PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JULIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se valorará el planteamiento correcto, tango global como de cada una de las partes, si las hubiere. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente. Se valorará la buena presentación del examen.

OPCIÓN A

1º) Discute el sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+2y+bz=-3 \\ x-2y-z=b \end{cases}$. Encontrar la solución, si existe, para el caso de $b=2$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & b \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & b & -3 \\ 1 & -2 & -1 & b \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro b es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & b \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=-2+2+b-2+2b-1=3b-3=0 \Rightarrow b=1.$$

$$\underline{Para\ b\neq 1\ \Rightarrow Rang\ A=Rang\ A'=3 \Rightarrow S.C.D.}$$

$$\text{Para } b=1 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=2-3-6+1=-6\neq 0\ \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ A'=3}.$$

$$\underline{Para\ b=1 \Rightarrow Rang\ A=2;\ Rang\ A'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$

Se resuelve para b = 2; el sistema es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{3\cdot 2-3}=\frac{6+4-4-3}{3}=\frac{3}{3}=1.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{3}=\frac{3-2+3-4}{3}=\frac{0}{3}=0.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{3}=\frac{4-3-6+2}{3}=\frac{-3}{3}=-1.$$

$$\underline{Solución: x=1, y=0, z=-1.}$$

****

2º) Calcular la distancia del punto $A(4,4,3)$ al plano que pasa por los puntos $B(1,1,0)$, $C(1,0,1)$ y $D(0,1,1)$.

Los puntos B, C, y D determinan los vectores:

$\overrightarrow{BC} = [C - B] = [(1,0,1) - (1,1,0)] = (0,-1,1)$.

$\overrightarrow{BD} = [D - B] = [(0,1,1) - (1,1,0)] = (-1,0,1)$.

Considerando, por ejemplo, el punto B:

$$\pi(B;\ \overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ \ -(x-1)-(y-1)-z=0;$$

$x-1+y-1+z=0 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{\pi \equiv x+y+z-2=0}$.

La distancia de un punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ al plano $Ax+By+Cz+D=0$ viene dada por la fórmula $d(P_0,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi \equiv x+y+z-2=0$ y al punto $A(4,4,3)$:

$$d(A,\pi)=\frac{|1\cdot 4+1\cdot 4+1\cdot 3-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|4+4+3-2|}{\sqrt{3}}=\frac{9}{\sqrt{3}}=\frac{9\sqrt{3}}{3}=\underline{3\sqrt{3}\ unidades}.$$

****

3º) Calcular los valores A, B, C y D para que la función $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ tenga extremos relativos en $O(0,0)$ y $P(2,2)$.

Por pasar por $O(0,0)$ y $P(2,2)$:

$f(0) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 0 + D = 0 \Rightarrow \underline{D = 0}$.

$f(2) = 2 \Rightarrow A \cdot 2^3 + B \cdot 2^2 + C \cdot 2 = 2;\ 8A + 4B + 2C = 2;$

$\boldsymbol{4A + 2B + C = 1}$. (1)

$f'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C$.

Para que una función tenga un extremo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto:

Por tener extremos relativos en $O(0,0)$ y $P(2,2)$:

$f'(0) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + C = 0 \Rightarrow \underline{C = 0}$.

$f'(2) = 0 \Rightarrow 3A \cdot 2^2 + 2B \cdot 2 = 0;\ 12A + 4B = 0;\ \boldsymbol{3A + B = 0}$. (2)

Con las ecuaciones (1) y (2) con C = 0 se forma el sistema:

$\left.\begin{array}{r} 4A + 2B = 1 \\ 3A + B = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -4A - 2B = -1 \\ 6A + 2B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2A = -1;\ \underline{A = -\frac{1}{2}};\ \underline{B = \frac{3}{2}}.$

La función resulta ser: $\underline{f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2}$.

****

4º) Resolver las siguientes integrales: $a)\ I=\int \frac{5dx}{x^2-3x+2}$. $\qquad b)\ I=\int (2x+1)^4 \cdot dx$.

$a)$

$$I=\int \frac{5dx}{x^2-3x+2}.$$

$$x^2-3x+2=0;\ \ x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{x_1=1}, \boldsymbol{x_2=2}.$$

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2).$$

$$\frac{5}{x^2-3x+2}=\frac{M}{x-1}+\frac{N}{x-2}=\frac{Mx-2M+Nx-N}{(x+2)(x-1)}=\frac{(M+N)x+(-2M-N)}{x^2-3x+2}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} M+N=0 \\ -2M-N=5 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -M=5;\ \ \boldsymbol{M=-5} \Rightarrow \boldsymbol{N=5}.$$

$$A=\int \frac{5}{x^2-3x+2}\cdot dx=\int \left(\frac{M}{x-1}+\frac{N}{x-2}\right)\cdot dx=\int \left(\frac{-5}{x-1}+\frac{5}{x-2}\right)\cdot dx=$$

$$=-5\cdot L|x-1|+5\cdot L|x-2|+C=L\left|\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^5\right|+C.$$

$$\underline{\int \frac{5}{x^2-3x+2}\cdot dx=L\left|\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^5\right|+C.}$$

$b)$

$$I=\int (2x+1)^4\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+1=t \\ dx=\frac{1}{2}\cdot dt \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\int t^4\cdot dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^5}{5}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^5}{5}+C.$$

$$\underline{\int (2x+1)^4\cdot dx=\frac{1}{10}\cdot(2x+1)^5+C.}$$

****

5º) Calcula la cifra de las unidades del número $N = 3^{2.016} + 2^{2.016}$.

$3^0 = 1,\ 3^1 = 3;\ 3^2 = 9;\ 3^3 = 27;\ 3^4 = 81;\ 3^5 = 243,\ \cdots\cdots$

Nótese que las sucesivas potencias de 3 terminan en 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, · · · · ·

En general 3^n termina en el resto de la división de n entre 4.

En particular $3^{2.016}$ termina en 1 por ser 2.016 divisible por 4. (resto 0)

$2^0 = 1;\ 2^1 = 2;\ 2^2 = 4;\ 2^3 = 8;\ 2^4 = 16;\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 64,\ \cdots\cdots$

Nótese que las sucesivas potencias de 2 (excluyendo 2^0) terminan, sucesivamente, en 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, · · · · · ·

En general, 2^n termina en: $\begin{cases} 6 \to Resto\ n: 4\ es\ 0 \\ 2 \to Resto\ n: 4\ es\ 1 \\ 4 \to Resto\ n: 4\ es\ 2 \\ 8 \to Resto\ n: 4\ es\ 3 \end{cases}$.

El resto de 2.016 entre 4 es 0, por lo cual $2^{2.016}$ termina en 6.

Como $6 + 1 = 7$:

$$\underline{N = 3^{2.016} + 2^{2.016}\ termina\ en\ 7}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Determina el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & a \\ a & a-3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro a. En caso de existir, calcula la inversa de A para $a = 1$. Si no existe tal inversa explica porqué.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & a \\ a & a-3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(a-3) + 2a^2 - 2 - 2a =$$

$$= -a + 3 + 2a^2 - 2 - 2a = 2a^2 - 3a + 1 = 0; \;\; a = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\; a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 1.$$

Por existir el menor de A: $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$:

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq ½ \\ a \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A = 3.}$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a = ½ \\ a = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A = 2.}$$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

Como quiera que para $a = 1 \Rightarrow |A| = 0$.

$$\underline{La\ matriz\ A\ no\ tiene\ inversa\ para\ a = 1}.$$

****

2º) Sea r la recta que pasa por los puntos $P(1,2,3)$ y $Q(-1,0,1)$.

$a)$ Determinar la ecuación del plano π_1 perpendicular a la recta r y que pase por el punto $A(4,-2,-1)$.

$b)$ Determinar la ecuación del plano π_2 perpendicular a la recta r y que pase por el punto $B(2,1,-3)$.

$c)$ Calcular la distancia que hay entre ambos planos.

$a)$

Los puntos Q y P determinan el vector:

$\overrightarrow{QP} = [P - Q] = [(1,2,3) - (-1,0,1)] = (2,2,2).$

Cualquier vector linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{QP}$ es normal al plano pedido π_1, por ejemplo, $\overrightarrow{n_1} = (1,1,1)$.

La expresión general de π_1 es $\pi_1 \equiv x + y + z + D_1 = 0$.

Como π_1 contiene al punto $A(4,-2,-1)$ debe satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv x + y + z + D_1 = 0 \\ A(4,-2,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow 4 - 2 - 1 + D_1 = 0 \Rightarrow D_1 = 1.$$

$$\underline{\pi_1 \equiv x + y + z + 1 = 0}.$$

$b)$

Cualquier vector linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{QP}$ es normal al plano pedido π_2, por ejemplo, $\overrightarrow{n_2} = (1,1,1)$.

La expresión general de π_2 es $\pi_1 \equiv x + y + z + D_2 = 0$.

Como π_2 contiene al punto $B(2,1,-3)$ debe satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_2 \equiv x + y + z + D_2 = 0 \\ B(2,1,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 + 1 - 3 + D_2 = 0 \Rightarrow D_2 = 0.$$

$$\underline{\pi_2 \equiv x + y + z = 0}.$$

$c)$

La distancia entre los planos paralelos cualesquiera dados por sus ecuaciones generales: $\alpha_1 \equiv Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y $\alpha_2 \equiv Ax + By + Cz + D_2 = 0$, viene dada por la fórmula: $d(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicada a los planos $\pi_1 \equiv x + y + z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + y + z = 0$ es:

$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|1-0|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\underline{d(\pi_1, \pi_2) = \frac{\sqrt{3}}{3}\ unidades.}$$

****

3º) Dada la función polinómica $P(x)=\frac{x^4}{2}-x^3+\frac{x^2}{2}$:

a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $P(x)$.

b) Obtener sus máximos y mínimos.

c) ¿Existe algún valor de x tal que $P(x)<0$? Razonar porqué.

----

a)

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente, en ese punto.

$$P'(x)=2x^3-3x^2+x=x(2x^2-3x+1).$$

$$P'(x)=0 \Rightarrow x(2x^2-3x+1)=0;\ \Rightarrow x_1=0;\ \ 2x^2-3x+1=0;$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{4}=\frac{3\pm 1}{4}\Rightarrow x_2=\frac{1}{2}, x_3=1.$$

Teniendo en cuenta que $P(x)$ es continua en R por ser una función polinómica, los valores que anulan la primera derivada dividen el dominio de la función en cuatro intervalos crecientes o decrecientes de forma alternativa.

Teniendo en cuenta que, por ejemplo, $P'(2)=6>0$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: P'(x)>0 \Rightarrow x\epsilon\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty).}$$

$$\underline{Decrecimiento: P'(x)<0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2},1\right).}$$

b)

Una función tiene un máximo relativo en un punto cuando se anula la primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera y, tiene un mínimo relativo para los valores reales que anulan la primera derivada y hacen positiva la segunda derivada.

$$P''(x)=6x^2-3x+1 \Rightarrow \begin{cases} P''(0)=1>0 \rightarrow mín. \\ P''(½)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+1=1>0 \rightarrow míx. \\ P''(1)=6-3+1=4>0 \rightarrow mín. \end{cases}$$

$$P(0)=0\ \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \underline{O(0,0)}.$$

$$P(½)=\frac{1}{32}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{32}\Rightarrow Máximo \Rightarrow\ \underline{A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{32}\right)}.$$

$P(1) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \underline{B(1,0)}.$

$c)$

$P(x) = \frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}(x^2 - x + 1).$

$x^2 - x + 1 = 0;\ \ x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow x \notin R \ \ \Rightarrow \ \ x^2 - x + 1 > 0.$

Según lo anterior y siendo $\frac{x^2}{2} > 0$ se cumple que $P(x) > 0, \forall x \in R.$

$\underline{No\ existe\ ningun\ valor\ real\ de\ x\ tal\ que\ P(x) < 0}.$

****

4º) Dadas las funciones $y = f(x) = 9 - x^2$ e $y = g(x) = 2x + 1$.

a) Dibujar el recinto acotado por sus gráficas.

b) Hallar el área de dicho recinto.

----

a)

Los puntos de intersección de la parábola y la recta son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$9 - x^2 = 2x + 1\ \ ;;\ \ x^2 + 2x - 8 = 0;$$

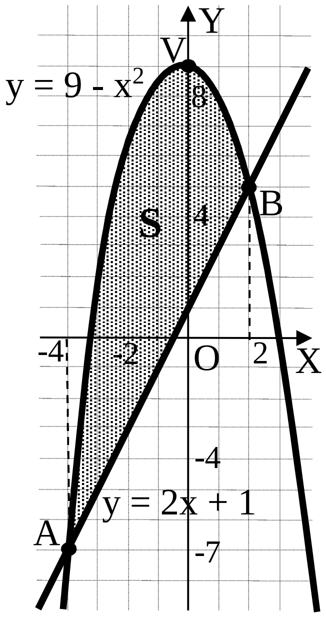
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = -1 \pm 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \to A(-4, -7) \\ x_2 = 2 \to B(2, 5) \end{cases}.$$

El vértice de la parábola $y = 9 - x^2$ es:

$$y' = -2x = 0 \to x = 0\ \Rightarrow\ V(0, 9).$$

La representación gráfica del conjunto es el indicado en la figura adjunta.



b)

Para el cálculo del área limitada por la parábola y la curva, que es la parte sombreada de la figura, se tiene en cuenta que, en el intervalo $(-4, 2)$, todas las ordenadas de la parábola son mayores que las correspondientes ordenadas de la recta.

$$S = \int_{-4}^{2} [(9 - x^2) - (2x + 1)] \cdot dx = \int_{-4}^{2} (-x^2 - 2x + 8) \cdot dx =$$

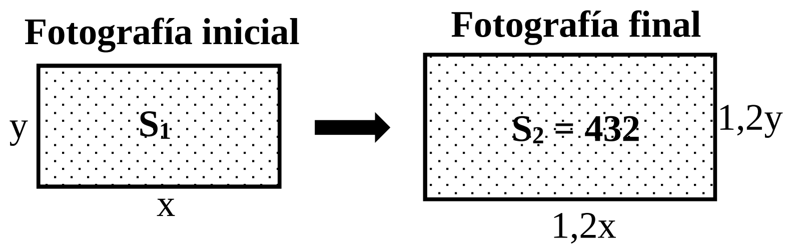
$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 8x\right]_{-4}^{2} = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x\right]_{-4}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} - 2^2 + 8 \cdot 2\right) - \left[-\frac{(-4)^3}{3} - (-4)^2 + 8 \cdot (-4)\right] =$$

$$= -\frac{8}{3} - 4 + 16 - \frac{64}{3} + 16 + 32 = 60 - \frac{72}{3} = 60 - 24 = \underline{36\ u^2}.$$

****

5º) Ampliamos una fotografía rectangular de manera que sus dimensiones, largo y ancho, sean un 20 % más que las dimensiones originales. Si la nueva fotografía ocupa 432 centímetros cuadrados, ¿cuánto ocupaba la fotografía inicial?



Siendo x e y las dimensiones del rectángulo inicial, el rectángulo final tiene, respectivamente, 1,2 x y 1,2 y como dimensiones.

$$S_1 = x \cdot y \;\Rightarrow\; S_2 = (1{,}2x) \cdot (1{,}2y) = 1{,}44x \cdot y = 1{,}44 \cdot S_1 = 432 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; S_1 = \frac{432}{1{,}44} = \frac{43.200}{144} = 300.$$

$$\underline{La\ fotografía\ inicial\ ocupaba\ 300\ centímetros\ cuadrados.}$$

****