PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2008

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Nota: En cada bloque debe contestarse o la cuestión o el problema. Cada uno de los ejercicios será valorado entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A.- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ y $M=\begin{pmatrix}m & n\\ p & q\end{pmatrix}$. Encontrar las condiciones que deben cumplir m, n, p y q para que se verifique que el producto de ambas matrices efectuado en las dos formas posibles sea el mismo.

$$\left.\begin{array}{l} A\cdot M=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}m & n\\ p & q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3m+2p & 3n+2q\\ m+3p & n+3q\end{pmatrix} \\ \\ M\cdot A=\begin{pmatrix}m & n\\ p & q\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3m+n & 2m+3n\\ 3p+q & 2p+3q\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix}3m+2p & 3n+2q\\ m+3p & n+3q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3m+n & 2m+3n\\ 3p+q & 2p+3q\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} 3m+2p=3m+n \\ m+3p=3p+3q \\ 3n+2q=2m+3n \\ n+q=2p+3q \end{cases}\right\} \begin{array}{l}\to n=2p \\ \to m=3q \\ \to m=q \\ \to n=2p+2q\end{array} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{m=q=0 \;\;;;\;\; n=2p}}$$

****

Problema A.- Estudiar la compatibilidad del sistema $S \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 3x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + y + \alpha z = \alpha \end{cases}$. Resolver es sistema en el caso de indeterminación.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \;\; y \;\; M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

El rango de M en función de α es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = 2\alpha + 6 - 12 - 16 - 3 + 3\alpha = 5\alpha - 25 = 5(\alpha - 5) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\alpha = 5}$$

$$\underline{Para \;\; \alpha \neq 5 \;\Rightarrow\; Rango \; M = Rango \; M' = 3 = n^{o} \; incógnitas \Rightarrow Compatible \;\; Determinado}$$

Veamos el rango de M' para $\alpha = 5$:

$$Rango \;\; M' \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 12 - 4 - 32 - 1 + 15 = 37 - 37 = 0 \\ \{C_1,\; C_3,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 60 + 8 - 48 - 5 - 30 = 83 - 83 = 0 \\ \{C_2,\; C_3,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 40 + 2 - 12 + 5 - 20 = 47 - 47 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\; \underline{Para \;\; \alpha = 5 \;\Rightarrow\; Rango \;\; M' = 2}$$

$$\underline{Para \;\; \alpha = 5 \;\Rightarrow\; Rango \; M = Rango \; M' = 2 < n^{o} \; incógnitas \Rightarrow Compatible \;\; Indeterminado}$$

Resolvemos en el caso de compatible indeterminado.

El sistema resulta $S \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 4 \\ 3x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + y + 5z = 5 \end{cases}$.

Eliminando, por ejemplo, la tercera ecuación y parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo $\underline{z=\lambda}$, resulta:

$$\left.\begin{array}{r} x-y=4-2\lambda \\ 3x+2y=1-3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{array}{l} 2x-2y=8-4\lambda \\ 3x+2y=1-3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 5x=9-7\lambda \;;\; \underline{x=\frac{9}{5}-\frac{7}{5}\lambda} \\ \\ \left.\begin{array}{r} -3x+3y=-12+6\lambda \\ 3x+2y=1-3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 5y=-11+3\lambda \;;\; \underline{y=-\frac{11}{5}+\frac{3}{5}\lambda} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{Solución:\begin{cases} x=\frac{9}{5}-\frac{7}{5}\lambda \\ y=-\frac{11}{5}+\frac{3}{5}\lambda \;,\; \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

BLOQUE B

Cuestión B.- Sean los puntos del espacio A(3, 4, 1+2a) y B(-3, 0, 1-2a). Se sabe que dichos puntos son simétricos respecto a un plano π. Hallar de forma razonada la ecuación de dicho plano.

El punto medio de A y B es: $M \equiv \left(\frac{3-3}{2},\ \frac{4+0}{2},\ \frac{1+2a+1-2a}{2} \right) \Rightarrow \underline{M(0,\ 2,\ 1)}$.

El vector $\overrightarrow{v}$ que determinan los puntos B y A es:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BA} = A - B = (3,\ 4,\ 1+2a) - (-3,\ 0,\ 1-2a) = (6,\ 4,\ 4a).$$

El plano π tiene como vector normal a cualquier vector linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{v}$.

El vector normal puede ser $\overrightarrow{n} = (3,\ 2,\ 2a)$.

El plano π es de la forma $\pi \equiv 3x + 2y + 2az + D = 0$.

Para determinar el valor de D tenemos en cuenta que contiene a M(0, 2, 1):

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 3x + 2y + 2az + D = 0 \\ M(0,\ 2,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 2a \cdot 1 + D = 0\ ;;\ \underline{D = -2a - 4}.$$

El plano pedido, en función de a, es el siguiente:

$$\underline{\underline{\pi \equiv 3x + 2y + 2az - (2a+4) = 0}}$$

****

Problema B.- Calcular la ecuación cartesiana de la recta r que contiene a los puntos A y B de coordenadas A(1, 1, a) y B(1, 0, 3). ¿Existe algún valor de a tal que el punto $P(1,\ 3,\ 3)$ pertenezca a la recta? Razonar la respuesta.

La recta r tiene por vector director al vector $\vec{v}$ que determinan los puntos A y B.

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 0,\ 3) - (1,\ 1,\ a) = (0,\ -1,\ 3-a)$.

La expresión de r por unas ecuaciones continuas, considerando al vector $\vec{v}$ y al punto B es la siguiente: $r \equiv \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-3}{3-a}$.

De la expresión anterior de r se pueden obtener unas ecuaciones paramétricas o implícitas, como se nos pide: $r \equiv \begin{cases} x-1=0 \\ (3-a)y = -z+3 \end{cases}$.

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x-1=0 \\ (3-a)y + z - 3 = 0 \end{cases}}}$$

Para que el punto P(1, 3, 3) pertenezca a la recta r tiene que satisfacer su ecuación, por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x-1=0 \\ (3-a)y + z - 3 = 0 \end{cases} \\ P(1,\ 2,\ 3) \end{array}\right\} \Rightarrow (3-a)\cdot 2 + 3 - 3 = 0\ \ ;;\ \ 6 - 2a = 0 \ \Rightarrow\ \underline{a = 3}$$

<u>Para a = 3 el punto P(1, 3, 3) pertenece a la recta r.</u>

****

BLOQUE C

Cuestión C.- Sea f una función derivable en todos los puntos y tal que f(0) = 1, f'(0) = 2 y f''(0) = 3. Sea g(x) la función definida por $g(x)=3[f(x)]^2+8f(x)$. Calcular razonadamente g''(0).

$$g'(x)=6f(x)\cdot f'(x)+8f'(x)=\underline{2f'(x)\cdot[3f(x)+4]=g'(x)}$$

$$g''(x)=2\cdot\{f''(x)\cdot[3f(x)+4]+f'(x)\cdot 3f'(x)\}=\underline{2\cdot\left\{f''(x)\cdot[3f(x)+4]+3[f'(x)]^2\right\}=g''(x)}$$

$$g''(x)=2\cdot\left\{f''(x)\cdot[3f(x)+4]+3[f'(x)]^2\right\}\ \Rightarrow\ \{f(0)=1\ ;;\ f'(0)=2\ ;;\ f''(0)=3\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad g''(0)=2\cdot\left\{f''(0)\cdot[3f(0)+4]+3[f'(0)]^2\right\}=2\cdot\left[3\cdot(3\cdot 1+4)+3\cdot 2^2\right]=2\cdot(3\cdot 7+12)=$$

$$=2\cdot(21+12)=2\cdot 33=\underline{\underline{66=g''(0)}}$$

****

Problema C.- Sea la función $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+5$. Encontrar los valores de A y B para que dicha función tenga un máximo en x = 1 y un mínimo en x = 2.

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo en un punto es que se anule su derivada en ese punto.

$$f'(x)=3x^2+2Ax+B \;\Rightarrow\; \begin{cases} f'(1)=0 \;\Rightarrow\; 3\cdot 1^2+2A\cdot 1+B=0 \;;;\; \underline{2A+B=-3} \quad (1) \\ \\ f'(2)=0 \;\Rightarrow\; 3\cdot 2^2+2A\cdot 2+B=0 \;;;\; \underline{4A+B=-12} \quad (2) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema formado por (1) y (2) obtenemos los valores de A y B:

$$\left.\begin{array}{l} 2A+B=-3 \\ 4A+B=-12 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -2A-B=3 \\ 4A+B=-12 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; 2A=-9 \;;;\; \underline{\underline{A=-\frac{9}{2}}}$$

$$2A+B=-3 \;;;\; B=-3-2A=-3-2\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)=-3+9=\underline{\underline{6=B}}$$

Vamos a justificar las condiciones de máximo y mínimo:

$$f'(x)=3x^2+2Ax+B=3x^2+2\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)x+6=3x^2-9x+6=\underline{3\left(x^2-3x+2\right)=f'(x)}$$

$$f''(x)=3(2x-3) \;\Rightarrow\; \begin{cases} f''(1)=3(2\cdot 1-3)=-3<0 \;\Rightarrow\; \underline{\textit{Máximo para } x=1, \quad c.q.j.} \\ \\ f''(2)=3(2\cdot 2-3)=3>0 \;\Rightarrow\; \underline{\textit{Mínimo para } x=2, \quad c.q.j.} \end{cases}$$

****

BLOQUE D

Cuestión D.- Calcular la siguiente integral: $I=\int \frac{1}{x^2-(a+1)x+a}\cdot dx$, donde se supone que a no es cero.

$$x^2-(a+1)x+a=0\ \ ;;\ \ x=\frac{a+1\pm\sqrt{(a+1)^2-4a}}{2}=\frac{a+1\pm\sqrt{a^2+2a+1-4a}}{2}=\frac{a+1\pm\sqrt{a^2-2a+1}}{2}=$$

$$=\frac{a+1\pm\sqrt{(a-1)^2}}{2}=\frac{a+1\pm(a-1)}{2}\ \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{a+1+a-1}{2}=\frac{2a}{2}=\underline{a=x_1} \\ x_2=\frac{a+1-a+1}{2}=\frac{2}{2}=\underline{1=x_2} \end{cases}$$

$$I=\int \frac{1}{x^2-(a+1)x+a}\cdot dx=\int \frac{1}{(x-a)(x-1)}\cdot dx=\int\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-1}\right)\cdot dx=I \qquad (*)$$

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-1}=\frac{Ax-A+Bx-aB}{(x-a)(x-1)}=\frac{(A+B)x+(-A-aB)}{(x-a)(x-1)}=\frac{1}{(x-a)(x-1)}\ \Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A-aB=1 \end{cases}$$

$$B-aB=1\ \ ;;\ \ B(1-a)=1\ \ ;;\ \ \underline{B=\frac{1}{1-a}}\ \ ;;\ \ \underline{A=\frac{-1}{1-a}}$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A y B:

$$I=\int\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-1}\right)\cdot dx=\int\left(\frac{\frac{1}{a-1}}{x-a}+\frac{\frac{-1}{a-1}}{x-1}\right)\cdot dx=\frac{1}{a-1}\int\frac{1}{x-a}\cdot dx-\frac{1}{a-1}\int\frac{1}{x-1}\cdot dx=$$

$$=\frac{1}{a-1}\cdot L\left|x-a\right|-\frac{1}{a-1}\cdot L\left|x-1\right|+C=\underline{\underline{\frac{1}{a-1}\cdot L\left|\frac{x-a}{x-1}\right|+C=I}}$$

****

Problema D.- Sea R el rectángulo del plano con vértices $V_1(0,\ 0)$, $V_2(3,\ 0)$, $V_3(3,\ 9)$ y $V_4(0,\ 9)$. Demostrar que para todo valor de A la curva de ecuación $y = Ax^2 + (3-3A)x$ pasa por los vértices V_1 y V_3 y divide al rectángulo en dos regiones. Calcular el área de dichas regiones y encontrar el valor de A para que la región situada por encima de la curva tenga un área doble que la situada por debajo de la curva.

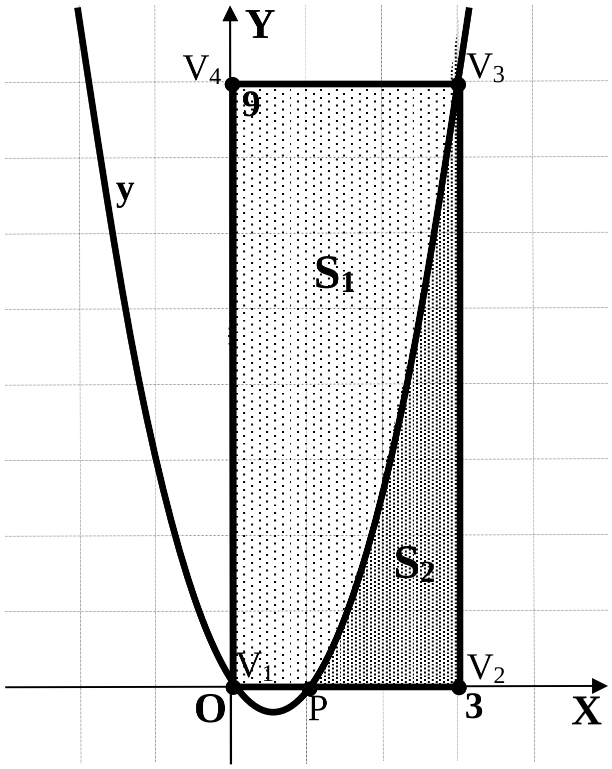
Los valores de la curva para las abscisas de los puntos $V_1(0,\ 0)$ y $V_3(3,\ 9)$ son los siguientes:

$y(0) = A \cdot 0^2 + (3-3A) \cdot 0 = 0 \ \Rightarrow$ La curva pasa por el punto $V_1(0,\ 0)$, para cualquier valor de A.

$y(3) = A \cdot 3^2 + (3-3A) \cdot 3 = 9A + 9 - 9A = 0 \ \Rightarrow$ La curva pasa por el punto $V_3(3,\ 9)$, para cualquier valor de A.

En efecto, la curva pasa por los vértices V_1 y V_3 para todo valor real de A, c. q. d.

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la expresada en la figura.



El punto P de corte de la curva con el eje X se obtiene para y = 0:

$$y = [Ax + (3-3A)]x = 0 \ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \ \rightarrow \ V_1 \\ x_2 = \dfrac{3A-3}{A} \ \rightarrow \ P \end{cases}$$

De la observación de la figura se deduce que $S_1 = 27 - S_2$. (*)

$$S_2 = \int_{\frac{3A-3}{A}}^{3} y \cdot dx = \int_{\frac{3A-3}{A}}^{3} \left[Ax^2 + (3-3A)x\right] \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{(3-3A)x^2}{2}\right]_{\frac{3A-3}{A}}^{3} =$$

$$= \left[\frac{A \cdot 3^3}{3} + \frac{(3-3A) \cdot 3^2}{2}\right] - \left[\frac{A \cdot \left(\frac{3A-3}{A}\right)^3}{3} + \frac{(3-3A) \cdot \left(\frac{3A-3}{A}\right)^2}{2}\right] =$$

$$=9A+\frac{27-27A}{2}-\left[\frac{\frac{3^3(A-1)^3}{A^2}}{3}+\frac{(3-3A)\cdot\frac{3^2(A-1)^2}{A^2}}{2}\right]=\frac{18A+27-27A}{2}-\frac{9(A-1)^3}{A^2}+\frac{27(A-1)^3}{2A^2}=$$

$$=\frac{27-9A}{2}-\frac{18(A-1)^3-27(A-1)^3}{2A^2}=\frac{27-9A}{2}+\frac{9(A-1)^3}{2A^2}=\frac{9}{2}\cdot\left[3-A+\frac{(A-1)^3}{A^2}\right]=$$

$$=\frac{9}{2}\cdot\left[3-A+\frac{A^3-3A^2+3A-1}{A^2}\right]=\frac{9}{2}\cdot\frac{3A^2-A^3+A^3-3A^2+3A-1}{A^2}=\underline{\frac{9}{2}\cdot\frac{3A-1}{A^2}=S_2}$$

Por condición del enunciado del ejercicio es $S_1=2S_2$ y teniendo en cuenta la expresión (*):

$$27-\frac{9}{2}\cdot\frac{3A-1}{A^2}=2\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{3A-1}{A^2}\ ;;\ 27=3\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{3A-1}{A^2}\ ;;\ 2A^2=3A-1\ ;;\ \underline{2A^2-3A+1=0}$$

$$A=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{4}=\frac{3\pm1}{4}\ \Rightarrow\ \begin{cases}\underline{A_1=1}\\ \underline{A_2=\frac{1}{2}}\end{cases}.$$

Para A = 1 resulta la curva $y=x^2$ y para $A=\frac{1}{2}$ resulta la curva $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x$, cuyo punto de corte (además del origen) resulta para x = -3 que carece de sentido lógico.

<u>Solución: A = 1.</u>

****

BLOQUE E

Cuestión E.- Un comerciante compró plumas estilográficas, lapiceros y gomas de borrar. Cada pluma estilográfica le costó 10 euros. Cada lapicero 1 euro. Y por cada 8 gomas de borrar pagó 1 euro. Si en total pagó 100 euros y compró 100 artículos, ¿cuántos artículos de cada clase compró?

Sean x, y, z el número de plumas, lapiceros y gomas, respectivamente.

De la atenta lectura del enunciado se deduce el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\left.\begin{array}{r} 10x+y+\frac{z}{8}=100 \\ x+y+z=100 \end{array}\right\}$, equivalente a $\left.\begin{array}{r} 80x+8y+z=800 \\ x+y+z=100 \end{array}\right\}$.

El sistema tiene dos ecuaciones y tres incógnitas. Para resolverlo parametrizamos una de las incógnitas, por ejemplo, $z=\lambda$, con lo que resulta:

$$\left.\begin{array}{r} 80x+8y=800-\lambda \\ x+y=100-\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 80x+8y=800-\lambda \\ -8x-8y=-800+8\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \; 72x=7\lambda \;\; ;; \;\; \underline{x=\frac{7}{72}\lambda}$$

$$x+y=100-\lambda \;\; ;; \;\; y=100-\lambda-x=100-\lambda-\frac{7}{72}\lambda=\underline{100-\frac{79}{72}\lambda=y}$$

La solución del sistema es $\underline{\left\{\begin{array}{l} x=\frac{7}{72}\lambda \\ y=100-\frac{79}{72}\lambda, \quad \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{array}\right.}$.

Teniendo en cuenta que x, y, z tienen que ser números naturales, la solución del sistema tiene sentido para el valor de $\lambda=72$, siendo la solución: x = 7, y = 21 y z = 72.

Compró 7 plumas estilográficas, 21 lapiceros y 72 gomas de borrar.

****

Problema E.- Se sabe que la suma de 45 números naturales consecutivos es igual a 1485. Encontrar de forma razonada dichos números.

Sea x el primero de los números. El último tiene que ser (x + 44).

El valor medio de los números es $\frac{x+x+44}{2}=\frac{2x+44}{2}=x+22$.

Según el enunciado tiene que cumplirse que $45 \cdot (x+22)=1485$.

$$x+22=\frac{1485}{45}=\frac{297 \cdot 2}{9}=33 \cdot 2=66 \ \ ;; \ \ x=66-22=\underline{44=x}$$

El primer número es el 44 y el último el 88.

Los números son 44, 45, 46, 47, $\cdots\cdots\cdots\cdots$, 88.

****