

**PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)****UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO****JUNIO – 2011 (GENERAL)**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

**MATEMÁTICAS II****Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. El examen consta de cinco ejercicios. Se podrán utilizar calculadoras no programables.

**OPCIÓN A**

1º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales  $S \equiv \begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 5y + 4z = -2 \\ x + 3y + m^2z = m \end{cases}$ , se pide:

a) Discutir su compatibilidad en función del parámetro m.

b) Resolver el sistema para  $m = 0$ .

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & m^2 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & m^2 & m \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de m es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & m^2 \end{vmatrix} = 5m^2 + 18 + 8 - 15 - 12 - 4m^2 = m^2 - 1 = 0 \Rightarrow \underline{m_1 = -1} \ ; \ ; \ \underline{m_2 = 1}.$$

Para  $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Deter minado}$

---

$$\text{Para } m = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_4 = -C_1\} \Rightarrow \underline{\text{Rango de } M' = 2}.$$

Para  $m = -1 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$

$$\text{Para } m=1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango de } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 6 - 4 + 5 + 6 - 4 = 10 - 8 = 2 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3.}$$

Para  $m = 1 \Rightarrow \text{Rango } M = 2 ; ; \text{Rango } M' = 3 \Rightarrow \text{Incompatible}$

b)

$$\text{Para } m = 0 \text{ el sistema es } S \equiv \begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 5y + 4z = -2 \\ x + 3y = 0 \end{cases}, \text{ que es compatible determinado.}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 2x + 5y + 4z = -2 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \rightarrow x = -3y \Rightarrow \begin{cases} -3y + 2y + 3z = -1 \\ -6y + 5y + 4z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 3z = -1 \\ -y + 4z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 3z = 1 \\ -y + 4z = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{z = -1}} ; ; y - 3z = 1 ; ; y = 1 + 3z = 1 - 3 = \underline{\underline{-2}} = y ; ; x = -3y = \underline{\underline{6}} = x .$$

\*\*\*\*\*

2º) Sean las rectas  $r \equiv \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -4 + 3t \\ z = 0 \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - y = -6 \end{cases}$ . Hallar la ecuación de la recta  $t$  perpendicular a las rectas  $r$  y  $s$  y tal que contenga al punto  $P(3, -1, 2)$ .

-----

Un vector director de  $r$  es  $\vec{v}_r = (1, 3, 0)$ .

Un vector director de  $s$  es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que determinan  $s$ :

$$\vec{v}_s' = (1, 1, -2) \wedge (1, -1, 0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2j - k - k - 2i = (-2i - 2j - 2k) \Rightarrow \vec{v}_s = (1, 1, 1).$$

Un vector director de  $t$  es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores de las rectas  $r$  y  $s$ .

$$\vec{v}_t = (1, 3, 0) \wedge (1, 1, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3i + k - 3k - j = (3i - j - 2k) = (3, -1, -2) = \vec{v}_t.$$

La expresión de  $t$  dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es:

$$t \equiv \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

\*\*\*\*\*

3º) Sea f la función  $f(x) = x^2 e^{-2x}$ .

a) Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Estudiar sus máximos y mínimos y trazar un bosquejo de su gráfica.

a)

La función  $f(x) = x^2 e^{-2x}$  es continua en su dominio, que es  $\mathbb{R}$ .

Una función es creciente o decreciente en un punto según que su primera derivada sea positiva o negativa para ese punto, respectivamente.

$$f(x) = \frac{x^2}{e^{2x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot e^{2x} - x^2 \cdot 2e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{2x - 2x^2}{e^{2x}} = \frac{2x(1-x)}{e^{2x}} = f'(x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x(1-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}.$$

Las raíces de la primera derivada dividen el dominio de f en los siguientes intervalos:  $(-\infty, 0)$ ,  $(0, 1)$  y  $(1, +\infty)$ , en los cuales la función f es creciente o decreciente de forma alternativa, por lo cual, basta con determinar la condición de crecimiento o decrecimiento en uno de ellos para determinar el crecimiento o decrecimiento de la función.

Por ejemplo, para  $x = 2$  es:  $f'(2) = \frac{2 \cdot 2 \cdot (1-2)}{e^{2 \cdot 2}} = \frac{-4}{e^4} < 0 \Rightarrow$  decreciente para  $x = 2$ .

$$\underline{\underline{\text{Crecimiento: } f'(x) > 0 \Rightarrow (0, 1)}}$$

$$\underline{\underline{\text{Decrecimiento: } f'(x) < 0 \Rightarrow (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)}}$$

b)

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo para los valores que anulan la primera derivada; para diferenciar entre máximos y mínimos relativos se recurre a la segunda derivada: según sea positiva o negativa para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un mínimo o de un máximo, respectivamente.

$$f''(x) = \frac{(2-4x) \cdot e^{2x} - 2x(1-x) \cdot 2e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{2-4x-4x(1-x)}{e^{4x}} = \frac{2-4x-4x+4x^2}{e^{4x}} = \frac{2(2x^2-4x+1)}{e^{4x}}.$$

$$f''(0) = \frac{2(2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 1)}{e^{4 \cdot 0}} = \frac{2}{e^0} = \frac{2}{1} = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo relativo para } x = 0.}}$$

$$f(0) = \frac{0}{e^0} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo: } O(0, 0).}}$$

$$f''(1) = \frac{2(2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1)}{e^{4 \cdot 1}} = \frac{-2}{e^4} < 0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo relativo para } x = 1}.$$

$$f(1) = \frac{1^2}{e^{2 \cdot 1}} = \frac{1}{e^2} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo: } A\left(1, \frac{1}{e^2}\right)}}.$$

Teniendo en cuenta que  $f(x) = \frac{x^2}{e^{2x}} \geq 0, \forall x \in R$  y que el eje OX es una asíntota horizontal, por ser:

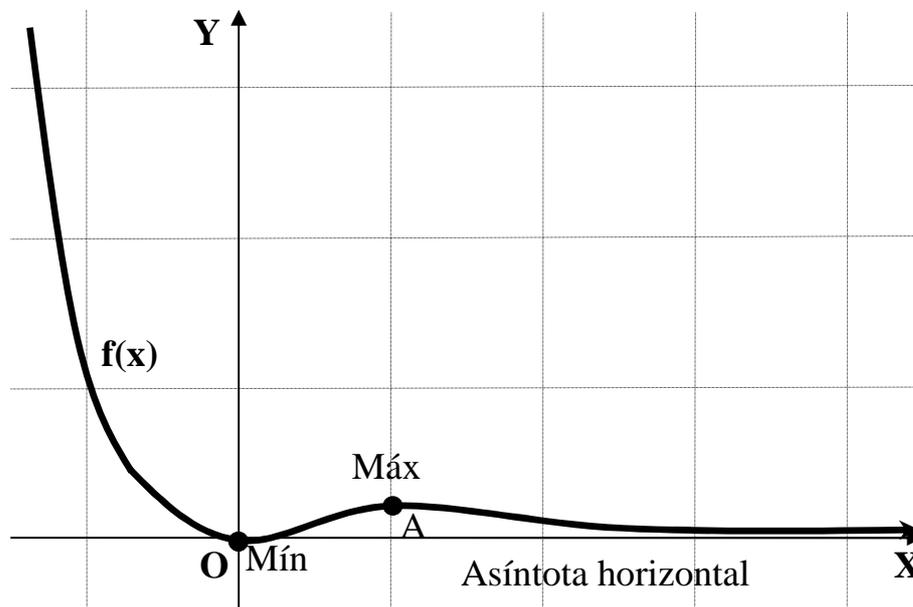
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow L'Hopital \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow L'Hopital \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = \frac{1}{\infty} = \underline{0},$$

Para  $x < 0$  la función tiene una rama parabólica, por ser:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{2x}} = \frac{\infty}{e^{-\infty}} = \infty \cdot \infty = \underline{\underline{\infty}}.$$

La representación gráfica es, aproximadamente, la que sigue:



\*\*\*\*\*

4º) Calcular las siguientes integrales indefinidas  $I_1 = \int x Lx \cdot dx$  e  $I_2 = \int x \text{sen}(2x) \cdot dx$ , explicando método seguido para el cálculo.

-----

$$I_1 = \int x \cdot Lx \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = Lx \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ x \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow I_1 = Lx \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \int x \cdot dx = \frac{x}{2} \cdot Lx - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \underline{\underline{\frac{x}{4}(2Lx - x) + C = I_1}}$$

$$I_2 = \int x \cdot \text{sen}(2x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ \text{sen}(2x) \cdot dx = dv \rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos(2x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2 = x \cdot \left[ -\frac{1}{2} \cos(2x) \right] - \int -\frac{1}{2} \cos(2x) \cdot dx = -\frac{x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \int \cos(2x) \cdot dx =$$

$$= \underline{\underline{-\frac{x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} A = I_2}} \quad (*)$$

$$A = \int \cos(2x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = t \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \int \cos t \cdot dt = \frac{1}{2} \text{sen } t + C = \underline{\underline{\frac{1}{2} \text{sen}(2x) + C = A}}$$

Sustituyendo el valor obtenido de A en (\*) queda:

$$I_2 = -\frac{x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \text{sen}(2x) + C = \underline{\underline{\frac{1}{4} [\text{sen}(2x) - 2x \cos(2x)] + C = I_2}}$$

\*\*\*\*\*

5º) La suma de 30 múltiplos consecutivos de 7 es igual a 9.345. ¿Cuál es el primer y último número de esta serie de múltiplos? Razonar la respuesta.

-----

Los múltiplos sucesivos de un número constituyen una progresión aritmética de diferencia 7.

Sabiendo que la suma de los  $n$  términos de una progresión aritmética viene dada por la fórmula:  $S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$ ; por otra parte, la fórmula del término  $n$ -ésimo de una progresión aritmética es  $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$ .

Sustituyendo la expresión del término  $n$ -ésimo en la fórmula de la suma, resulta:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} \cdot n = S_n.$$

De la última expresión se conocen todos los elementos, excepto  $a_1$ , que se obtiene despejándolo de la última fórmula:  $a_1 = \frac{\frac{2S_n}{n} - (n-1) \cdot d}{2}$ .

$$\text{Considerando que: } \begin{cases} S_n = 9.345 \\ n = 30 \\ d = 7 \end{cases} \Rightarrow a_1 = \frac{\frac{2 \cdot 9.345}{30} - (30-1) \cdot 7}{2} = \frac{623 - 203}{2} = \underline{210 = a_1}.$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 210 + 29 \cdot 7 = 210 + 203 = \underline{413 = a_n}.$$

El primer múltiplo de 7 es 210 y el último, 413.

\*\*\*\*\*

## OPCIÓN B

1º) Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

a) Contestar razonadamente a la siguiente pregunta: ¿existe algún valor de  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que A no tenga inversa para ese valor?

b) Calcular, en caso de que sea posible, la matriz inversa de  $A^2$  para  $\alpha = 0$ .

-----

a)

La condición necesaria y suficiente para que una matriz no tenga inversa es que su determinante sea cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\alpha^2 - 1 = 0 \quad ; \quad \alpha^2 + 1 = 0 \Rightarrow \underline{\alpha \notin \mathbb{R}}.$$

No existe ningún valor real de  $\alpha$  para el cual la matriz A no tenga inversa.

b)

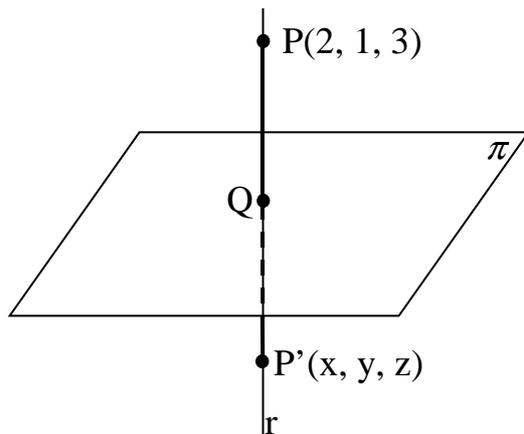
$$\alpha = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos la inversa de  $A^2$  mediante el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} (A/I) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_2 + 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 4F_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 + F_2\} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 + F_3\} \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow (A^2)^{-1} = A^{-2} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}}. \end{aligned}$$

\*\*\*\*\*

2º) Sea el plano  $\pi \equiv x - y + z = 0$  y sea el punto  $P(2, 1, 3)$ . Calcular el punto simétrico de  $P$  respecto a  $\pi$ , explicando el proceso seguido para dicho cálculo.



Un vector normal de  $\pi$  es  $\vec{n} = (1, -1, 1)$ .

La recta  $r$  es la que pasa por el punto  $P$  y es perpendicular al plano, por lo tanto su vector director es el vector normal del plano  $\pi$ ; su expresión por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

El punto  $Q$ , intersección del plano  $\pi$  con la recta  $r$ , tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo tanto:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - y + z = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow (2 + \lambda) - (1 - \lambda) + (3 + \lambda) = 0 \;; \; 2 + \lambda - 1 + \lambda + 3 + \lambda = 0 \;; \; 3\lambda + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \\ y = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \\ z = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \underline{Q\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right)}$$

Para que  $P'$  sea el punto simétrico de  $P$  con respecto a  $\pi$ , tiene que cumplirse que:

$$\vec{PQ} = \vec{QP'} \Rightarrow Q - P = P' - Q \;; \; \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right) - (2, 1, 3) = (x, y, z) - \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right) \;;$$

$$\left(\frac{2}{3} - 2, \frac{7}{3} - 1, \frac{5}{3} - 3\right) = \left(x - \frac{2}{3}, y - \frac{7}{3}, z - \frac{5}{3}\right) \;; \; \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \left(x - \frac{2}{3}, y - \frac{7}{3}, z - \frac{5}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3} \rightarrow x = -\frac{2}{3} \\ y - \frac{7}{3} = \frac{4}{3} \rightarrow y = -\frac{11}{3} \\ z - \frac{5}{3} = -\frac{4}{3} \rightarrow z = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{P'\left(-\frac{2}{3}, -\frac{11}{3}, \frac{1}{3}\right)}}$$

\*\*\*\*\*

3º) Sea  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ . Encontrar los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  de forma que la gráfica de  $f$  contenga al punto  $P(0, 1)$  y las rectas tangentes a  $f$  en los puntos  $x = 0$  y  $x = 1$  sean ambas paralelas a la recta  $y = 3x + 5$ .

-----

Si  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  contiene a  $P(0, 1)$  es:  $f(0) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{c = 1}}$ .

La pendiente a una función en un punto es igual que el valor de su derivada en ese punto. Por otra parte, la recta  $y = 3x + 5$  tiene de pendiente  $m = 3$ .

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = 3 \Rightarrow \underline{\underline{b = 3}} \\ f'(1) = 3 \Rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + 3 = 3 \quad ; ; \quad 2a + 3 = 0 \quad ; ; \quad \underline{\underline{a = -\frac{3}{2}}} \end{cases} .$$

\*\*\*\*\*

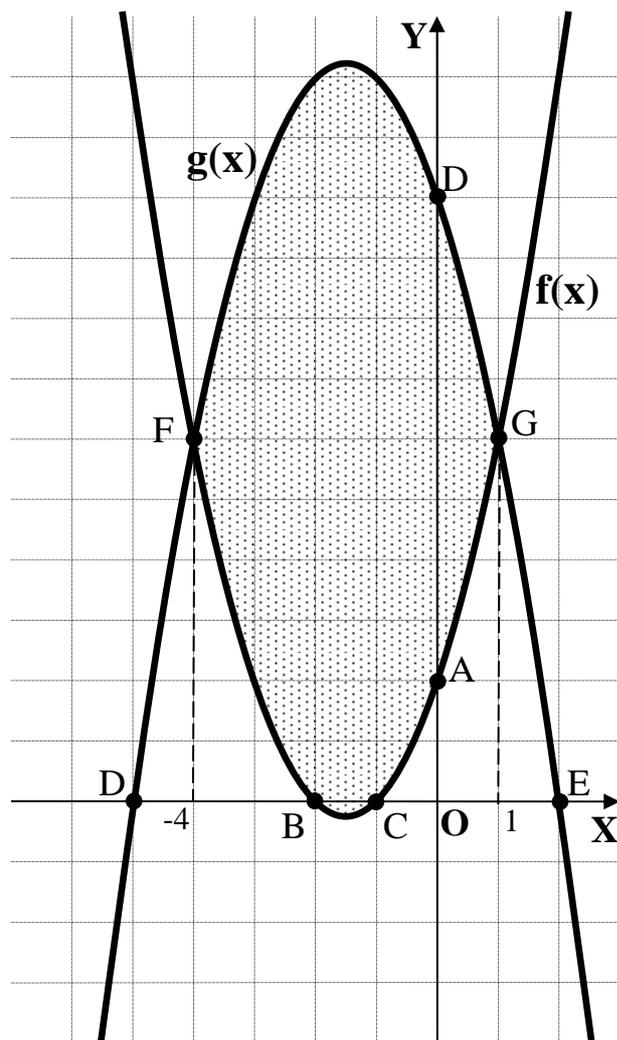
4º) Sean  $f$  y  $g$  las funciones  $f(x)=x^2+3x+2$  y  $g(x)=-x^2-3x+10$ .

a) Trazar un esquema gráfico de ambas funciones.

b) Calcular el área de la región del plano limitada por ambas funciones.

a)

La función  $f(x)=x^2+3x+2$  corta al eje Y en  $A(0, 2)$ , y sus cortes con el eje X se obtienen igualando la función a cero:



$$f(x)=0 \Rightarrow x^2+3x+2=0 ;;$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -1 \end{cases} .$$

Los puntos de corte con el eje X son  $B(-2, 0)$  y  $C(-1, 0)$ .

La función  $g(x)=-x^2-3x+10$  corta al eje Y en  $D(0, 10)$ , y sus cortes con el eje X se obtienen igualando la función a cero:

$$g(x)=0 \Rightarrow -x^2-3x+10=0 ;;$$

$$x^2+3x-10=0 ;; x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} \Rightarrow \underline{x_1 = -5} ;; \underline{x_2 = 2}$$

Los puntos de corte con el eje X son  $D(-5, 0)$  y  $E(2, 0)$ .

Los puntos de corte de ambas funciones se obtienen igualando sus expresiones:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x^2+3x+2=-x^2-3x+10 ;; 2x^2+6x-8=0 ;; x^2+3x-4=0 ;;$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \Rightarrow \underline{x_1 = -4} ;; \underline{x_2 = 1} .$$

Los puntos de corte de las funciones son  $F(-4, 6)$  y  $G(1, 6)$ .

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la de la figura.

b)

Teniendo en cuenta que todas las ordenadas de la función  $g(x)$  son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función  $f(x)$  en el intervalo correspondiente al área a calcular, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_{-4}^1 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{-4}^1 [(-x^2 - 3x + 10) - (x^2 + 3x + 2)] \cdot dx = \int_{-4}^1 (-2x^2 - 6x + 8) \cdot dx =$$

$$= \left[ -\frac{2x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 8x \right]_{-4}^1 = \left[ -\frac{2x^3}{3} - 3x^2 + 8x \right]_{-4}^1 = \left( -\frac{2 \cdot 1^3}{3} - 3 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 \right) -$$

$$- \left[ -\frac{2 \cdot (-4)^3}{3} - 3 \cdot (-4)^2 + 8 \cdot (-4) \right] = -\frac{2}{3} - 3 + 8 - \frac{128}{3} + 48 + 32 = 85 - \frac{130}{3} = \frac{255 - 130}{3} = \frac{125}{3} u^2 = S.$$

\*\*\*\*\*

5º) Ane, Berta y Carlos están jugando a un juego que consiste en lanzar dos dados al mismo tiempo. Ane suma los resultados de los dos dados, mientras que Berta calcula la diferencia entre la mayor y la menor puntuación y Carlos multiplica las puntuaciones. Ane apuesta por el 6, Berta por el 2 y Carlos por el 4. ¿Son equilibradas estas apuestas o alguno de los tres tiene ventaja? Razona la respuesta.

-----

El espacio muestral al lanzar dos dados al mismo tiempo es el siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 & 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 & 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{array} \right\}$$

El número de casos posibles es  $N = VR_6^2 = 6^2 = \underline{36}$ .

Los casos favorables de cada uno de los que juegan es el indicado en cada caso.

$$\begin{array}{c} \underline{\underline{ANE}} \\ \left\{ \begin{array}{cccccc} 11 & 12 & 13 & 14 & \underline{15} & 16 & 21 & 22 & 23 & \underline{24} & 25 & 26 \\ 31 & 32 & \underline{\underline{33}} & 34 & 35 & 36 & 41 & \underline{\underline{42}} & 43 & 44 & 45 & 46 \\ \underline{\underline{51}} & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 & \underline{\underline{61}} & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{array} \right\} \end{array}$$

Casos favorables: 6

$$\begin{array}{c} \underline{\underline{BERTA}} \\ \left\{ \begin{array}{cccccc} 11 & 12 & \underline{13} & 14 & 15 & 16 & 21 & 22 & 23 & \underline{24} & 25 & 26 \\ \underline{\underline{31}} & 32 & 33 & 34 & \underline{\underline{35}} & 36 & 41 & \underline{\underline{42}} & 43 & 44 & 45 & \underline{\underline{46}} \\ 51 & 52 & \underline{\underline{53}} & 54 & 55 & 56 & 61 & 62 & 63 & \underline{\underline{64}} & 65 & 66 \end{array} \right\} \end{array}$$

Casos favorables: 8

$$\begin{array}{c} \underline{\underline{CARLOS}} \\ \left\{ \begin{array}{cccccc} 11 & 12 & 13 & \underline{14} & 15 & 16 & 21 & \underline{\underline{22}} & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 & \underline{\underline{41}} & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 & 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{array} \right\} \end{array}$$

Casos favorables: 3

La probabilidad de cada uno, aplicando la regla de Laplace, es la siguiente:

$$P_{ANE} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad ; ; \quad P_{BERTA} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \quad ; ; \quad P_{CARLOS} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Como se aprecia, no son equilibradas las apuestas; tiene ventaja Berta.

\*\*\*\*\*