PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

PRUEBA A

1º) Un estudiante de bachillerato ha decidido mejorar la dieta de su animal de compañía y analiza la composición de dos marcas de pienso (P1 y P2). La siguiente tabla recoge la información asociada a una ración de cada tipo de pienso:

	Hidratos carbono	Proteínas	Grasas	Hierro	Vitamina C	Precio venta (euros)
S1	4	7	2	0	0	0,8
S2	4	5	3	2	3	0,6

Su veterinario le ha recomendado una dosis diaria de hidratos de carbono entre 12 y 40 unidades, una dosis mínima diaria de vitamina C de 6 unidades, una dosis máxima de hierro diaria de 10 unidades y no sobrepasar 17 unidades de grasas al día. Determine cuántas raciones de cada tipo de pienso deberá usar para alimentar diariamente a su mascota si el estudiante desea maximizar la ingesta diaria de proteínas.

i) Plantee el problema. ii) Resuélvalo gráficamente.

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si el estudiante cambiara de opinión y deseara minimizar el gasto diario en pienso.

----

i)

Sean x e y las raciones de piensos de los tipos P1 y P2 que el estudiante suministra diariamente a su mascota, respectivamente.

El sistema de inecuaciones que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+4y\geq 12 \\ 4x+4y\leq 40 \\ 3y\geq 6 \\ 2y\leq 10 \\ 2x+3y\leq 17 \\ x\geq 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y\geq 3 \\ x+y\leq 10 \\ 2\leq y\leq 5 \\ 2x+3y\leq 17 \\ x\geq 0 \end{array}\right\}.$$

$ii)$

La función de objetivos es: $f(x,y) = 7x + 5y$.

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

① $\Rightarrow x + y \geq 3 \Rightarrow y \geq 3 - x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	0	3
y	3	0

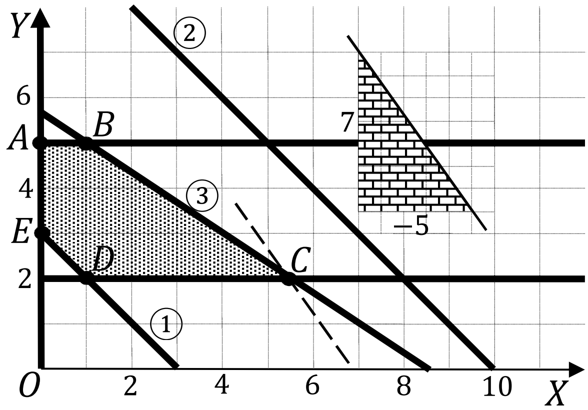
② $\Rightarrow x + y \leq 10 \Rightarrow y \leq 10 - x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	10	5
y	0	5

③ $\Rightarrow 2x + 3y \leq 17 \Rightarrow y \leq \frac{17-2x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	1	7
y	5	1

Los vértices de la sección factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left. \begin{array}{r} y = 5 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A(0,5).$

$B \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 2x + 3y = 17 \\ y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 15 = 17;$

$2x = 2;\ \ x = 1 \Rightarrow B(1,5).$

$C \Rightarrow \left. \begin{array}{r} y = 2 \\ 2x + 3y = 17 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 6 = 17;\ \ 2x = 11;\ \ x = 5{,}5 \Rightarrow C(5{,}5;2).$

$D \Rightarrow \left. \begin{array}{r} y = 2 \\ x + y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow D(1,2).$ $E \Rightarrow \left. \begin{array}{r} y = 0 \\ x + y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow E(0,3)$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,5) = 7 \cdot 0 + 5 \cdot 5 = 0 + 25 = 25.$

$B \Rightarrow f(1,5) = 7 \cdot 1 + 5 \cdot 5 = 7 + 25 = 32.$

$C \Rightarrow f(5{,}5;2) = 7 \cdot 5{,}5 + 5 \cdot 2 = 38{,}5 + 10 = 48{,}5.$

$D \Rightarrow f(1,2) = 7 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 7 + 10 = 17.$

$E \Rightarrow f(0,3) = 7 \cdot 0 + 5 \cdot 3 = 0 + 15 = 15.$

El máximo se produce en el punto $C(5{,}5;2)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

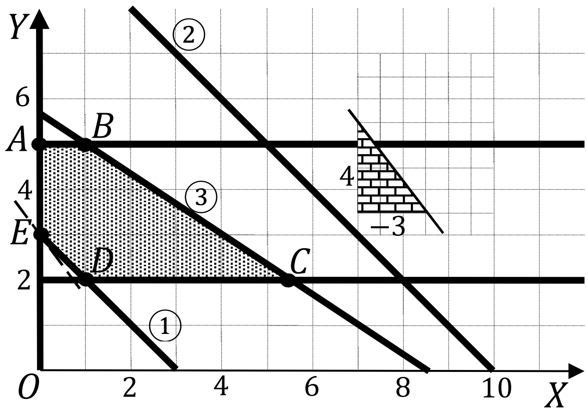
$f(x,y) = 7x + 5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{7}{5}x \Rightarrow m = -\frac{7}{5}.$

$$\underline{Las\ proteínas\ son\ máximas\ con\ 5{,}5\ raciones\ de\ P1\ y\ 2\ raciones\ de\ P2.}$$

$iii)$

La nueva función de objetivos es: $g(x,y) = 0{,}8x + 0{,}6y$.

Los valores de la nueva función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:



$A \Rightarrow f(0,5) = 0{,}8 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 5 =$

$= 0 + 3 = 3.$

$B \Rightarrow f(1,5) = 0{,}8 \cdot 1 + 0{,}6 \cdot 5 =$

$= 0{,}8 + 3 = 3{,}8.$

$C \Rightarrow f(5{,}5;2) = 0{,}8 \cdot 5{,}5 + 0{,}6 \cdot 2 = 4{,}4 + 1{,}2 = 5{,}6.$

$D \Rightarrow f(1,2) = 0{,}8 \cdot 1 + 0{,}6 \cdot 2 = 0{,}8 + 1{,}2 = 2.$

$E \Rightarrow f(0,3) = 0{,}8 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 3 = 0 + 1{,}8 = 1{,}8.$

El mínimo se produce en el punto $E(0,3)$.

También se hubiera obtenido el punto E por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 0{,}8x + 0{,}6y = 0 \Rightarrow y = -\frac{0{,}8}{0{,}6}x = -\frac{8}{6}x = -\frac{4}{3}x \Rightarrow m = -\frac{4}{3}.$

$$\underline{El\ mínimo\ coste\ (1{,}8\ euros)\ se\ produce\ con\ solamente\ 3\ raciones\ de\ P2.}$$

****

2º) Calcule:

$i)\ \ I=\int_{-1}^{0}\frac{2x^2+5x+2}{x^2+1}\cdot dx.$ $\qquad$ $ii)\ \ I=\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}}\cdot dx.$

$iii)$ Una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=\frac{3x}{(2-x^2)^2}$ que verifique $F(-1)=2$.

$i)$

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{2x^2+5x+2}{x^2+1}\cdot dx.$$

Se resuelve en primer lugar la integral indefinida.

$$A=\int\frac{2x^2+5x+2}{x^2+1}\cdot dx=\int\left(\frac{2x^2+2}{x^2+1}+\frac{5x}{x^2+1}\right)\cdot dx=2\cdot\int dx+\int\frac{5x}{x^2+1}\cdot dx=$$

$$=2x+B. \quad (*)$$

$$B=\int\frac{5x}{x^2+1}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{matrix}x^2+1=t\\2xdx=dt\\5xdx=\frac{5}{2}dt\end{matrix}\right\}=\frac{5}{2}\cdot\int\frac{1}{t}\cdot dt=\frac{5}{2}\cdot Lt=\frac{5}{2}\cdot L(x^2+1).$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de B: $A=2x+\frac{5}{2}\cdot L(x^2+1)$.

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{2x^2+5x+2}{x^2+1}\cdot dx=\left[2x+\frac{5}{2}\cdot L(x^2+1)\right]_{-1}^{0}=$$

$$=\left[0+\frac{5}{2}\cdot L(0+1)\right]-\left\{2\cdot(-1)+\frac{5}{2}\cdot L[(-1)^2+1]\right\}=0-\left(-2+\frac{5}{2}\cdot L2\right)=$$

$$=2-\frac{5}{2}\cdot L2=\frac{4-5L2}{2}=\frac{4-L2^5}{2}=\frac{4-L32}{2}.$$

$$\underline{I=\int_{-1}^{0}\frac{2x^2+5x+2}{x^2+1}\cdot dx=\frac{4-L32}{2}}.$$

$ii)$

$$I=\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}}\cdot dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{matrix}e^{\sqrt{x}}=t\\\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot dx=dt\\\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\cdot dx=2dt\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{2}}\int dt=$$

$$=\sqrt{2}\cdot t+C=\sqrt{2}\cdot e^{\sqrt{x}}+C.$$

$$\underline{I=\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}}\cdot dx=\sqrt{2}\cdot e^{\sqrt{x}}+C.}$$

También puede resolverse este apartado de la forma siguiente:

$$I=\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}}\cdot dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}\sqrt{x}=t \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot dx=dt \\ \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot dx=2dt\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}}\int e^t dt=$$

$$=\sqrt{2}\cdot e^t+C=\sqrt{2}\cdot e^{\sqrt{x}}+C.$$

$iii)$

Una primitiva de la función $f(x)=\frac{3x}{(2-x^2)^2}$ que verifique $F(-1)=2$.

$$F(x)=\int f(x)\cdot dx=\int \frac{3x}{(2-x^2)^2}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}2-x^2=t \\ -2xdx=dt \\ 3xdx=-\frac{3}{2}dt\end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{-\frac{3}{2}}{t^2}\cdot dt=$$

$$=-\frac{3}{2}\cdot\int t^{-2}\cdot dt=-\frac{3}{2}\cdot\frac{t^{-1}}{-1}+C=\frac{3}{2t}+C=\frac{3}{2\cdot(2-x^2)}+C.$$

$$F(-1)=2 \Rightarrow \frac{3}{2\cdot[2-(-1)^2]}+C=2;\ \ \frac{3}{2\cdot(2-1)}+C=2;\ \ \frac{3}{2}+C=2;\ \ 3+2C=4;$$

$$2C=1 \Rightarrow C=\frac{1}{2}.$$

$$\underline{F(x)=\frac{3}{2\cdot(2-x^2)}+\frac{1}{2}.}$$

****

3º) Una importante compañía aérea está preocupada por la puntualidad de sus vuelos. A partir de una muestra de 400 vuelos, se observó que 320 salieron a tiempo y se calculó el siguiente intervalo de confianza para la proporción de vuelos que salen puntualmente $(0{,}7485; 0{,}8515)$.

$i)$ Calcule el nivel de confianza del intervalo.

$ii)$ Calcule un intervalo de confianza para la proporción de vuelos no puntuales, con un nivel de confianza del 93 %.
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

$a)$

$$p = \frac{320}{400} = 0{,}8. \qquad E = \frac{0{,}8515 - 0{,}7485}{2} = \frac{0{,}103}{2} = 0{,}0515.$$

Datos: $n = 400;\ \ p = 0{,}8;\ \ q = 0{,}2;\ \ E = 0{,}0515.$

Sabiendo que $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = E \cdot \sqrt{\frac{n}{p \cdot q}} = 0{,}0515 \cdot \sqrt{\frac{400}{0{,}8 \cdot 0{,}2}} =$

$= 0{,}0515 \cdot 50 = 2{,}275.$

Mirando en la tabla de distribución normal $N(0,1)$ a 2,275 le corresponde el valor de 0,9885, por lo cual:

$$\frac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}9885;\ \ \alpha = 2 - 1{,}9770 = 0{,}1230 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}8770.$$

$\underline{\textit{El nivel de confianza utilizado es del } 87{,}70\ \%.}$

$a)$

Para un nivel de confianza del 93 %;

$\alpha = 1 - 0{,}93 = 0{,}07\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}035} = 1{,}81.$
$(1 - 0{,}035 = 0{,}9650\ \rightarrow z = 1{,}81).$

Datos: $n = 400;\ \ p = 0{,}8;\ \ q = 0{,}2;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}81.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $p, q\ y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}8 - 1{,}81 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{400}};\ 0{,}8 + 1{,}81 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{400}}\right);$$

$$(0{,}8 - 1{,}81 \cdot 0{,}02;\ 0{,}8 + 1{,}81 \cdot 0{,}02);\ \ (0{,}8 - 0{,}0362;\ 0{,}8 + 0{,}0362).$$

$$\underline{I.C._{93\,\%} = (0{,}7638;\ 0{,}8362)}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\ y\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, responda a las siguientes preguntas:

$i)$ Calcule $A \cdot A^t - B \cdot B^t$. $ii)$ Calcule $(C^{-1})^2$.

$iii)$ ¿Es invertible la matriz $A \cdot A^t$? Razone la respuesta.

$i)$

$$A \cdot A^t - B \cdot B^t = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (-1 \quad 2) - \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 14 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -10 \end{pmatrix}}.$$

$ii)$

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1; \;\; C^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \;\; Adj.de\ C^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$C^{-1} = \frac{Adj.de\ C^t}{|C|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$(C^{-1})^2 = C^{-1} \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}}.$$

$iii)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A \cdot A^t| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -10 \end{vmatrix} = 10 - 1 = 9 \neq 0.$$

$$\underline{La\ matriz\ A \cdot A^t\ es\ invertible}.$$

****

2º) Dada la función $f(x)=\frac{5-x}{1-x}$, calcule:

i) La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=-1$.

ii) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

iii) Asíntotas de la función.

iv) Dibuje la gráfica de la función $f(x)$.

----

i)

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x)=\frac{-1\cdot(1-x)-(5-x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{-1+x+5-x}{(1-x)^2}=\frac{4}{(1-x)^2}.$$

$$m=f'(-1)=\frac{4}{(1+1)^2}=\frac{4}{4}=1.$$

$$f(-1)=\frac{5-(-1)}{1-(-1)}=\frac{6}{2}=3 \Rightarrow P(-1,3).$$

La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y-y_0=m(x-x_0)$.

$$y-3=1\cdot(x+1)=x+1.$$

La ecuación de la recta tangente pedida es la siguiente:

$$\underline{Tangente: t\equiv x-y+4=0}.$$

ii)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto para los valores reales de x que anulan el denominador: $D(f)\ \Rightarrow R-\{1\}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{4}{(1-x)^2}>0, \forall x\in D(f).$$

$$\underline{La\ función\ es\ monótona\ creciente\ en\ su\ dominio}.$$

Como consecuencia de lo anterior:

$$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ máximos\ ni\ mínimos\ relativos}.$$

$iii)$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{5-x}{1-x} = 1 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y = 1}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

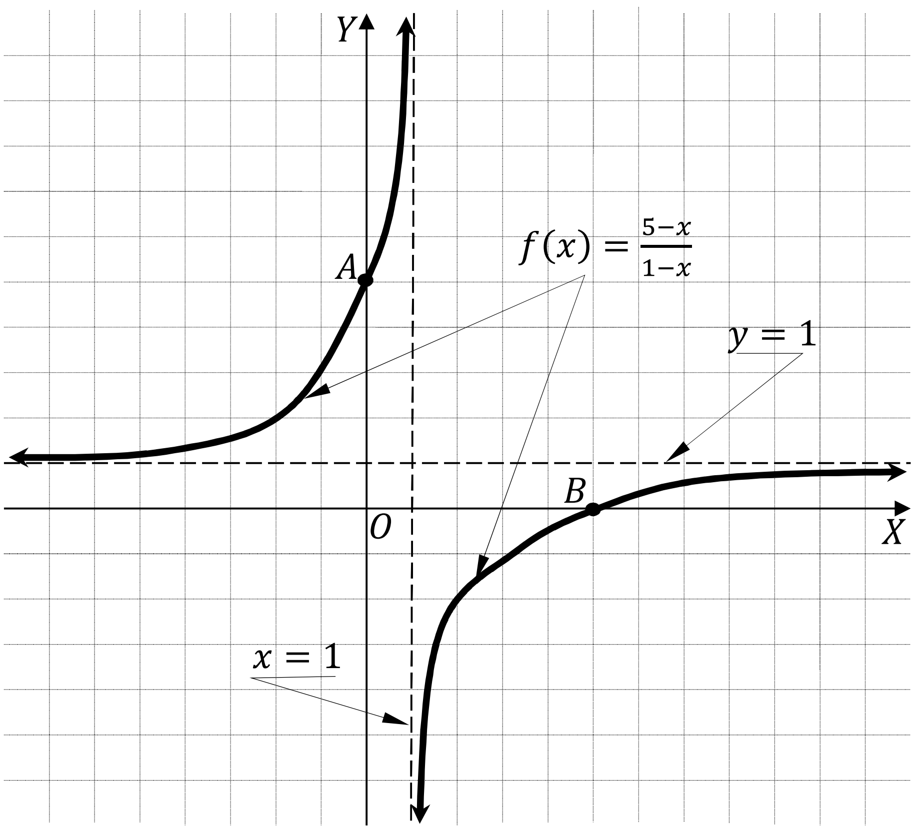
$$\underline{La\ recta\ x = 1\ es\ asíntota\ vertical\ de\ la\ función}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

$iv)$

Los puntos de corte con los ejes son $A(5,1)\ y\ B(5,0)$.

De los cortes con los ejes y de los apartados anteriores se deduce la representación gráfica de la función que es, aproximadamente, la que aparece en la figura adjunta.



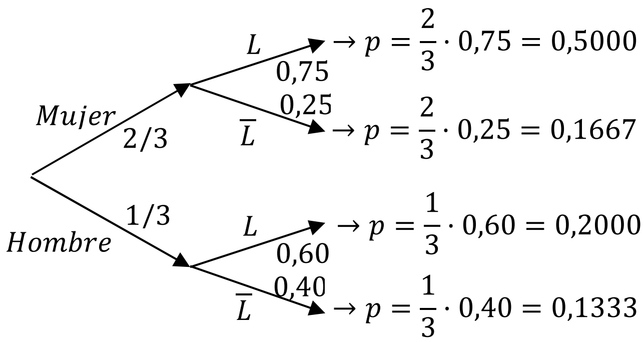
****

3º) En un aula de bachillerato, el 75 % de las chicas y el 60 % de los chicos son lectores habituales. El número de chicas en dicho aula duplica el número de chicos. Se selecciona un estudiante al azar. Calcule:

i) La probabilidad de que sea lector habitual.

ii) La probabilidad de que sea chico y so sea lector habitual.

ii) La probabilidad de que no sea chico, sabiendo que no es lector habitual.



i)

$$P = P(L) = P(M \cap L) + P(H \cap L) = P(M) \cdot P(L/M) + P(H) \cdot P(L/H) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 0,75 + \frac{1}{3} \cdot 0,60 = 0,50 + 0,20 = \underline{0,70}.$$

ii)

$$P = P\left(H \cap \overline{L}\right) = P(H) \cdot P\left(\overline{L}/H\right) = \frac{1}{3} \cdot 0,40 = \underline{0,1333}.$$

iii)

$$P = P\left(\overline{L}/M\right) = \frac{P\left(M \cap \overline{L}\right)}{P\left(\overline{L}\right)} = \frac{P(M) \cdot P\left(\overline{L}/M\right)}{1 - P(L)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0,25}{1 - 0,70} = \frac{0,1667}{0,30} = \underline{0,5556}.$$

****