ \\ \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \underline{a=1} \\ \underline{b=2} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 2+d+f=4 \\ 2+2d+3f=6 \end{matrix} \right\} \;;; \left\{ \begin{matrix} -2d-2f=-4 \\ 2d+3f=4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{f=0} \;;;\; 2+d+f=4 \;;;\; \underline{d=2} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}}}$$

****

b 2) Encontrar el valor de m que hace que la recta $r \equiv \begin{cases} mx + y + z = 3 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$ sea paralela al plano $\pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = 2 - \lambda + 2\mu \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$.

La expresión de r en ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{x = k} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} y + z = 3 - mk \\ y + 2z = 1 - k \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -y - z = -3 + mk \\ y + 2z = 1 - k \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \underline{z = -2 + (m-1)k}$$

$$y + z = 3 - mk \;\;;;\;\; y - 2 + (m-1)k = 3 - mk \;\;;;\;\; y = 5 - mk - mk + k = \underline{5 + (1 - 2m)k = y}$$

$$r \equiv \begin{cases} x = k \\ y = 5 + (1 - 2m)k \\ z = -2 + (m-1)k \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Un vector director de r es } \overrightarrow{v} = (1,\ 1 - 2m,\ m - 1).$$

La expresión del plano π por su ecuación general es la siguiente:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;\;;;\;\; 2(z-1) - (y-2) + (z-1) + 2(x-1) = 0 \;\;;;$$

$$3z - 3 - y + 2 + 2x - 2 = 0 \;\;;;\;\; \underline{\pi \equiv 2x - y + 3z - 3 = 0}$$

Un vector normal de π es: $\overrightarrow{n} = (2,\ -1,\ 3)$.

Si la recta r tiene que ser perpendicular al plano π es necesario que los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{n}$ tienen que ser perpendiculares, por lo tanto su producto escalar tiene que ser cero:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1,\ 1 - 2m,\ m - 1) \cdot (2,\ -1,\ 3) = 2 - 1 + 2m + 3m - 3 = 0 \;\;;;\;\; 5m = 2 \;\;;;\;\; \underline{\underline{m = \frac{2}{5}}}$$

****

GRUPO 2

Opción c)

c 1) Las siguientes tres figuras representan las gráficas de una función f(x) y sus derivadas primera y segunda. Determinar qué función corresponde a cada figura. Razonar la respuesta.

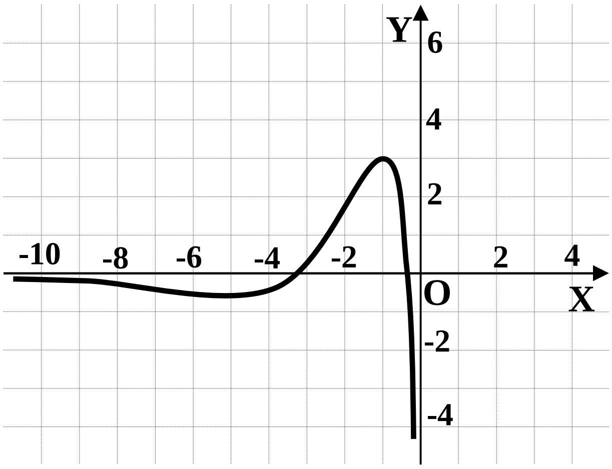

Figura 1

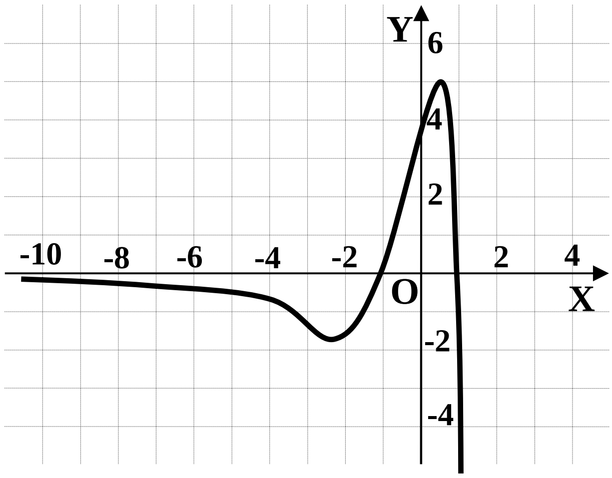

Figura 2

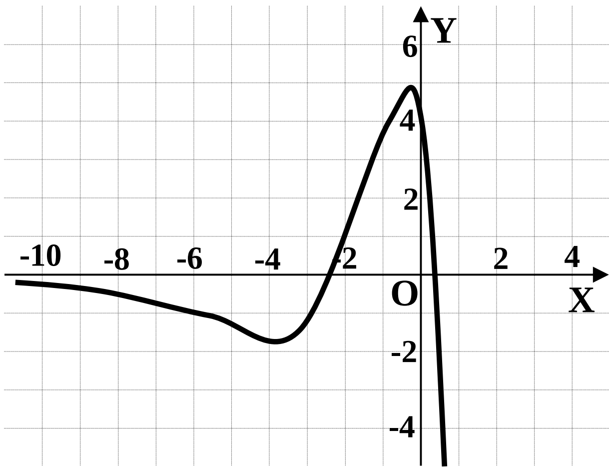

Figura 3

La función es la figura 2 por lo siguiente:

a) Tiene un máximo relativo para $x = \frac{1}{2}$ y un mínimo relativo para $x = -\frac{5}{2}$.

b) Es creciente en $\left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right)$ y decreciente en $\left(-\infty, -\frac{5}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$

c) Tiene un puntos de inflexión para $x \cong -3 \ y \ \ para \ x \cong -\frac{1}{2}$.

d) Es convexa $(\cup)$ en $\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$ y cóncava $(\cap)$ en $(-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

Como consecuencia lógica de lo anterior se deduce que:

<u>La figura 3 es la derivada primera</u> por lo siguiente:

a) Se anula para $x = \frac{1}{2}$ y para $x = -\frac{5}{2}$.

b) Es decreciente en $(-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ y creciente en $\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$

<u>La derivada segunda es la figura 1</u> por lo siguiente:

Se anula para $x = -\frac{5}{2}$ y para $x = -\frac{1}{2}$.

****

c 2) Hallar el valor de la integral $I = \int_1^e x^2 \cdot L\,x \cdot dx$.

$$I = \int_1^e x^2 \cdot L\,x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} L\,x = u \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ x^2 \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left[L\,x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \right]_1^e =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \cdot L\,x - \frac{1}{3} \cdot \int x^2 \cdot dx \right]_1^e = \left[\frac{x^3}{3} \cdot L\,x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_1^e = \left[\frac{x^3}{9} (3 \cdot L\,x - 1) \right]_1^e =$$

$$= \frac{e^3}{9}(3 \cdot L\,e - 1) - \frac{1^3}{9}(3 \cdot L1 - 1) = \frac{e^3}{9}(3-1) - \frac{1}{9}(3 \cdot 0 - 1) = \frac{e^3}{9} \cdot 2 + \frac{1}{9} = \underline{\underline{\frac{2e^3+1}{9} = I}}$$

****

Opción d)

d 1) - Probar que la ecuación $x^3 + x = 1$ tiene solución en el intervalo [0, 1].

- Probar que dicha solución es única en este intervalo.

- Utilizar el método de bisección para aproximar esta solución con una cifra decimal de precisión.

Considerando la función $f(x) = x^3 + x - 1$. Se trata de una función continua en su dominio, que es R, por lo tanto, es continua en el intervalo [0, 1].

$$f(x) = x^3 + x - 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(0) = 0^3 + 0 - 1 = -1 < 0 \\ f(1) = 1^3 + 1 - 1 = 1 > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\exists c \in R, \;\; c \in [0, 1] \Rightarrow f(c) = 0}}$$

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \Rightarrow \underline{\underline{f(x) \;\; es \;\; creciente \;\; \forall x \in R}}$, lo cual implica que f(x) no puede anularse en ningún punto distinto de c, siendo $0 \leq c \leq 1$.

$$f(x) = x^3 + x - 1 \quad \Rightarrow \quad f(0'5) = (0'5)^3 + 0'5 - 1 = 0'125 - 0'5 = -0'375 < 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{0'5 < c < 1}$$

$$f(x) = x^3 + x - 1 \quad \Rightarrow \quad f(0'75) = (0'75)^3 + 0'75 - 1 = 0'422 - 0'25 = 0'172 < 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{0'5 < c < 0'75}$$

$$f(x) = x^3 + x - 1 \quad \Rightarrow \quad f(0'6) = (0'6)^3 + 0'6 - 1 = 0'216 - 0'4 = -0'184 < 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{0'6 < c < 0'75}$$

$$\underline{\underline{c = 0'7}}$$

****

d 2) Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{(x-3) \cdot \cos x}{x^2 - 6x + 9} \qquad \qquad \lim_{x \to 0} \left(1 + 2x^2\right)^{\frac{1}{x(x+1)}}$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{(x-3) \cdot \cos x}{x^2 - 6x + 9} = \frac{(3-3) \cdot \cos 3}{3^2 - 6 \cdot 3 + 9} = \frac{0 \cdot \cos 3}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \lim_{x \to 3^+} \frac{(x-3) \cdot \cos x}{(x-3)^2} =$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{\cos x}{x-3} = \frac{\cos 3}{0^+} = \frac{0'9986}{0^+} = \underline{\underline{+\infty}}$$

$$\lim_{x \to 0} \left(1 + 2x^2\right)^{\frac{1}{x(x+1)}} = 1^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} \Rightarrow Ind. \ (del \ \ tipo \ \ del \ \ n^{o} \ \ e) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{2x^2 = \frac{1}{n}} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x \to 0 \\ n \to \infty \end{Bmatrix} \ ;; \ x^2 = \frac{1}{2n} \ ;; \ x = \frac{1}{\sqrt{2n}} \ ;;$$

$$\lim_{x \to 0} \left(1 + 2x^2\right)^{\frac{1}{x(x+1)}} = \lim_{x \to 0} \left(1 + 2x^2\right)^{\frac{1}{x^2+x}} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n}}}} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{2n \cdot \sqrt{2n}}{\sqrt{2n} + 2n}} =$$

$$= \left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \right]^{\frac{2 \cdot \sqrt{2n}}{\sqrt{2n} + 2n}} = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

****