PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

PRUEBA A

1º) Una empresa va a contratar personal para la campaña de rebajas. Cada dependienta que contrate trabajará 8 horas al día y cobrará 60 euros diarios. Cada cajera trabajará 10 horas al día y cobrará 90 euros diarios. Se seleccionan 8 dependientas y 9 cajeras en paro. Si la empresa dispone de 930 euros diarios pare sueldos, ¿cuántas empleadas de cada clase debe contratar para que cubran el mayor número de horas?

i) Plantee el problema. ii) Resuélvalo gráficamente.

iii) Analice gráficamente qué ocurre si cada cajera tuviera que trabajar 12 horas al día.

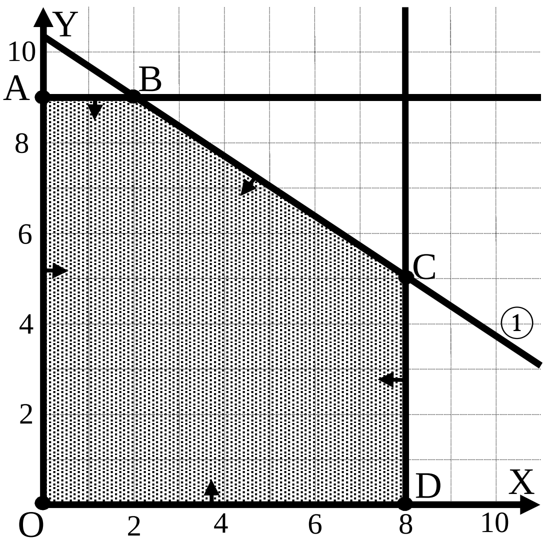
----

a)

Sean x e y el número de dependientas y cajeras que se contratan diariamente, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 60x+90y \le 930 \\ 0 \le x \le 8 \\ 0 \le y \le 9 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x+3y \le 31 \\ 0 \le x \le 8 \\ 0 \le y \le 9 \end{array}\right\}.$$



b)

La función de objetivos es la siguiente:

$f(x, y) = 60x + 90y.$

x	2	5
y	9	7

① $\Rightarrow 2x + 3y \le 31 \Rightarrow y \le \frac{31-2x}{3} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible, además del origen, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,9).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 9 \\ 2x + 3y = 31 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x + 27 = 31;\ \ 2x = 4;\ \ x = 2 \Rightarrow B(2,9).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 8 \\ 2x + 3y = 31 \end{array}\right\} \Rightarrow 16 + 3y = 31;\ \ 3y = 15;\ \ y = 5 \Rightarrow C(8,5).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 8 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(8,0).$$

Los valores de la función de objetivos $f(x,y) = 60x + 90y$ en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0,9) = 60 \cdot 0 + 90 \cdot 9 = 0 + 810 = 810.$$

$$B \Rightarrow f(2,9) = 60 \cdot 2 + 90 \cdot 9 = 120 + 810 = 930.$$

$$C \Rightarrow f(8,5) = 60 \cdot 8 + 90 \cdot 5 = 480 + 450 = 930.$$

$$D \Rightarrow f(8,0) = 60 \cdot 8 + 90 \cdot 0 = 480 + 0 = 480.$$

El máximo número de horas se produce en el punto C.

$$\underline{Se\ deben\ contratar\ 8\ dependientas\ y\ 5\ cajeras.}$$

$c)$

Si las cajeras trabajan 12 horas cobrarían 120 euros diarios.

Las nuevas restricciones son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 60x + 120y \leq 930 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x + 4y \leq 31 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{array}\right\}$$

La nueva función de objetivos es $g(x,y) = 60x + 120y$.

① $\Rightarrow 2x + 4y \leq 31 \Rightarrow y \leq \frac{31-2x}{4} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

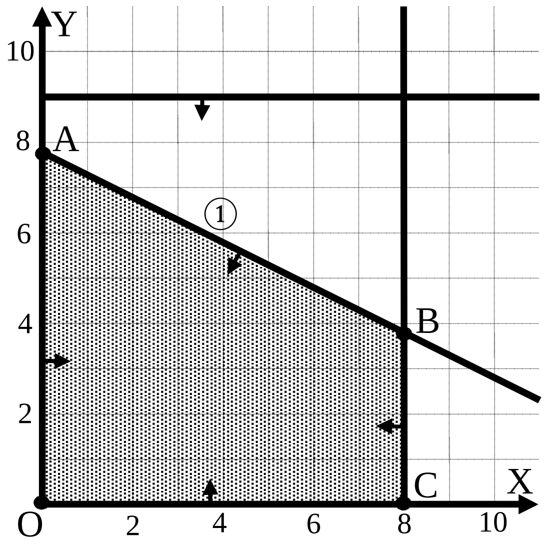
x	1,5	5,5
y	7	5

La nueva zona factible es la que aparece sombreada en la figura siguiente.

Los vértices de la nueva zona factible, además del origen, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ 2x + 4y = 31 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 31/4 = 7{,}75 \Rightarrow A(0,7'75).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{aligned} x = 8 \\ 2x + 4y = 31 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 16 + 4y = 31;$$



$4y = 15;\ \ y = 3{,}75 \Rightarrow C(8, 3'75).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{aligned} x = 8 \\ y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C(8, 0).$$

Los valores de la nueva función de objetivos $f(x, y) = 60x + 120y$ en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 7'75) = 60 \cdot 0 + 120 \cdot 7'75 =$

$= 0 + 930 = 930.$

$B \Rightarrow f(8, 3'75) = 60 \cdot 8 + 120 \cdot 3'75 = 480 + 450 = 930.$

$C \Rightarrow f(8, 0) = 60 \cdot 8 + 120 \cdot 0 = 480 + 0 = 480.$

El máximo número de horas se produce en el punto B.

Considerando, como es lógico, que el número de personas tiene que ser natural:

$\underline{Se\ deben\ contratar\ 8\ dependientas\ y\ 3\ cajeras.}$

****

2º) Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & si \quad x < -2 \\ x^2+2x+1 & si \; -2 \leq x < 1 \\ -x^2+2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$.

i) Estudie su continuidad y derivabilidad en todo R.

ii) Dibuje su gráfica.

iii) Aplicando la definición de derivada, calcule la derivada de $f(x)$ en $x = 3$.

----

i)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = -2$ y $x = 1$, cuya continuidad se estudia a continuación.

Para que la función sea continua en los puntos críticos es necesario que sus límites laterales en esos puntos sean iguales e iguales a los correspondientes valores de la función en esos puntos.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} (2x+5) = -4+1 = 1 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} (x^2+2\text{x}+1) = -4+4+1 = 1 = f(-2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = f(-2) \Rightarrow \underline{f(x)\ es\ continua\ en\ x = -2}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^2+2x+1) = 1+2+1 = 4 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (-x^2+2) = -1+2 = 1 = f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow \underline{f(x)\ no\ es\ continua\ en\ x = 1}.$$

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas laterales son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x < -2 \\ 2x+2 & si \; -2 \leq x < 1 \\ -2x & si \quad x \geq 1 \end{cases}.$$

$$f'(-2^-) = 2. \quad f'(-2^+) = -4+2 = -2 \Rightarrow f'(-2^-) \neq f'(-2^+).$$

$$\underline{La\ función\ no\ es\ derivable\ para\ x = -2}.$$

$$\underline{Conclusión: Continua\ en\ R - \{1\}.\ \ Derivable\ en\ R - \{-2, 1\}}.$$

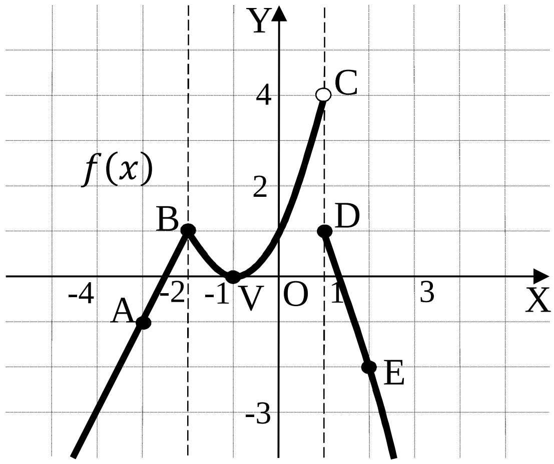
$ii)$

Representación gráfica de $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & si \quad x < -2 \\ x^2+2x+1 & si \ -2 \leq x < 1 \\ -x^2+2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}.$

En el intervalo $(-\infty, -2)$ la función es la recta $f(x) = 2x + 5$, de pendiente es $m = 2$ y pasa por $A(-3, -1)$.

En el intervalo $(-2, -1)$ la función es la parábola convexa $f(x) = (x+1)^2$, cuyo vértice es el punto $V(-1,0)$ y contiene a los puntos $B(-2, 1)$ y $C(1, 4)$.

En el intervalo $(1, +\infty)$ la función es la parábola $f(x) = -x^2 + 2$, que es cóncava, $(\cap)$, y que contiene a los puntos $D(1, 1)$ y $E(2, -2)$.



La representación gráfica, aproximada, es la que aparece en el gráfico adjunto.

****

3º) El salario medio correspondiente a una muestra aleatoria de 900 personas de una población dada es de 1.190 euros. Se sabe que los salarios de esa población siguen una distribución normal con desviación típica de 150 euros.

i) Calcule el intervalo de confianza al 95 % para la media poblacional.

ii) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que la amplitud del intervalo sea la misma, con un nivel de confianza del 97 %?
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

----

a)

$\alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = \mathbf{1{,}96}$.
$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96)$.

Conocemos: $n = 900;\ \ \overline{x} = 1.190;\ \sigma = 150;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(1.190 - 1{,}96 \cdot \frac{150}{\sqrt{900}};\ 1.190 + 1{,}96 \cdot \frac{150}{\sqrt{900}}\right);$

$(1.190 - 1{,}96 \cdot 5;\ 1.190 + 1{,}96 \cdot 5);\ \ (1.190 - 9{,}8;\ 1.190 + 9{,}8)$

$\underline{I.C._{95\,\%} = (1.180{,}2; 1.190{,}8).}$

b)

Si el intervalo de confianza tiene la misma amplitud es:

$E = \frac{1.190{,}8 - 1.180{,}2}{2} = \frac{10{,}6}{2} = 5{,}3.$

Para un nivel de confianza del 97 % es:

$1 - \alpha = 0{,}97 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}97 = 0{,}03 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}015} = \mathbf{2{,}17}$.
$1 - 0{,}015 = 0{,}9850 \ \rightarrow z = 2{,}17)$.

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \ \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2{,}17 \cdot \frac{150}{5{,}3}\right)^2 =$

$= (2{,}17 \cdot 28{,}30)^2 = 61{,}42^2 = 3771{,}81.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 3.372\ personas.}$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la ecuación matricial $AX + 2B = 2X$ con $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$i)$ Despeje la matriz X. $ii)$ Calcule la matriz X.

$i)$

$$AX + 2B = 2X;\ \ 2B = 2X - AX = (2I - A) \cdot X;$$

$$2 \cdot (2I - A)^{-1} \cdot B = (2I - A)^{-1} \cdot (2I - A) \cdot X = I \cdot X.$$

$$\underline{X = 2 \cdot (2I - A)^{-1} \cdot B.}$$

$ii)$

$$2I - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}. \qquad (2I - A)^t = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$|2I - A| = \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 24 - 8 = 16. \qquad Adj.de\ (2I - A)^t = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$(2I - A)^{-1} = \frac{Adj.de\ (2I-A)^t}{|2I-A|} = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo los valores hallados en la expresión de X:

$$X = 2 \cdot (2I - A)^{-1} \cdot B = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.}$$

****

2º) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

$i)\ \ f(x) = 3 + \sqrt{\frac{2}{x-1}}.$ $\qquad ii)\ \ g(x) = 3sen^2x - L(x^3 + 2).$

$iii)\ \ h(x) = 4 + tg\ x^2 + \exp(2x^2 + x).$

$i)$

$$f(x) = 3 + \sqrt{\frac{2}{x-1}}.$$

$$f(x) = 3 + m(x) \Rightarrow f'(x) = m'(x). \qquad (*)$$

$$m(x) = \sqrt{\frac{2}{x-1}} \Rightarrow L[m(x)] = L\sqrt{\frac{2}{x-1}} = \frac{1}{2}L2 - \frac{1}{2}L(x-1).$$

$$\frac{m'(x)}{m(x)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} \Rightarrow m'(x) = \frac{1}{2(x-1)} \cdot \left(3 + \sqrt{\frac{2}{x-1}}\right).$$

$$\underline{f'(x) = \frac{1}{2(x-1)} \cdot \left(3 + \sqrt{\frac{2}{x-1}}\right).}$$

$ii)$

$$g(x) = 3sen^2x - L(x^3 + 2).$$

$$g'(x) = 6 \cdot sen\ x \cdot \cos x - \frac{3x^2}{x^3+2}.$$

$$\underline{g'(x) = 3 \cdot sen\ (2x) - \frac{3x^2}{x^3+2}.}$$

$iii)$

$$h(x) = 4 + tg\ x^2 + \exp(2x^2 + x).$$

$$h(x) = 4 + \frac{sen\ x^2}{cos\ x^2} + e^{2x^2+x}.$$

$$h'(x) = \frac{2x \cdot cos\ x^2 \cdot \cos x^2 - sen\ x^2 \cdot 2x \cdot sen\ x^2}{cos^2\ x^2} + (4x+1) \cdot e^{2x^2+x} =$$

$$= \frac{2x \cdot (cos^2\ x^2 + sen^2\ x^2)}{cos^2\ x^2} + (4x+1) \cdot e^{2x^2+x} = \frac{2x}{cos^2\ x^2} + (4x+1) \cdot e^{2x^2+x}.$$

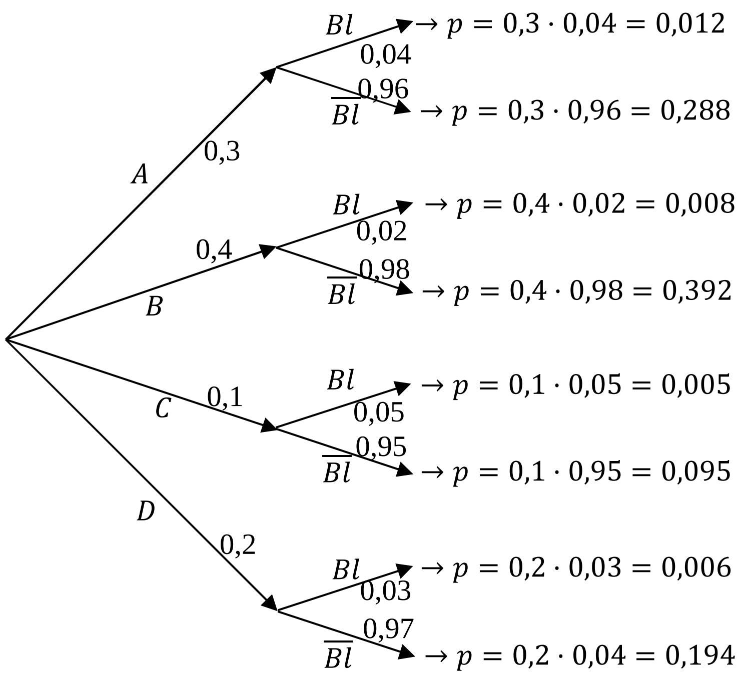
$$\underline{h'(x) = \frac{2x}{cos^2\ x^2} + (4x+1) \cdot e^{2x^2+x}.}$$

****

3º) En un almacén hay 300 cerraduras del modelo A, 400 del modelo B, 100 del modelo C y 200 del modelo D. La probabilidad de que una cerradura se bloquee es 0,04 se es del modelo A, 0,02 si es del modelo B, 0,05 si es del modelo C y 0,03 se es del modelo D. Se toma una cerradura al azar:

i) Calcule la probabilidad de que la cerradura se bloquee.

ii) Sabiendo que la cerradura se ha bloqueado, calcule la probabilidad de que no sea del modelo B.



i)

$$P = P(Bl) = P(A) \cdot P(Bl/A) + P(B) \cdot P(Bl/B) + P(C) \cdot P(Bl/C) +$$

$$+P(D) \cdot P(Bl/D) = 0{,}3 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02 + 0{,}1 \cdot 0{,}05 + 0{,}2 \cdot 0{,}03 =$$

$$= 0{,}012 + 0{,}008 + 0{,}005 + 0{,}06 = \underline{0{,}031}.$$

ii)

La probabilidad pedida es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que sea del modelo B.

$$P = 1 - P\left(\frac{Bl}{B}\right) = 1 - \frac{P(B \cap Bl)}{P(Bl)} =$$

$$= 1 - \frac{P(B) \cdot P(Bl/B)}{P(A) \cdot P(Bl/A) + P(B) \cdot P(Bl/B) + P(C) \cdot P(Bl/C) + P(D) \cdot P(Bl/D)} =$$

$$= 1 - \frac{0{,}4 \cdot 0{,}02}{0{,}3 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02 + 0{,}1 \cdot 0{,}05 + 0{,}2 \cdot 0{,}03} = 1 - \frac{0{,}008}{0{,}031} = 1 - 0{,}2581 = \underline{0{,}7419}.$$

****