

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE NAVARRA****SEPTIEMBRE – 2016**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Realiza una de las dos opciones propuestas (A o B).

PRUEBA A1º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$:i) Encuentre todas las matrices cuadradas X de orden 2 que verifiquen: $A \cdot X = O$. (O es la matriz nula).ii) ¿Se cumple que $X \cdot A = O$?

iii) ¿Alguna de esas matrices X es simétrica?

i)

Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - 3c & 3b - 3d \\ 2a - 2c & 2b - 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a - 3c = 0 \\ 2a - 2c = 0 \\ 3b - 3d = 0 \\ 2b - 2d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}}$$

ii)

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 2b & -3a - 2b \\ 3a + 2b & -3a - 2b \end{pmatrix}$$

$$\underline{X \cdot A = O \Rightarrow a = b = 0.}$$

iii)

Una matriz es simétrica cuando es igual a su traspuesta.

X es simétrica para $a = b \in R$.

2º) Dada la función $f(x) = \frac{2x^3}{x^2-1}$, halle:

i) Dominio y puntos de corte con los ejes. ii) Asíntotas.

iii) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

iv) Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

v) Con los datos que ha obtenido, dibuje su gráfica.

i)

Por tratarse de una función racional su dominio es \mathbb{R} , excepto los valores de x que anulan el denominador: $D(f) \Rightarrow \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$\text{Eje } Y \Rightarrow x = 0 \rightarrow \underline{O(0, 0)}.$$

$$\text{Eje } X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^3}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x = 0 \rightarrow \underline{O(0, 0)}.$$

El único punto de corte con los ejes de $f(x)$ es el origen de coordenadas.

ii)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$, son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^2-1} = \infty \Rightarrow \underline{\text{No tiene asíntotas horizontales.}}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \underline{\text{La rectas } x = -1 \text{ y } x = 1 \text{ son asíntotas verticales.}}$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - mx \right].$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x^3-x^2} = 2.$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - mx \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3}{x^2-1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^2-1} = 0.$$

La recta $y = 2x$ es asíntota oblicua de la función.

iii)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{6x^2 \cdot (x^2-1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{6x^4 - 6x^2 - 4x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^4 - 6x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0; 2x^2(x^2-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{3}, x_3 = \sqrt{3}.$$

Teniendo en cuenta que la función $f(x) = \frac{2x^3}{x^2-1}$ es simétrica con respecto al origen por ser $f(-x) = -f(x)$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

Decrecimiento: $f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$.

Crecimiento: $f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

Una función tiene un extremo relativo (máximo o mínimo) para los valores de x que anulan la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trate de un máximo relativo y, si es positiva, de un mínimo relativo.

$$f''(x) = \frac{(8x^3-12x) \cdot (x^2-1)^2 - 2x^2(x^2-3) \cdot [2 \cdot (x^2-1) \cdot 2x]}{(x^2-1)^4} = \frac{(8x^3-12x) \cdot (x^2-1) - 8x^3(x^2-3)}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \frac{8x^5 - 8x^3 - 12x^3 + 12x - 8x^5 + 24x^3}{(x^2-1)^3} = \frac{4x^3 + 12x}{(x^2-1)^3} = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow \text{Ni máximo ni mínimo (para punto de inflexión).}$$

$$f''(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}(3+3)}{(3-1)^3} = \frac{24\sqrt{3}}{8} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo para } x = \sqrt{3}.$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{3-1} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \cong 5,2 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo relativo: } A(\sqrt{3}, 3\sqrt{3})}.$$

Por simetría con respecto al origen $\Rightarrow \underline{\text{Máximo relativo: } B(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3})}$.

iv)

Una función es cóncava o convexa cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente. $f''(x) = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$.

Concavidad (\cap): $f''(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

Convexidad (\cup): $f''(x) > 0 \Rightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

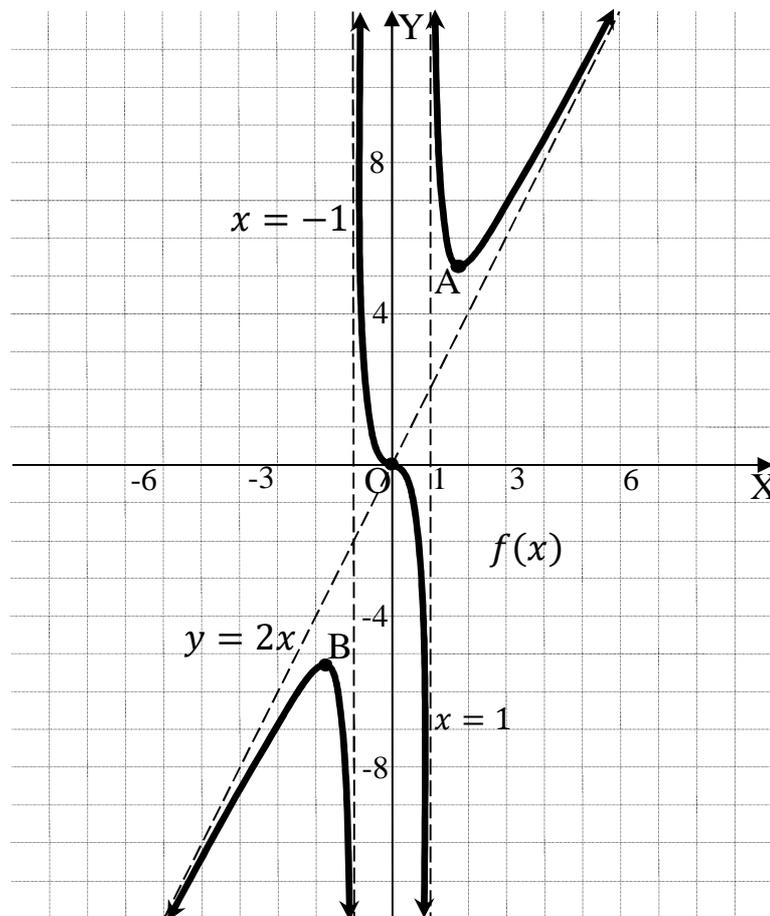
Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0; 4x(x^2+3) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Punto de inflexión: $O(0, 0)$.

v)

Considerando los elementos hallados anteriormente, la representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



3º) El beneficio anual (pérdidas en el caso de valores negativos) de las empresas de una determinada comunidad sigue una distribución normal con una desviación típica de 2 millones de euros.

i) Se elige una muestra aleatoria de 25 empresas y, la media muestral observada es de 0,5 millones. Determine el intervalo de confianza del 95 % para el beneficio medio anual de las empresas de esa comunidad.

ii) Si se desea obtener un intervalo de confianza del 90 % para el beneficio medio con una amplitud de 2 millones de euros, ¿qué tamaño deberá tener la muestra?

i)

$$1 - \alpha = 1 - 0,95 = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96. \\ (1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

$$\text{Datos: } n = 25; \sigma = 2; \bar{x} = 0,5; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96.$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de \bar{x} , σ y n , es la siguiente: $(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

$$(0,5 - 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{25}}; 0,5 + 1,96 \cdot \frac{2}{\sqrt{25}}); (0,5 - 1'96 \cdot 0'4; 0,5 + 1'96 \cdot 0'4);$$

$$(0,5 - 0,784; 0,5 + 0'784) \Rightarrow \underline{I.C._{95\%} = (-0'284; 1'284)}.$$

ii)

Para un nivel del 90 %:

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645. \\ (1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$$

$$E = \frac{\text{Amplitud del intervalo}}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$\text{Datos: } \bar{x} = 0,5; \sigma = 2; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645; E = 1.$$

$$\text{Siendo } E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,645 \cdot \frac{2}{1}\right)^2 = \\ = (1,645 \cdot 2)^2 = 3,29^2 = 10,82.$$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 11 empresas.

OPCIÓN B

1º) Una empresa de transporte de viajeros dispone de 12 chóferes, 10 autobuses de 25 plazas y 6 autobuses de 50 plazas y tiene que llevar de excursión a 400 escolares. El gasto para ese viaje de un autobús grande es de 900 euros y el gasto de uno pequeño es de 600 euros. ¿Cuántos autobuses de cada clase debe utilizar en esa excursión para tener el menor gasto?

i) Plantee el problema. ii) Resolución gráfica.

iii) Analice gráficamente qué ocurre si el gasto del autobús pequeño se reduce a 450 euros.

i)

Sean x e y el número de autobuses de 25 y 50 plazas que se utilizan en la excursión, respectivamente.

Las restricciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 12 \\ 25x + 50y \geq 400 \\ x \leq 10, y \leq 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \leq 12 \\ x + 2y \geq 16 \\ x \leq 10, y \leq 6 \end{array} \right\}.$$

La región factible se indica sombreada en la figura:

① $\Rightarrow x + y \leq 12 \Rightarrow y \leq 12 - x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	0	12
y	12	0

② $\Rightarrow x + 2y \geq 16 \Rightarrow y \geq \frac{16-x}{2} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow No.$

x	0	8
y	8	4

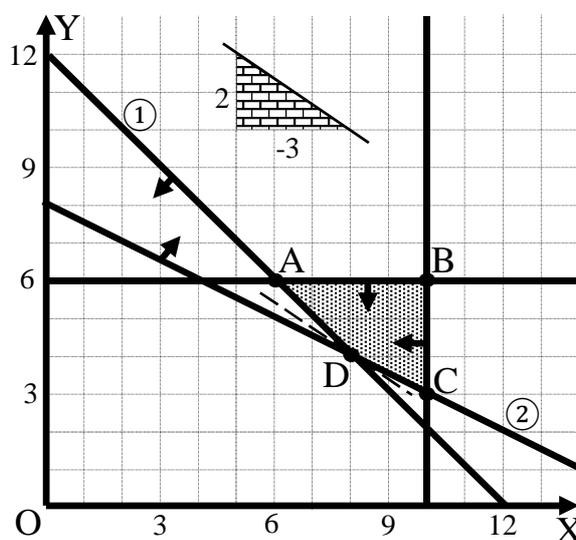
Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 12 \\ y = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow A(6, 6).$$

$$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 10 \\ y = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow B(10, 6).$$

$$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 10 \\ x + 2y = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow C(10, 3).$$

$$D \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 12 \\ x + 2y = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow D(8, 4).$$



La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 600x + 900y$.

ii)

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(6,6) = 600 \cdot 6 + 900 \cdot 6 = 3.600 + 5.400 = 9.000.$$

$$B \Rightarrow f(10,6) = 600 \cdot 10 + 900 \cdot 6 = 6.000 + 5.400 = 11.400.$$

$$C \Rightarrow f(10,3) = 600 \cdot 10 + 900 \cdot 3 = 6.000 + 2.700 = 8.700.$$

$$D \Rightarrow f(8,4) = 600 \cdot 8 + 900 \cdot 4 = 4.800 + 3.600 = 8.400.$$

El mínimo se produce en el punto D.

También se hubiera obtenido el punto D por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

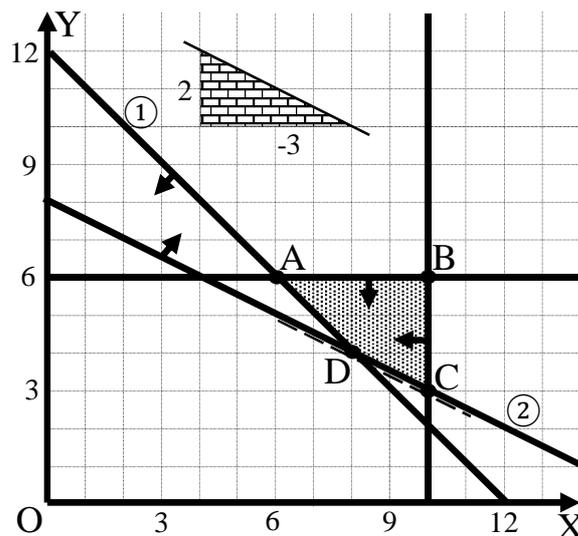
$$f(x,y) = 600x + 900y = 0 \Rightarrow y = -\frac{600}{900}x = -\frac{2}{3}x \Rightarrow m = -\frac{2}{3}.$$

Deben utilizarse 8 autobuses de 25 plazas y 4 autobuses de 50 plazas.

El menor coste posible es de 8.400 euros.

iii)

Si el gasto del autobús pequeño se reduce a 450 euros, la función de beneficios es la siguiente: $f(x,y) = 450x + 900y$.



El punto de mínimo gasto puede obtenerse por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 450x + 900y = 0 \Rightarrow y = -\frac{450}{900}x = -\frac{1}{2}x \Rightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Como se observa en el gráfico, los puntos de mínimo gasto son los puntos enteros del segmento CD, como se puede observar en la figura. Solamente tiene dos puntos enteros, que son los extremos C y D.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(6,6) = 450 \cdot 6 + 900 \cdot 6 = 2.700 + 5.400 = 8.100.$$

$$B \Rightarrow f(10,6) = 450 \cdot 10 + 900 \cdot 6 = 4.500 + 5.400 = 9.900.$$

$$C \Rightarrow f(10,3) = 450 \cdot 10 + 900 \cdot 3 = 4.500 + 2.700 = 7.200.$$

$$D \Rightarrow f(8,4) = 450 \cdot 8 + 900 \cdot 4 = 3.600 + 3.600 = 7.200.$$

Deben utilizarse 10 autobuses de 25 plazas y 3 autobuses de 50 plazas

o también:

Pueden utilizarse 8 autobuses de 25 plazas y 4 autobuses de 50 plazas.

El menor coste posible es de 7.200 euros.

2º) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

i) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+3x}}$.

ii) $g(x) = L(1 - 5x) + e^{7x^2}$.

iii) $h(x) = 3\text{sen } x \cdot (\cos 2x)^2$.

i)

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+3x}}$$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \sqrt{1+3x} - x^2 \cdot \frac{3}{2\sqrt{1+3x}}}{(\sqrt{1+3x})^2} = \frac{4x(1+3x) - 3x^2}{2\sqrt{1+3x}(1+3x)} = \frac{4x + 12x^2 - 3x^2}{2(1+3x) \cdot \sqrt{1+3x}} = \frac{9x^2 + 4x}{2(1+3x) \cdot \sqrt{1+3x}} =$$

$$= \frac{x(9x+4) \cdot \sqrt{1+3x}}{2(1+3x) \cdot (1+3x)} =$$

$$\underline{f'(x) = \frac{x(9x+4) \cdot \sqrt{1+3x}}{2(1+3x)^2}}$$

ii)

$$g(x) = L(1 - 5x) + e^{7x^2}$$

$$\underline{g'(x) = \frac{-5}{1-5x} + 14x \cdot e^{7x^2}}$$

iii)

$$h(x) = 3\text{sen } x \cdot (\cos 2x)^2$$

$$h'(x) = 3 \cdot \{\cos x \cdot (\cos 2x)^2 + \text{sen } x \cdot 2 \cdot \cos(2x) \cdot 2 \cdot [-\text{sen } (2x)]\} =$$

$$= 3 \cos(2x) \cdot [\cos x \cdot \cos(2x) - 4 \cdot \text{sen } x \cdot \text{sen } (2x)] =$$

$$= 3 \cos(2x) \cdot [\cos x \cdot \cos(2x) - 4 \cdot \text{sen } x \cdot 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x] =$$

$$= 3 \cos x \cdot \cos(2x) \cdot [\cos(2x) - 8 \cdot \text{sen}^2 x] =$$

$$= 3 \cos x \cdot \cos(2x) \cdot (\cos^2 x - \text{sen}^2 x - 8 \cdot \text{sen}^2 x).$$

$$\underline{h'(x) = 3 \cos x \cdot \cos(2x) \cdot (\cos^2 x - 9\text{sen}^2 x)}$$

3º) La siguiente tabla recoge la distribución por sectores de las 750 empresas existentes en Pamplona y el porcentaje de las mismas que ha reducido su plantilla en 2.015:

Sector	Nº total de empresas	% de empresa que reducen plantilla
Primario	120	15
Industria	330	20
Servicios	300	40

i) ¿Cuál es la probabilidad de que una empresa elegida al azar haya reducido su plantilla en 2.015 y pertenezca al sector primario?

ii) Si se sabe que una empresa no redujo su plantilla en 2.015, ¿cuál es la probabilidad de que la empresa pertenezca al sector servicios?

La probabilidad de reducir plantilla en 2.015 de las empresas de los sectores primario, industria y servicios son, respectivamente:

$$P(P) = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}; \quad P(I) = \frac{20}{330} = \frac{2}{11}; \quad P(S) = \frac{40}{300} = \frac{2}{15}.$$

i)

$$P = \frac{P(S)}{P(P)+P(I)+P(S)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{8}+\frac{2}{11}+\frac{2}{15}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{11 \cdot 15 + 2 \cdot 8 \cdot 15 + 2 \cdot 8 \cdot 11}{8 \cdot 11 \cdot 15}} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 11}{165 + 240 + 176} = \frac{167}{581}.$$

ii)

La probabilidad de no reducir plantilla en 2.015 de las empresas de los sectores primario, industria y servicios son, respectivamente:

$$P(\bar{P}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}; \quad P(\bar{I}) = 1 - \frac{2}{11} = \frac{9}{11}; \quad P(\bar{S}) = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}.$$

$$P = \frac{P(\bar{S})}{P(\bar{P})+P(\bar{I})+P(\bar{S})} = \frac{\frac{13}{15}}{\frac{7}{8}+\frac{9}{11}+\frac{13}{15}} = \frac{\frac{13}{15}}{\frac{7 \cdot 11 \cdot 15 + 9 \cdot 8 \cdot 15 + 13 \cdot 8 \cdot 11}{8 \cdot 11 \cdot 15}} = \frac{13 \cdot 8 \cdot 11}{1.155 + 1.080 + 1.144} = \frac{1.144}{3.379}.$$
