PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El examen consta de cinco ejercicios. N se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, derivadas e integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos.

OPCIÓN A

1º) Discutir, en función de m, el sistema $S \equiv \begin{cases} (m+3)x+my+mz=m-1 \\ 3x+mz=m-2 \\ -y+z=m-3 \end{cases}$. Resolver en los casos de indeterminación, suponiendo que existan.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} m+3 & m & m \\ 3 & 0 & m \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} m+3 & m & m & m-1 \\ 3 & 0 & m & m-2 \\ 0 & -1 & 1 & m-3 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} m+3 & m & m \\ 3 & 0 & m \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-3m+m(m+3)-3m=0;$$

$$-6m+m^2+3m=0;\ \ m^2-3m=0;\ \ m(m-3)=0 \Rightarrow m_1=0, m_2=3.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} m\neq 0 \\ m\neq 3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=3=nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ m=0 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}=3-6=-3\neq 0 \Rightarrow Rang\ A'=3.$$

$$\underline{Para\, m = 0 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\, m = 3 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = 3C_4\} \Rightarrow Rang\ A' = 2.$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 16 + 6 - 8 - 6 - 12 = 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 3.$$

$$\underline{Para\, m = 3 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Para $m = 3$ el sistema es $\left.\begin{array}{r} 6x + 3y + 3z = 2 \\ 3x + 3z = 1 \\ -y + z = 0 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado.

Despreciando una ecuación (primera) y haciendo $z = \lambda$:

$$-y + \lambda = 0 \Rightarrow y = \lambda;\ \ 3x + 3\lambda = 1;\ \ 3x = 1 - 3\lambda \Rightarrow x = \frac{1}{3} - \lambda.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{1}{3} - \lambda;\ y = \lambda, z = \lambda, \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) Sean la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x - y + Az = 0$.

$a)$ ¿Existe algún valor de A para que el plano π sea paralelo a r?

$b)$ Encontrar el plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto $O(0,0,0)$.

$a)$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4x - 3y = 1 - 4\lambda \\ 3x - 2y = -\lambda \end{matrix}\right\};$$

$$\left.\begin{matrix} -8x + 6y = -2 + 8\lambda \\ 9x - 6y = -3\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = -2 + 5\lambda;\ \ 3(-2 + 5\lambda) - 2y = -\lambda;$$

$$-6 + 15\lambda - 2y = -\lambda;\ \ 2y = -6 + 16\lambda \Rightarrow y = -3 + 8\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -2 + 5\lambda \\ y = -3 + 8\lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $P(-2, -3, 0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (5, 8, 1)$.

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, -1, A)$.

Para que la recta r y el plano π sean paralelos es necesario que el vector normal del plano y el vector director de la recta sean perpendiculares, es decir, que su producto escalar tiene que ser cero:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = (5, 8, 1) \cdot (1, -1, A) = 0;\ \ 5 - 8 + A = 0;\ -3 + A = 0 \Rightarrow A = 3.$$

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ no\ son\ paralelos\ para\ A = 3}.$$

$b)$

El haz de planos β perpendiculares a r es $\beta \equiv 5x + 8y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano γ que contiene al punto $O(0,0,0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{matrix} \beta \equiv 5x + 8y + z + D = 0 \\ O(0,0,0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow D = 0 \Rightarrow \underline{\gamma \equiv 5x + 8y + z = 0}.$$

****

3º) Dada la función $f(x) = x^2 + 64$ y el *punto exterior* a su gráfica $P(6, 0)$, encontrar la recta o rectas tangentes a f que pasen por P.

El haz de rectas que pasan por el punto $P(6, 0)$ tiene la siguiente expresión:

$y - 0 = m(x - 6)$; $y = mx - 6m$.

De las infinitas rectas del haz anterior, las que son tangentes a la función f solamente tienen un punto de contacto, por lo cual, su intersección es un solo punto:

$$\left.\begin{array}{r} y = f(x) = x^2 + 64 \\ y = mx - 6m \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + 64 = mx - 6m;\ \ x^2 + 64 - mx + 6m = 0;$$

$$x^2 - mx + (64 + 6m) = 0;\ \ x = \frac{\mathrm{m} \pm \sqrt{m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (64 + 6m)}}{2} = \frac{\mathrm{m} \pm \sqrt{m^2 - 256 - 24\mathrm{m}}}{2} \Rightarrow$$

$$m^2 - 256 - 24\mathrm{m} = 0;\ \ m^2 - 24\mathrm{m} - 256 = 0;\ \ m = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 + 4 \cdot 256}}{2} =$$

$$= \frac{24 \pm \sqrt{576 + 1.024}}{2} = \frac{24 \pm \sqrt{1.600}}{2} = \frac{24 \pm 40}{2} = 12 \pm 20 \Rightarrow m_1 = -8, m_2 = 32.$$

Las rectas tangentes pedidas son las siguientes:

$$\underline{t_1 \equiv y = -8x + 48\ \ y\ \ t_2 \equiv y = 32x - 192}.$$

****

4º) Calcula $I = \int x \cdot e^{-4x} \cdot dx$, explicando el proceso utilizado para dicho cálculo.

La integral I debe resolverse por el método de "por partes", cuya fórmula es la siguiente: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$.

$$I = \int x \cdot e^{-4x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-4x} \cdot dx \rightarrow v = -\frac{1}{4}e^{-4x} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \left(-\frac{1}{4}e^{-4x}\right) - \int -\frac{1}{4}e^{-4x}dx = -\frac{1}{4}x \cdot e^{-4x} + \frac{1}{4}\int e^{-4x}dx =$$

$$= -\frac{1}{4}x \cdot e^{-4x} + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot e^{-4x} + C = -\frac{1}{16}e^{-4x}(4x+1) + C.$$

$$\underline{\int x \cdot e^{-4x} \cdot dx = -\frac{1}{16}e^{-4x}(4x+1) + C.}$$

****

5º) Sobre una mesa tengo tres cajas con botones; la primera caja tiene tres botones, la segunda 5 y la tercera 4. Cada una de las cajas contiene un solo botón rojo. Si elijo al azar una caja y saco de ella un botón al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea un botón rojo?

b) Si he sacado un botón rojo, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a la primera caja?

La probabilidad de elegir cada una de las cajas es $\frac{1}{3}$.

a)

$$P = P(1 \cap R) + P(2 \cap R) + P(3 \cap R) =$$

$$= P(1) \cdot P(R/1) + P(2) \cdot P(R/2) + P(3) \cdot P(R/3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{20+12+15}{60} = \frac{1}{3} \cdot \frac{47}{60} = \underline{\frac{47}{180} = 0{,}2611}.$$

b)

$$P = P(1/R) = \frac{P(1 \cap R)}{P(R)} = \frac{P(1) \cdot P(R/1)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{47}{180}} = \frac{1}{\frac{47}{20}} = \underline{\frac{20}{47} = 0{,}4255}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular, razonadamente, el valor de a para que el determinante $|A(a)|^2$ valga 4.

$$[A(a)]^2 = A(a) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+a & a^2 & 0 \\ 3 & a+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|A(a)|^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+a & a^2 & 0 \\ 3 & a+1 & 1 \end{vmatrix} = 4; \;\; a^2 = 4 \;\Rightarrow\; \underline{a = \pm 2}.$$

****

2º) Se consideran los puntos $A(0,0,1), B(1,1,1)\ y\ C(-1,-1,2)$. ¿Están alineados? En caso afirmativo hallar la ecuación de la recta r que los contiene. En caso negativo calcular el plano que los contiene.

Los puntos A, B y C están alineados cuando los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}$ son linealmente dependientes.

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(1,1,1) - (0,0,1)] = (1,1,0).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(-1,-1,2) - (0,0,1)] = (-1,-1,1).$$

Los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}$ son linealmente independientes por no tener proporcionales sus componentes y, en consecuencia:

$$\underline{Los\ puntos\ A, B\ y\ C\ no\ están\ alineados.}$$

El plano π que contiene a los puntos A, B y C tiene la siguiente expresión general:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ \ x - (z-1) + (z-1) - y = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv x - y = 0}.$$

****

3º) Sea f la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-4x}$. Calcular la primera y la segunda derivadas de f. Hallar los máximos y mínimos de f.

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-4x} + x^2 \cdot (-4) \cdot e^{-4x} = 2x \cdot e^{-4x} - 4x^2 \cdot e^{-4x}.$$

$$\underline{f'(x) = 2x \cdot e^{-4x}(1 - 2x).}$$

$$f''(x) = 2 \cdot e^{-4x} + 2x \cdot (-4) \cdot e^{-4x} - [8x \cdot e^{-4x} + 4x^2 \cdot (-4) \cdot e^{-4x}] =$$

$$= 2 \cdot e^{-4x} - 8x \cdot e^{-4x} - 8x \cdot e^{-4x} + 16x^2 \cdot e^{-4x} =$$

$$= 2 \cdot e^{-4x} - 16x \cdot e^{-4x} + 16x^2 \cdot e^{-4x} = 2 \cdot e^{-4x} \cdot (8x^2 - 8x + 1).$$

$$\underline{f''(x) = 2 \cdot e^{-4x} \cdot (8x^2 - 8x + 1).}$$

Una función tiene un extremo relativo, máximo o mínimo, cuando se anula su primera derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x \cdot e^{-4x}(1 - 2x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es negativa para los valores que anulan la primera se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f''(0) = 2 \cdot e^0 \cdot (0 - 0 + 1) = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = 0^2 \cdot e^{-0} = 0 \Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo: O(0, 0).}$$

$$f''\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2 \cdot e^{-2} \cdot (2 - 4 + 1) = -\frac{2}{e^2} < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = \frac{1}{2}.$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot e^{-2} = \frac{1}{4e^2} \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo: P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4e^2}\right).}$$

****

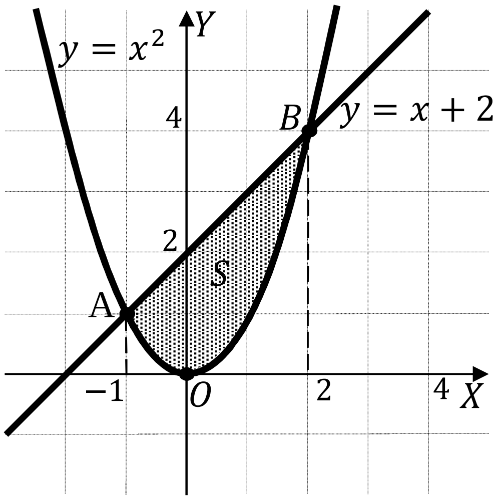
4º) Representar el recinto finito del plano limitado por la recta $y = x + 2$ y por la parábola $y = x^2$. Calcular su área.

La función $f(x) = x^2$ es una parábola convexa $(\cup)$ que tiene su vértice en el origen de coordenadas.

Los puntos de corte de la parábola y la recta se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$x^2 = x + 2;\ x^2 - x - 2 = 0;$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow A(-1, 1) \\ x_2 = 2 \rightarrow B(2, 4) \end{cases}.$



La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.

En el intervalo del área a calcular, $(-1, 2)$, todas las ordenadas de la recta son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{2} [(x+2) - x^2] \cdot dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 \right) - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) \right] = -\frac{8}{3} + 2 + 4 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 =$$

$$= 8 - \frac{9}{3} - \frac{1}{2} = 8 - 3 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}.$$

$$\underline{S = \frac{9}{2}\ u^2 = 4{,}5\ u^2.}$$

****

5º) Lanzamos un dado de seis caras 6.000 veces. Calcular la probabilidad de que el número de veces que salga el 5:

a) Sea superior a 1.500. b) Esté comprendido entre 1.000 y 1.100.

Se trata de una distribución binomial con $p = \frac{1}{6};\ q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}\ y\ n = 6.000.$

Por ser n suficientemente grande se cumple que $n \cdot p > 5\ y\ n \cdot q > 5$, por lo cual se puede aproximar la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$$\mu = n \cdot p = 6.000 \cdot \frac{1}{6} = 1.000;\ \ \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{6.000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 28{,}87.$$

$$X = B\left(6.000;\ \frac{1}{6}\right) \approx N(1.000;\ 28{,}87).$$

Tipificando la variable: $X \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-1.000}{28{,}87}$.

a)

Considerando la corrección de Yates:

$$P(X \geq 1.500) = P(X > 1.500{,}5) = P\left(Z > \frac{1.500{,}5-1.000}{28{,}87}\right) = P\left(Z > \frac{500{,}5}{28{,}87}\right) =$$

$$= P(Z > 17{,}34) = 0.$$

$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ salga\ 5\ más\ de\ 1.500\ veces\ es\ prácticamente\ nula.}$

b)

$$P = P(1.000 \leq Z \leq 1.100) = P(1.000{,}5 \leq Z \leq 1.099{,}5) =$$

$$P\left(\frac{1.000{,}5-1.000}{28{,}87} \leq Z \leq \frac{1.099{,}5-1.000}{28{,}87}\right) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{99{,}5}{28{,}87}\right) = P\left(\frac{0{,}5}{28{,}87} \leq Z \leq \frac{99{,}5}{28{,}87}\right) =$$

$$= P(0{,}02 \leq Z \leq 3{,}45) = P(Z < 3{,}45) - P(Z < 0{,}02) = 0{,}9997 - 0{,}5080 =$$

$$= \underline{0{,}4917}.$$

****