PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE NAVARRA

JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

PRUEBA A

1º) Una empresa fabrica y vende dos tipos de productos, A y B. El precio de venta de una tonelada del producto A en el mercado es de 200 euros y el de una tonelada de B es de 500 euros. Para su elaboración utilizan dos materias primas, M1 y M2, de la que disponen diariamente de 184 y 100 unidades, respectivamente. Para fabricar una tonelada de A se necesitan 8 unidades de M1 y 2 unidades de M2. Para elaborar una tonelada de B se necesitan 4 unidades M1 y 3 unidades M2. El coste unitario asociado a la fabricación del producto A es de 25 euros y el de B es de 275 euros. Determine cuántas toneladas de cada producto deberá fabricar diariamente esta empresa si desea maximizar el beneficio, garantizando un nivel de fabricación total de al menos 15 unidades.

i) Plantee el problema. ii) Resuélvalo gráficamente.

iii) Una nueva normativa en el sector de esta empresa exige que las emisiones contaminantes derivadas del proceso de fabricación no supere el nivel de 150 unidades de emisiones diarias. La fabricación de una tonelada de A genera 2,5 unidades de emisiones contaminantes y la de una tonelada de B genera 6 unidades. Analice gráficamente cómo afectaría a la política de fabricación el cumplimiento de la nueva normativa.

----

i)

Sean x e y el número de toneladas de los productos A y B que se fabrican diariamente, respectivamente.

La función ventas es $V(x, y) = 200x + 500y$.

La función compras es $C(x, y) = 25x + 275y$.

La función beneficios es la diferencia entre la función ventas y la función compras: $B(x, y) = V(x, y) - C(x, y) = 200x + 500y - 25x - 275y = 175x + 225y$.

Las condiciones del ejercicio se establecen en el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 8x+4y\le 184 \\ 2x+3y\le 100 \\ x+y\ge 15 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x+y\le 46 \\ 2x+3y\le 100 \\ x+y\ge 15 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{array}\right\}.$$

$ii)$

① $\Rightarrow 2x+y\le 46 \Rightarrow y\le 46-2x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	10	23
y	26	0

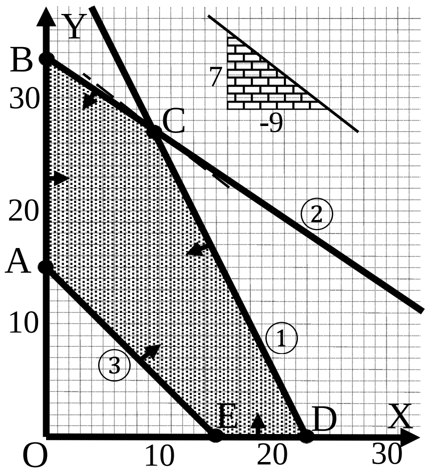
② $\Rightarrow 2x+3y\le 100 \Rightarrow y\le \frac{100-2x}{3} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	29	20
y	16	20

③ $\Rightarrow x+y\ge 15 \Rightarrow y\ge 15-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	0	15
y	15	0

La región factible es la zona sombreada de la figura adjunta.



Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+y=15 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,15).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 2x+3y=100 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{100}{3} \Rightarrow B\left(0,\frac{100}{3}\right).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=46 \\ 2x+3y=100 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x-y=-46 \\ 2x+3y=100 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y=54;\ \ y=27;\ \ 2x+27=46;\ \ 2x=19 \Rightarrow x=\frac{19}{2} \Rightarrow C\left(\frac{19}{2},27\right).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 2x+y=46 \end{array}\right\} \Rightarrow D(23,0).$ $\qquad E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x+y=15 \end{array}\right\} \Rightarrow E(15,0).$

Los valores de la función de beneficios en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,15)=175\cdot 0+225\cdot 15=0+3.375=3.375.$

$B \Rightarrow f\left(0,\frac{100}{3}\right)=175\cdot 0+225\cdot\frac{100}{3}=0+7.500=7.500.$

$C \Rightarrow f\left(\frac{19}{2},27\right)=175\cdot\frac{19}{2}+225\cdot 27=1.662{,}5+6.075=7.737{,}5.$

$D \Rightarrow f(23,0)=175\cdot 23+225\cdot 0=4.025+0=4.025.$

$E \Rightarrow f(15,0)=175\cdot 15+225\cdot 0=2.625+0=2.625.$

Se maximizan beneficios en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de beneficios, como puede observarse en la figura.

$$B(x,y) = 175x + 225y = 0 \Rightarrow y = -\frac{175}{225}x = -\frac{7}{9}x \Rightarrow \boldsymbol{m} = -\frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{9}}.$$

$$\underline{Maximiza\ beneficios\ fabricando\ 9{,}5\ toneladas\ del\ producto\ A\ y\ 27\ del\ B.}$$

$ii)$

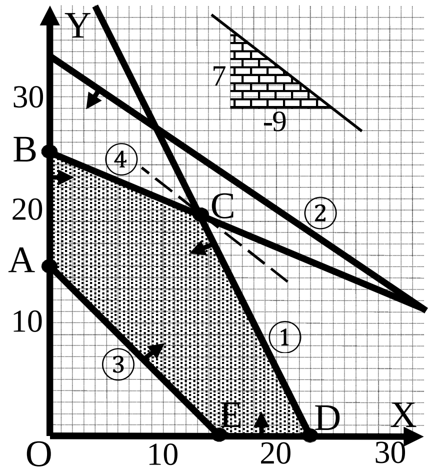
La nueva condición añade una nueva restricción, que es $2{,}5x + 6y \leq 150$.

$2{,}5x + 6y \leq 150;\ 5x + 12y \leq 300.$

④ $\Rightarrow 5x + 12y \leq 300 \Rightarrow$

$\Rightarrow y \leq \frac{300-5x}{12} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	24
y	25	15



La nueva zona factible es la indicada en la figura de la derecha, en la cual se observa que han cambiado los vértices B y C que, ahora son los siguientes:

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ 5x + 12y = 300 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{300}{12} = 25 \Rightarrow B(0,25).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y = 46 \\ 5x + 12y = 300 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -10x - 5y = -230 \\ 10x + 24y = 600 \end{array}\right\} \Rightarrow 19y = 370 \Rightarrow y = \frac{370}{19} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + \frac{370}{19} = 46;\ \ 38x + 370 = 874 \Rightarrow x = \frac{874-370}{38} = \frac{504}{38} = \frac{252}{19} \Rightarrow C\left(\frac{370}{19}, \frac{252}{19}\right).$$

Los valores de la función de beneficios en estos dos vértice son los siguientes:

$$B \Rightarrow f(0,25) = 175 \cdot 0 + 225 \cdot 25 = 0 + 5.625 = 5.625.$$

$$C \Rightarrow f\left(\frac{370}{19}, \frac{252}{19}\right) = 175 \cdot \frac{370}{19} + 225 \cdot \frac{252}{19} = 3.407{,}9 + 2.984{,}2 = 6.392{,}1.$$

De nuevo se maximizan beneficios en el nuevo punto C, como se corrobora con la pendiente de la función de beneficios.

$\frac{370}{19} = 19{,}47.$ $\frac{252}{19} = 13{,}26.$ Con la nueva normativa maximiza beneficios:

$$\underline{Fabricando\ 19{,}47\ toneladas\ del\ producto\ A\ y\ 13{,}26\ toneladas\ del\ B.}$$

****

2º) a) Calcule las siguientes integrales:

i) $I = \int sen\,(3x) \cdot [\cos(3x)]^2 \cdot dx.$ ii) $I = \int \left(5 + 3x^2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right) \cdot dx.$

b) Calcule dos funciones distintas cuya derivada sea $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}} + e^{2x}$.

----

a)

i)

$$I = \int sen\,(3x) \cdot [\cos(3x)]^2 \cdot dx.$$

$$I = \int sen\,(3x) \cdot [\cos(3x)]^2 \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \cos(3x) \cdot dx = dt \\ sen\,(3x) \cdot dx = -\frac{1}{3} \cdot dt \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int t^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot dt = -\frac{1}{3} \cdot \int t^2 \cdot dt = -\frac{1}{3} \cdot \frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{9} \cdot [\cos(3x)]^3 + C.$$

$$\underline{I = \int sen\,(3x) \cdot [\cos(3x)]^2 \cdot dx = -\frac{1}{9} \cdot [\cos(3x)]^3 + C.}$$

ii)

$$I = \int \left(5 + 3x^2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right) \cdot dx.$$

$$I = \int \left(5 + 3x^2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right) \cdot dx = 5x + \frac{3x^3}{3} + L|x| + 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + C.$$

$$\underline{I = \int \left(5 + 3x^2 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}\right) \cdot dx = x^3 + 5x - \frac{1}{x^2} + L|x| + C.}$$

b)

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}} + e^{2x}\right) \cdot dx = \int (x+2)^{-\frac{1}{2}} \cdot dx + \int e^{2x} \cdot dx =$$

$= A + B.$ (*)

$$A = \int (x+2)^{-\frac{1}{2}} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x + 2 = t \\ dx = dt \end{array}\right\} \Rightarrow \int t^{-\frac{1}{2}} \cdot dt = \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= 2\sqrt{t} + C = \underline{2\sqrt{x+2} + C}.$$

$$B = \int e^{2x} \cdot dx \Rightarrow \left\{2x = t \to dx = \frac{1}{2} dt\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \int e^t\, dt = \frac{1}{2} e^t + C = \underline{\frac{1}{2} e^{2x} + C}.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A y B:

$$F(x) = A + B = 2\sqrt{x+2} + \frac{1}{2}e^{2x} + C.$$

$\underline{Solución\text{: } F_1(x) = 2\sqrt{x+2} + \frac{1}{2}e^{2x};\;\; F_2(x) = 2\sqrt{x+2} + \frac{1}{2}e^{2x} + 1.}$

****

3º) Una caja contiene doce bolígrafos, de los cuales cuatro son defectuosos. Se extraen tres bolígrafos de forma consecutiva y sin devolverlos a la caja.

i) Calcule la probabilidad de que los tres bolígrafos extraídos no tengan defectos.

ii) Calcule la probabilidad de que al menos un bolígrafo de entre los tres extraídos sea defectuoso.

iii) Calcule la probabilidad de que solamente un bolígrafo sea defectuoso.

----

i)

Aplicando la regla de Laplace:

$$P = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles} = \frac{C_{8,3}}{C_{12,3}} = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{\frac{8!}{(8-3)!\cdot 3!}}{\frac{12!}{(12-3)!\cdot 3!}} = \frac{\frac{8!}{5!}}{\frac{12!}{9!}} = \frac{\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!}}{\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9!}{9!}} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{12\cdot 11\cdot 10} =$$

$$= \frac{2\cdot 7\cdot 3}{3\cdot 11\cdot 5} = \frac{14}{55} = \underline{0{,}2545}.$$

ii)

El suceso contrario a que "al menos un bolígrafo sea defectuoso" es que "ninguno de los tres bolígrafos sea defectuoso", por lo cual, la probabilidad pedida es:

$$P = 1 - \frac{C_{8,3}}{C_{12,3}} = 1 - \frac{14}{55} = \frac{55-14}{55} = \frac{41}{55} = \underline{0{,}7455}.$$

iii)

$$P = P\left(D\ \overline{D}\ \overline{D}\right) + P\left(\overline{D}\ D\ \overline{D}\right) + P\left(\overline{D}\ \overline{D}\ D\right) =$$

$$= \frac{4}{12}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{7}{10} + \frac{8}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{7}{10} + \frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}\cdot\frac{4}{10} = 3\cdot\frac{4}{12}\cdot\frac{8}{11}\cdot\frac{7}{10} = \frac{8}{11}\cdot\frac{7}{10} = \frac{28}{55} = \underline{0{,}5091}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $X=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

i) Resuelva el sistema siguiente y compruebe si su solución coincide con las matrices anteriores X e Y: $\left.\begin{array}{r}2A-3B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -1 & -3 & 1\end{pmatrix}\\ 3A-2B=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}\end{array}\right\}$

ii) Razone si la matriz $X+Y$ es invertible.

----

i)

$$\left.\begin{array}{r}2A-3B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -1 & -3 & 1\end{pmatrix}\\ 3A-2B=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r}-4A+6B=\begin{pmatrix}0 & -4 & 2\\ 2 & 6 & -2\end{pmatrix}\\ 9A-6B=\begin{pmatrix}15 & 9 & 3\\ 3 & -6 & 12\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5A=\begin{pmatrix}15 & 5 & 5\\ 5 & 0 & 10\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}}.$$

$$\left.\begin{array}{r}2A-3B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ -1 & -3 & 1\end{pmatrix}\\ 3A-2B=\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r}-6A+9B=\begin{pmatrix}0 & -6 & 3\\ 3 & 9 & -3\end{pmatrix}\\ 6A-4B=\begin{pmatrix}10 & 6 & 2\\ 2 & -4 & 8\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5B=\begin{pmatrix}10 & 0 & 5\\ 5 & -10 & 5\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}}.$$

ii)

Las matrices X e Y tienen ambas por dimensión 2×3 (dos filas y tres columnas) por lo cual la suma $X+Y$ tiene la misma dimensión.

Para que una matriz sea invertible es condición necesaria de que sea cuadrada.

$$\underline{La\ matriz\ X+Y\ no\ puede\ ser\ invertible\ por\ no\ ser\ cuadrada.}$$

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{3}{x^2-4}$, calcule:

i) Dominio y puntos de corte con los ejes. ii) Asíntotas.

iii) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

iv) Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

v) Con los datos que ha obtenido, dibuje su gráfica.

----

i)

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2.$$

El dominio de una función racional es R, excepto los valores que anulan el denominador.

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{-2, 2\}}.$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{3}{-4} \Rightarrow \underline{A\left(0, -\frac{3}{4}\right)}.$$

$$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{x^2-4} = 0 \Rightarrow x \notin R \Rightarrow \underline{La\ función\ no\ corta\ al\ eje\ X}.$$

ii)

Asíntotas verticales: Son de la forma $x = k$; son los valores finitos de x que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = -2, x = 2}.$$

Asíntotas horizontales: Son de la forma $y = k$; son los valores finitos que toma la función cuando $x \rightarrow \pm\infty$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x^2-4} = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función.}$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}\ y\ n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx].$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x+1}{x^2+2x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^3+2x^2} = 0.$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas}.$$

(son incompatibles con las asíntotas horizontales)

$iii)$

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando el valor de su primera derivada en ese punto es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{-3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-6x}{(x^2-4)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-6x}{(x^2-4)^2} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función y que $(x^2-4)^2 > 0, \forall x \in D(f)$, los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función son los siguientes:

$$\underline{f(x)\ creciente: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, -2) \cup (-2, 0)}.$$

$$\underline{f(x)\ decreciente: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(0, 2) \cup (2, +\infty)}.$$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto es que se anule su primera derivada:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para el valor que anula la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f''(x) = \frac{-6 \cdot (x^2-4)^2 - (-6x) \cdot [2 \cdot (x^2-4) \cdot 2x]}{(x^2-4)^4} = \frac{-6 \cdot (x^2-4) + 24x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{-6x^2+24+24x^2}{(x^2-4)^3} =$$

$$= \frac{18x^2+24}{(x^2-4)^3} = \frac{6(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{6(0+4)}{(0-4)^3} = \frac{24}{-64} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = \frac{3}{0-4} = -\frac{3}{4} \Rightarrow Máximo\ relativo: \underline{A\left(0, -\frac{3}{4}\right)}.$$

$iv)$

Una función es cóncava ($\cap$) o convexa ($\cup$) en un punto cuando el valor de su segunda derivada en ese punto es negativa o positiva, respectivamente.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{6(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} \Rightarrow 6(3x^2+4) > 0\ \forall x \in R.$$

La segunda derivada es positivo o negativa según lo sea $(x^2 - 4)^3$.

$f''(x) > 0 \Rightarrow |x| > 2 \;\; y \;\; f''(x) < 0 \Rightarrow |x| < 2.$

Los periodos de concavidad y convexidad de la función son los siguientes:

$$\underline{f(x)\ cóncava\ (\cap): f''(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-2,2).}$$

$$\underline{f(x)\ convexa\ (\cup): f''(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty,-2) \cup (2,+\infty).}$$

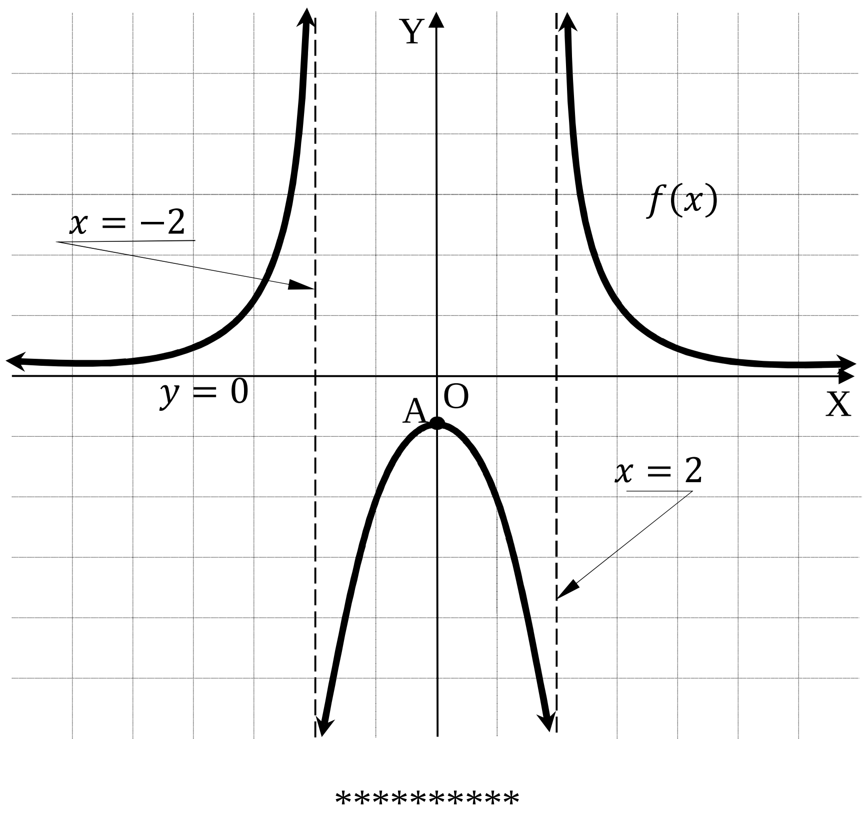
La condición necesaria para que una función tenga un punto de inflexión es que se anule su segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{6(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} = 0 \Rightarrow 6(3x^2 + 4) \neq 0, \forall x \in R.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ puntos\ de\ inflexión.}$$

$v)$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

3º) En una región se selecciona una muestra de 600 jóvenes y se observa que 500 de ellos son lectores habituales.

i) Construya un intervalo de confianza para la proporción poblacional de jóvenes no lectores habituales, con un nivel de confianza del 99 %.

ii) Analice el efecto que tiene en el intervalo la disminución del nivel de confianza. (Escriba las formulas necesarias y justifique las respuestas)

----

i)

Nivel de confianza del 99 %.

$\alpha = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}005} = \mathbf{2{,}578}$.
$(1 - 0{,}0050 = 0{,}9950 \rightarrow z = 2{,}578)$.

Datos: $n = 600;\ p = \frac{600-500}{600} = \frac{100}{600} = \frac{1}{6};\ q = \frac{5}{9};\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}578$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(\frac{1}{6} - 2{,}578 \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{600}};\ \frac{1}{6} + 2{,}578 \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{600}}\right);$$

$\left(\frac{1}{6} - 2{,}578 \cdot 0{,}0152;\ \frac{1}{6} + 2{,}578 \cdot 0{,}0152\right);\ \ (0{,}1667 - 0{,}0392;\ 0{,}1667 + 0{,}0392)$.

$$\underline{I.C._{99\,\%} = (0{,}1275;\ 0{,}2059).}$$

ii)

El nivel de confianza es directamente proporcional al valor del intervalo; es decir: si aumentamos el nivel de confianza se agranda el intervalo de confianza. Para una mayor comprensión: si se quisiera un nivel del confianza del 100 %, el intervalo de confianza sería el valor del recorrido de la variable.

$$\underline{Conclusión: a\ mayor\ nivel\ de\ confianza, mayor\ valor\ del\ intervalo.}$$

****