PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

EXTRAORDINARIA – 2022

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene cinco partes. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder u una única pregunta. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario. No se podrán usar calculadoras que tengan algunas de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de derivadas e integrales y almacenamiento de datos alfanuméricos.

Primera parte.

1º) Discute la existencia de soluciones del sistema $\begin{cases} ax+2y-2z=2 \\ 2x+2y-2z=a \\ ax+2y-z=1 \end{cases}$ en función del parámetro a. Resuelve el sistema para $a=1$, si es posible.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ a & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} a & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & a \\ a & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ a & 2 & -1 \end{vmatrix}=-2a-8-4a+4a+4a+4=0;\ \ 2a-4=0;$$

$a-2=0 \Rightarrow a=2.$

$$\underline{Para\ a\neq 2 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_2\} \Rightarrow\ Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Para $a = 1$ el sistema resulta: $\left.\begin{array}{r} x + 2y - 2z = 2 \\ 2x + 2y - 2z = 1 \\ x + 2y - z = 1 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{2-4} = \frac{-4-4-4+4+8+2}{-2} = \frac{2}{-2} = -1.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-1-4-4+2+2+4}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2+8+2-4-2-4}{-2} = \frac{2}{-2} = -1.$$

$$\underline{Solución: x = -1,\ y = \frac{1}{2},\ z = -1.}$$

****

2º) Calcula de manera razonada, aplicando las propiedades adecuadas, el valor del determinante: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$, sabiendo que $\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6$.

$$\begin{vmatrix} p+a & q+b & r+c \\ 2x & 2y & 2z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6; \;\; 2 \cdot \begin{vmatrix} a+p & b+q & c+r \\ x & y & z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 6;$$

$$\begin{vmatrix} a+p & b+q & c+r \\ x & y & z \\ p+x & q+y & r+z \end{vmatrix} = 3; \;\; \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & q & r \\ 0 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3; \;\; \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} + 0 = 3;$$

$$-\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow \underline{\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -3.}$$

En la realización del ejercicio se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

3ª.- Si se intercambian dos líneas de un determinante su valor cambia de signo.

****

Segunda parte.

3º) Sea la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} 3x + ay + z = 1 \\ 2x + 6y - 2z = 6 \end{cases}$. ¿Existe algún valor de a para el cual el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ contenga a la recta dada? Razona la respuesta.

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} 3x + ay + z = 1 \\ x + 3y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right\}$.

Para que la recta r esté contenida en el plano π es necesario que el sistema anterior sea compatible indeterminado, es decir: que tenga infinitas soluciones, para lo cual, según el teorema de Rouché-Fröbenius, el rango de la matriz de coeficientes tiene que ser igual al rango de la matriz ampliada y menor que el número de incógnitas; es decir: ambos rangos tienen que ser dos.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & a & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 3 & a & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Rang\ M = 2 \Rightarrow |M| = 0 \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} 3 & a & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 + 1 - a - 3 + 3 - a = 0;$$

$10 - 2a = 0;\ \ 5 - a = 0 \Rightarrow a = 5.$

$$a = 5 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$\underline{No\ existe\ ningún\ valor\ real\ de\ a\ para\ que\ r\ esté\ contenida\ en\ el\ plano\ \pi.}$

****

4º) Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$. ¿Existe algún valor de s tal que el punto $P(-3, s, s)$ pertenezca a la recta? Razona la respuesta.

$$r \equiv \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 4\lambda \Rightarrow \left. \begin{array}{c} 3x + y = -4\lambda \\ x - y = -8\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 4x = -12\lambda;\;\; x = -3\lambda;$$

$$y = x + 2\lambda = -3\lambda + 2\lambda \Rightarrow y = -\lambda \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 4\lambda \end{cases}, \forall \lambda \in R.}$$

Un punto genérico de r es $Q(-3\lambda, -\lambda, 3\lambda)$.

Para que $P(-3, s, s) \in r$ tiene que ser: $\begin{cases} x = -3\lambda = -3 \to \lambda = 1 \\ y = -\lambda = s = -1 \\ z = 4\lambda = s = 4 \end{cases} \Rightarrow P \notin r.$

$\underline{No\ existe\ ningún\ valor\ real\ de\ s\ para\ que\ P\ esté\ contenida\ en\ la\ recta\ r.}$

****

Tercera parte.

5º) Calcula las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x)=2x^3-3x+1$ que son paralelas a la recta $y=3x-2$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

La pendiente de la recta $y=3x-2$ es $m=3$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$f'(x)=6x^2-3$.

$f'(x)=m=3 \Rightarrow 6x^2-3=3;\;\; 6x^2=6;\;\; x^2=1 \Rightarrow x_1=-1, x_2=1$.

Los puntos de tangencia son los siguientes:

$f(-1)=2\cdot(-1)^3-3\cdot(-1)+1=-2+3+1=2 \Rightarrow P_1(-1,2)$.

$f(1)=2\cdot 1^3-3\cdot 1+1=0 \Rightarrow P_2(1,0)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$, que aplicada a los puntos hallados:

$y-2=3\cdot(x+1)=3x+3 \Rightarrow \underline{t_1 \equiv 3x-y+5=0}$.

$y-0=3\cdot(x-1)=3x-3 \Rightarrow \underline{t_2 \equiv 3x-y-3=0}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x)=6x^2-3$.

$f'(x)=0 \Rightarrow 6x^2-3=0;\;\; 2x^2=1;\;\; x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Las raíces de la derivada dividen el dominio de la función, que es R, en los intervalos $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$, donde la función, por ser polinómica, es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, $x=0 \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, es $f'(0)=-3<0 \Rightarrow Dec.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).}$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right).}$$

****

6º) Sea $f(x)=\begin{cases} x^2+Ax & si \ \ x\leq 1 \\ Bx-A & si \ \ x>1 \end{cases}$:

$a)$ Encuentra los valores de A y B para que f sea derivable en toda la recta real.

$b)$ Haz la representación gráfica de la función f con los valores A y B obtenidos en el apartado anterior.

$a)$

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $A\ y\ B$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=1\Rightarrow\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x^2+Ax)=1+A=f(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(Bx-A)=B-A \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Rightarrow 1+A=B-A\Rightarrow 2A-B=-1. \quad (1)$$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=1$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de $A\ y\ B$.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+A & si \ \ x\leq 1 \\ B & si \ \ x>1 \end{cases}\Rightarrow x=1\ \Rightarrow f'(1)=\begin{cases} 2+A & si \ \ x\leq 1 \\ B & si \ \ x>1 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(1^-)=f'(1^+)\Rightarrow 2+A=B;\ \ A-B=-2. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 2A-B=-1 \\ A-B=-2 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} 2A-B=-1 \\ -A+B=2 \end{array}\right\}\Rightarrow A=1;\ \ 1-B=-2\Rightarrow B=3.$$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ y\ derivable\ en\ x=1\ para\ A=1\ y\ B=3.}$

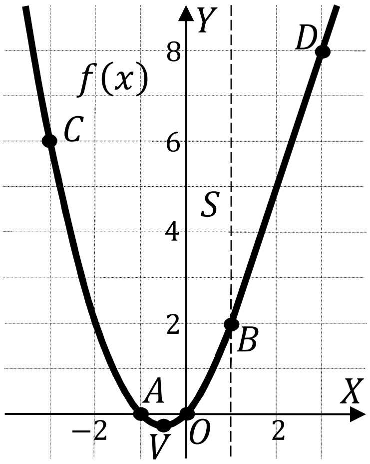
$b)$

La función resulta ser: $f(x)=\begin{cases} x^2+x & si \ \ x\leq 1 \\ 3x-1 & si \ \ x>1 \end{cases}$.

Para la representación gráfica de la función se tiene en cuenta que el intervalo $(-\infty, 1)$ la función es la parábola $g(x) = x^2 + x$, que es convexa $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de x^2 y que tiene su vértice en el punto siguiente:

$$g'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

$$g\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow V\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right).$$



Otros puntos de la parábola son $O(0,0), A(-1,0)$, $B(1,2)$ y $C(-3,6)$.

En el intervalo $(1, +\infty)$ la función es la semirrecta $h(x) = 3x - 1$ cuyo origen es el punto $B(1,2)$ y que contiene al punto $D(3,8)$.

La representación gráfica, aproximada, de la función se expresa en la figura adjunta.

****

Cuarta parte.

7º) Calcula $I=\int L(x^2-1)\cdot dx$.

Procediendo por el método de integración “por partes”:

$$I=\int L(x^2-1)\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} u=L(x^2-1)\rightarrow du=\frac{2x}{x^2-1}\cdot dx \\ dv=dx\rightarrow v=x \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(x^2-1)\cdot x-\int x\cdot\frac{2x}{x^2-1}\cdot dx=x\cdot L(x^2-1)-\int\frac{2x^2}{x^2-1}\cdot dx=$$

$$=x\cdot L(x^2-1)-\int\frac{2x^2-2+2}{x^2-1}\cdot dx=x\cdot L(x^2-1)-\int\frac{2(x^2-1)+2}{x^2-1}\cdot dx=$$

$$=x\cdot L(x^2-1)-\int\left(2+\frac{2}{x^2-1}\right)\cdot dx=x\cdot L(x^2-1)-2\int dx-2\cdot\int\frac{1}{x^2-1}\cdot dx=$$

$$=x\cdot L(x^2-1)-2x-2\cdot A=I. \quad (*)$$

$$A=\int\frac{1}{x^2-1}\cdot dx\Rightarrow x^2-1=(x+1)(x-1).$$

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{M}{x+1}+\frac{N}{x-1}=\frac{Mx-M+Nx+N}{(x+1)(x-1)}=\frac{(M+N)x+(-M+N)}{x^2-1}\Rightarrow \left.\begin{matrix} M+N=0 \\ -M+N=1 \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2N=1;\ \ N=\frac{1}{2}\Rightarrow M=-\frac{1}{2}.$$

$$A=\int\frac{1}{x^2-1}\cdot dx=\int\left(\frac{-1/2}{x+1}+\frac{1/2}{x-1}\right)\cdot dx=-\frac{1}{2}\cdot L|x+1|+\frac{1}{2}\cdot L|x-1|+C=$$

$=\frac{1}{2}\cdot\left[L|x-1|+\frac{1}{2}\cdot L|x+1|\right]+C\Rightarrow A=\frac{1}{2}\cdot L\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$ Sustituyendo en (*):

$$\underline{I=\int L(x^2-1)\cdot dx=x\cdot L(x^2-1)-2x-L\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.}$$

****

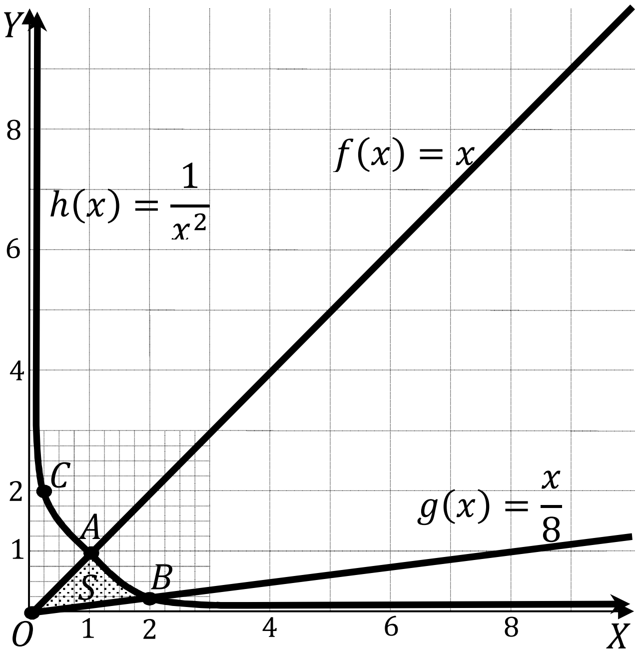
8º) Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x$, $g(x) = \frac{x}{8}$ y $h(x) = \frac{1}{x^2}$ y calcula el área de ese recinto.

Los puntos de corte en el primer cuadrante de la función $h(x) = \frac{1}{x^2}$ con las rectas $f(x) = x$ y $g(x) = \frac{x}{8}$ son los siguientes:

$$h(x) = f(x) \Rightarrow \frac{1}{x^2} = x;\ \ 1 = x^3;\ \ x = 1;\ \ f(1) = 1 \Rightarrow A(1, 1).$$

$$h(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{x}{8};\ \ 8 = x^3;\ \ x = 2;\ \ g(2) = \frac{1}{4} \Rightarrow B\left(2, \frac{1}{4}\right).$$

Por simetría con respecto al origen de la función $h(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow C\left(\frac{1}{4}, 2\right)$.



La representación gráfica, aproximada, de la situación se empresa en la figura adjunta, de la cual se deduce la superficie S a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 [f(x) - g(x)] \cdot dx + \int_1^2 [h(x) - g(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x - \frac{x}{8}\right) \cdot dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x}{8}\right) \cdot dx = \int_0^1 \frac{8x - x}{8} \cdot dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} \cdot dx - \frac{1}{8} \cdot \int_1^2 x \cdot dx =$$

$$= \frac{7}{8} \cdot \int_0^1 x \cdot dx + \int_1^2 x^{-2} \cdot dx - \frac{1}{8} \cdot \int_1^2 x \cdot dx = \frac{7}{8} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^2 - \frac{1}{8} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{7}{8} \cdot \left(\frac{1^2}{2} - 0\right) + \left(\frac{2^{-1}}{-1} - \frac{1^{-1}}{-1}\right) - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{8} \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{7}{16} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 1 + \frac{8}{16} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$\underline{S = \frac{3}{4}\, u^2 = 0{,}75\, u^2}.$$

****

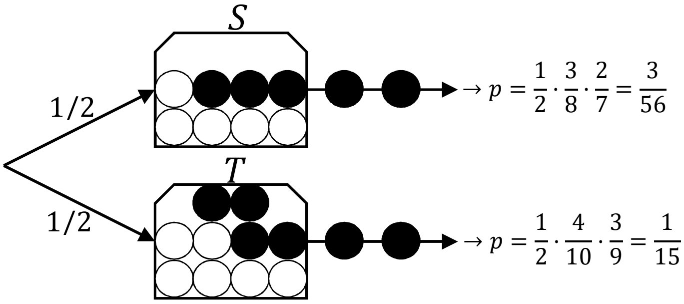
Quinta parte.

9º) Una urna S contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Otra urna T, 6 blancas y 4 negras. Elegimos una urna al azar y extraemos 2 bolas:

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean negras?

$b)$ Si las dos bolas extraídas son negras, ¿cuál es la probabilidad de que la urna elegida haya sido la T?

$a)$



$$P = P(nn) = P(S \cap nn) + P(T \cap nn) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{3}{56} + \frac{1}{15} =$$

$$= \frac{45+56}{15 \cdot 56} \Rightarrow \underline{P = \frac{101}{840}}.$$

$b)$

$$P = P(T/nn) = \frac{P(T \cap nn)}{P(nn)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9}} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{101}{840}} = \frac{1 \cdot 840}{15 \cdot 101} = \frac{168}{3 \cdot 101} \Rightarrow \underline{P = \frac{56}{101}}.$$

****

10º) Un estudio ha mostrado que, en un cierto barrio, el 60 % de los hogares tienen al menos dos coches. Se elige al azar una muestra de 50 hogares en el citado barrio. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos 2 coches?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que entre 30 y 40 hogares, ambos incluidos, tengan al menos dos coches?

----

a)

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 50;\ \ p = 0{,}6;\ \ q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$

Por ser $\left. \begin{array}{l} n \cdot p = 50 \cdot 0{,}6 = 30 > 5 \\ n \cdot q = 50 \cdot 0{,}4 = 20 > 5 \end{array} \right\}$ puede aproximarse la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}6 = 30.$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{50 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = \sqrt{12} \cong 3{,}464.$

$X = B(50;\ 0{,}6) \approx N(30;\ 3{,}464).$

Tipificando la variable: $X \rightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-30}{3{,}464}$. Aplicando la corrección de Yates:

$$P = P(X \geq 20) = P\left(Z \geq \frac{19{,}5-30}{3{,}464}\right) = P\left(Z \geq \frac{-10{,}5}{3{,}464}\right) \cong P(Z \geq -3{,}03) =$$

$$= P(Z \leq 3{,}03) = \underline{0{,}9988}.$$

b)

$$P = P(30 \leq X \leq 40) \Rightarrow \{Yates\} \Rightarrow P(29{,}5 \leq X \leq 40{,}5) =$$

$$= P\left(\frac{29{,}5-30}{3{,}464} \leq Z \leq \frac{40{,}5-30}{3{,}464}\right) = P\left(\frac{-0{,}5}{3{,}464} \leq Z \leq \frac{10{,}5}{3{,}464}\right) = P(-0{,}14 \leq Z \leq 3{,}03) =$$

$$= P(Z \leq 3{,}03) - [1 - P(Z \leq -0{,}14)] = P(Z \leq 3{,}03) - 1 + P(Z \leq 0{,}14) =$$

$$= 0{,}9988 - 1 + 0{,}5557 = 1{,}5545 - 1 = \underline{0{,}5545}.$$

****