# PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

# UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

# EXTRAORDINARIA – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II                                        Tiempo máximo:   1 horas y 30 minutos

Ese examen tiene cinco partes. En cada parte debes responder a una única pregunta.

Primera parte.

1º) Discutir el sistema $S(a)$ en función de $a$ siendo $S(a) = \begin{cases} ax - y + 2z = 2 \\ x - 2y - z = 1 \\ x + 2y + az = 3 \end{cases}$. Resolver en función de $a$, mediante la regla de Cramer, en los casos en que sea posible.

----------

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 3 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro $a$ es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = -2a^2 + 4 + 1 + 4 + 2a + a = -2a^2 + 3a + 9 = 0;$$

$$2a^2 - 3a - 9 = 0;\ \ a = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{3 \pm 9}{4} \Rightarrow a_1 = -\frac{3}{2}, a_2 = 3.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq -3/2 \\ a \neq 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = -\frac{3}{2} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -\frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 4 - 1 + 4 + 3 + 3 = 22 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ a=3 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -18+4-1+4-6+3=-14 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{matrix} a=-3/2 \\ a=3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Se resuelve mediante la regla de Cramer para $a \neq -\frac{3}{2}\ y\ a \neq 3$.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix}}{-2a^2+3a+9}=\frac{-4a+4+3+12+4+a}{-2\cdot\left(a+\frac{3}{2}\right)(a-3)}=\frac{-3a+23}{-(2a+3)(a-3)}=\frac{3a-23}{(2a+3)(a-3)}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix}}{-(2a+3)(a-3)}=\frac{a^2+6-2-2+3a-2a}{-(2a+3)(a-3)}=-\frac{a^2+a+2}{(2a+3)(a-3)}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-(2a+3)(a-3)}=\frac{-6a+4-1+4-2a+3}{-(2a+3)(a-3)}=\frac{-8a+10}{-(2a+3)(a-3)}=\frac{2(4a-5)}{(2a+3)(a-3)}.$$

**********

2º) Sea la matriz $M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$.

$a$) Determinar para qué valores de $a$ la matriz no tiene inversa.

$b$) Calcular, si es posible, la matriz inversa para $a = 0$, y en caso de que no sea posible razonar por qué no es posible.

----------

$a$)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 - a^2 - a^2 = 1 - a^2 = 0 \Rightarrow a_1 = -1, a_2 = 1.$$

$$\underline{La\ matriz\ M\ no\ tiene\ inversa\ para\ a = -1\ y\ para\ a = 1.}$$

$b$)

Para $a = 0$ la matriz resulta $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, que es invertible por ser su determinante distinto de cero.

Se obtiene la inversa de $M$ por el método de Gauss-Jordan.

$$(M|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

**********

Segunda parte.

3º) $a$) Hallar la ecuación del plano $\pi$ que pasa por el punto $A(-1,2,3)$y es paralelo a los vectores $\vec{v}=(-1,-2.-3)\ y\ \vec{v}=(1,3,5)$.

$b$) Halla el valor de A para que el plano $\pi$ calculado en el apartado anterior y el plano $\beta\equiv Ax-y+5z=8$ sean perpendiculares.

----------

$a$)

$$\pi(\vec{v},\vec{u};\ A)\equiv\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}=0;$$

$$-10(x+1)-3(y-2)-3(z-3)+2(z-3)+9(x+1)+5(y-2)=0;$$

$$-(x+1)+2(y-2)-(z-3)=0;\ -x-1+2y-4-z+3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\pi\equiv x-2y+z+2=0}.$$

$b$)

Dos planos son perpendiculares cuando lo son sus vectores normales.

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_\pi}=(1,-2,1),\overrightarrow{n_\beta}=(A,-1,5)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

$$\overrightarrow{n_\pi}\cdot\overrightarrow{n_\beta}=0\Rightarrow(1,-2,1)\cdot(A,-1,5)=A+2+5=0\Rightarrow \underline{A=-7}.$$

**********

4º) Sea el plano $\pi \equiv 2x - y + Az = 0$. Sea la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = -1 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{cases}$. Hallar A para que $r$ $y$ $\pi$ sean paralelos. Además, obtener el plano $\beta$ perpendicular a $r$ y que pasa por el origen.

----------

La recta $r$ y el plano $\pi$ serán paralelos cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano sean perpendiculares.

La expresión de $r$ por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = -1 \\ 3x - 2y + z = -3 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 4x - 3y = -1 - 4\lambda \\ 3x - 2y = -3 - \lambda \end{array} \right\};$$

$$\left. \begin{array}{l} -8x + 6y = 2 + 8\lambda \\ 9x - 6y = -9 - 3\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow x = -7 + 5\lambda;\;\; 2y = 3x + 3 + \lambda = -21 + 15\lambda + 3 + \lambda;$$

$$2y = -18 + 16\lambda \Rightarrow y = -9 + 8\lambda \;\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -7 + 5\lambda \\ y = -9 + 8\lambda. \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un vector director de $r$: $\overrightarrow{v_r} = (5, 8, 1)$ y un vector normal de $\beta$: $\overrightarrow{n_\beta} = (2, -1, A)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n_\beta} = 0 \Rightarrow (5, 8, 1) \cdot (2, -1, A) = 10 - 8 + A = 0 \Rightarrow \underline{A = -2}.$$

El haz de planos, $\alpha$, perpendiculares al plano $\pi$ y que contienen al plano $\beta$, tiene por vector normal a cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector director de la recta $r$, $\overrightarrow{v_r} = (5, 8, 1)$; su expresión general es $\alpha \equiv 5x + 8y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz $\alpha$, el plano $\beta$ pedido es el que carece de termino independiente:

$$\underline{\beta \equiv 5x + 8y + z = 0}.$$

**********

Tercera parte.

5º) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, obtener los valores de $a, b$ y $c$ para que su gráfica pase por $P(0, 2)$ y tenga un extremo en $Q(1, -1)$. ¿Tiene $f$ más extremos?

----------

Por pasar por el punto $P(0, 2) \Rightarrow f(0) = 2$: $\quad f(0) = 2 \Rightarrow \underline{c = 2}$.

Por contener al punto $Q(1, -1) \Rightarrow f(1) = -1$:

$f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 2 = -1;\;\; a + b = -3.$ (1)

Por tener un extremo en $Q(1, -1) \Rightarrow f'(1) = 0$:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx.$

$f'(1) = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 = 0;\;\; 3a + 2b = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a + b = -3 \\ 3a + 2b = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2a - 2b = 6 \\ 3a + 2b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a = 6}.\;\; 6 + b = -3 \Rightarrow \underline{b = -9}.$$

La función resulta $f(x) = 6x^3 - 9x^2 + 2$.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f'(x) = 18x^2 - 18x = 18x(x - 1).$ $\qquad f''(x) = 36x - 18.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 18x(x - 1) = 0;\;\; x_1 = 0, x_2 = 1.$

$f''(0) = -18 < 0 \;\Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$

$f(0) = 2 \Rightarrow \underline{Máx.\, A(0, 2)}.$

$f''(1) = 36 \cdot 1 - 18 = 18 > 0 \;\Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1.$

$f(1) = 6 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 2 = 6 - 9 + 2 = -1 \Rightarrow \underline{Mín.\, B(1, -1)}.$

**********

6º) Sea $f(x) = x^2 + 9$, y P el punto exterior a su gráfica de coordenadas $P(0,0)$. Calcular razonadamente la (o las) tangentes a la gráfica de $f$ que pasen por el punto P.

----------

La pendiente de una función en un punto es el valor de su primera derivada en ese punto.

$m = f'(x) = 2x.$

Los puntos de tangencia (por ser de la función) son de la forma $Q(x, x^2 + 9)$ y los vectores de las tangentes son $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (x, x^2 + 9).$

La pendiente del vector director tiene que ser la misma que la obtenida mediante la derivada:

$$2x = \frac{x^2+9}{x};\ \ 2x^2 = x^2 + 9;\ \ x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \rightarrow m_1 = -6 \\ x_2 = 3 \rightarrow m_2 = 6 \end{cases}.$$

Los puntos de tangencia son los siguientes: $Q_1(-3, 18)\ y\ Q_2(3, 18).$

Las tangentes pedidas son las siguientes:

$t_1 \Rightarrow y - 18 = -6 \cdot (x + 3) = -6x - 18 \Rightarrow \underline{t_1 \equiv 6x + y = 0}.$

$t_2 \Rightarrow y - 18 = 6 \cdot (x - 3) = 6x - 18 \Rightarrow \underline{t_2 \equiv 6x - y = 0}.$

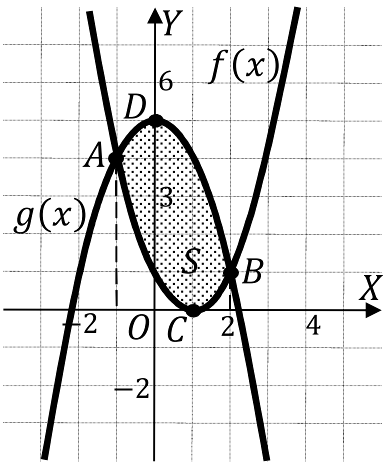
**********

Cuarta parte.

7º) Dibuja la región encerrada por $f(x) = x^2 - 2x + 1$ $y$ $g(x) = -x^2 + 5$, y calcular el área de dicha región.

----------

Los puntos de corte de las dos funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:




$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 5;$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0;\ \ x^2 - x - 2 = 0;$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \to A(-1, 4) \\ x_2 = 2 \to B(2, 1) \end{cases}.$$

La función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ es una parábola convexa ($\cup$) cuyo vértice es el siguiente:

$$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow Vértice: C(1, 0).$$

La función $g(x) = -x^2 + 5$ es una parábola cóncava ($\cap$) cuyo vértice es el siguiente: $g'(x) = -2x = 0 \Rightarrow x = 0$.

$$g(0) = 5 \Rightarrow Vértice: D(0, 5).$$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

Para el cálculo del área pedida se tiene en cuenta que en el intervalo correspondiente a la superficie a calcular todas las ordenadas de $g(x)$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de $f(x)$, por lo cual la superficie es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{2} [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{-1}^{2} [(-x^2 + 5) - (x^2 - 2x + 1)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4) \cdot dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{2} = \left[-\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2 \cdot 2^3}{3} + 2^2 + 4 \cdot 2\right) - \left[-\frac{2 \cdot (-1)^3}{3} + (-1)^2 + 4 \cdot (-1)\right] =$$

$$= -\frac{16}{3} + 4 + 8 - \frac{2}{3} - 1 + 4 = 15 - \frac{18}{3} = 15 - 6 \Rightarrow \underline{S = 9\ u^2}.$$

**********

8º) Calcular las integrales indefinidas $I$ y $J$, explicando los métodos utilizados para su resolución: $I = \int x \cdot cos\,(2x) \cdot dx$ y $J = \int \frac{1}{x^2+2x-3} \cdot dx$.

----------

$$I = \int x \cdot cos\,(2x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = x \rightarrow du = dx \\ cos\,(2x) \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{2} \cdot sen\,(2x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{1}{2} \cdot sen\,(2x) - \int \frac{1}{2} \cdot sen\,(2x) \cdot dx = \frac{x}{2} \cdot sen\,(2x) - \frac{1}{2} \cdot \int sen\,(2x) \cdot dx =$$

$$= \frac{x}{2} \cdot sen\,(2x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot cos\,(2x) + C.$$

$$\underline{I = \int x \cdot cos\,(2x) \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot [2x \cdot sen\,(2x) + cos\,(2x)] + C.}$$

$$J = \int \frac{1}{x^2+2x-3} \cdot dx.$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0;\;\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 1.$$

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1).$$

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{M}{x+3} + \frac{N}{x-1} = \frac{Mx - M + Nx + 3N}{(x+3)(x-1)} = \frac{(M+N)x + (-M+3N)}{x^2+2x-3} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} M + N = 0 \\ -M + 3N = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4N = 1;\;\; N = \frac{1}{4};\;\; M = -\frac{1}{4}.$$

$$J = \int \frac{1}{x^2+2x-3} \cdot dx = \int \left( \frac{-1/4}{x+3} + \frac{1/4}{x-1} \right) \cdot dx = \frac{1}{4} L|x+3| - \frac{1}{4} L|x-1| + C.$$

$$\underline{J = \int \frac{1}{x^2+2x-3} \cdot dx = \frac{1}{4} L \left| \frac{x+3}{x-1} \right| + C.}$$

**********

Quinta parte.

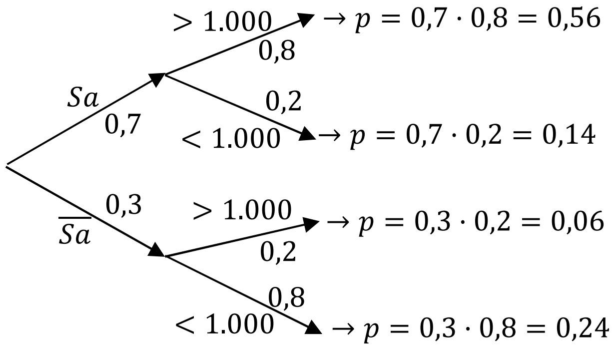
9º) En una empresa el 70 % de sus trabajadoras están satisfechas con su contrato, y entre las satisfechas con su contrato el 80 % gana más de 1.000 euros. Entre las que no están satisfechas solo el 20 % gana más de 1.000 euros. Si se elige una trabajadora al azar:

$a$) ¿Cuál es la probabilidad de que gane más de 1.000 euros?

$b$) Si gana más de 1.000 euros, ¿cuál es la probabilidad que esté satisfecha con su contrato?

$c$) ¿Cuál es la probabilidad de que gane menos de 1.000 euros y esté satisfecha con su contrato?

----------




$a$)

$$P = P(> 1.000) = P(S \cap > 1.000) + P(\overline{S} \cap > 1.000) =$$

$$= P(S) \cdot P(> 1.000/S) + P(\overline{S}) \cdot P(> 1.000/\overline{S}) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 =$$

$$= 0{,}56 + 0{,}06 = \underline{0{,}62}.$$

$b$)

$$P(S| > 1.000) = \frac{P(S \cap > 1.000)}{P(> 1.000)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}8}{0{,}62} = \frac{0{,}56}{0{,}62} = \underline{0{,}9032}.$$

$c$)

$$P = P(S \cap < 1.000) = P(S) \cdot P(< 1.000/S) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 = \underline{0{,}14}.$$

**********

10º) En un garaje hay 30 aparcamientos. En cada aparcamiento puede encontrarse o no un automóvil, con independencia de lo que ocurra en los otros. Si la probabilidad de que un aparcamiento esté ocupado es de 0,4, se pide:

$a$) Identificar y describir este modelo de probabilidad.

$b$) Hallar la probabilidad de que cierto día haya 8 automóviles aparcados.

$c$) Hallar la probabilidad de que un día haya entre 10 y 20 automóviles aparcados.

----------

$a$)

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$$\underline{p = 0{,}4; \;\; q = 0{,}6; \;\; n = 30 \;\Rightarrow X \sim B(30; 0{,}4)}.$$

$b$)

La fórmula de la probabilidad de que de $n$ elementos $r$ sean favorables es la siguiente: $P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

$$\left.\begin{matrix} n = 30 \\ r = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow P = \binom{30}{8} \cdot 0{,}4^8 \cdot 0{,}6^{22} = \frac{30!}{22! \cdot 8!} \cdot 0{,}4^8 \cdot 0{,}6^{22} =$$

$$= \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot 0{,}4^8 \cdot 0{,}6^{22} = \frac{29 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 23}{2} \cdot 0{,}4^8 \cdot 0{,}6^{22} =$$

$$= 29 \cdot 27 \cdot 13 \cdot 25 \cdot 23 \cdot 0{,}4^8 \cdot 0{,}6^{22} = 5.852.925 \cdot 8{,}6260 \cdot 10^{-9} = \underline{0{,}0505}$$

$c$)

Transformando la distribución binomial en una normal:

$\mu = n \cdot p = 30 \cdot 0{,}4 = 12.$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{30 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{7{,}2} \cong \underline{2{,}68}.$

$X = B(30;\; 0{,}4) \approx N(12;\; 2{,}68).$

Tipificando la variable: $Z \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-12}{2{,}68}$.

Considerando la corrección de Yates:

$$P = P(9{,}5 \leq X \leq 20{,}5) = P\left(\frac{9{,}5-12}{2{,}68} \leq Z \leq \frac{20{,}5-12}{2{,}68}\right) = P\left(\frac{-2{,}5}{2{,}68} \leq Z \leq \frac{8{,}5}{2{,}68}\right) =$$

$$= P(-0{,}93 \leq Z \leq 3{,}17) = P(Z < 3{,}17) - [1 - P(Z < 0{,}93)] =$$

$= P(Z < 3{,}17) - 1 + P(Z < 0{,}93) = 0{,}9992 - 1 + 0{,}8238 = 1 - 1{,}8230 =$

$= \underline{0{,}8230}$.

**********