PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

SEPTIEMBRE (JULIO) – 2007

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Nota: En cada bloque debe contestarse o la cuestión o el problema. Cada uno de los ejercicios será valorado entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A.- Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}6&-3&-4\\-3&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}$.

Contestar razonadamente a la siguiente pregunta: ¿Existe algún valor de $\lambda\in R$ tal que la igualdad $(A-\lambda I)^2=B$ sea cierta? En caso afirmativo hallar dicho valor de λ.

$$A-\lambda\cdot I=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\lambda&1&0\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda\cdot I)^2=\begin{pmatrix}1-\lambda&1&0\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-\lambda&1&0\\1&1-\lambda&0\\1&0&-\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1-\lambda)^2+1&2-2\lambda&0\\2-2\lambda&1+(1-\lambda)^2&0\\1-2\lambda&1&\lambda^2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^2-2\lambda+2&2-2\lambda&0\\2-2\lambda&\lambda^2-2\lambda+2&0\\1-2\lambda&1&\lambda^2\end{pmatrix}=(A-\lambda\cdot I)^2$$

$$(A-\lambda\cdot I)^2=B\;\Rightarrow\;\begin{pmatrix}\lambda^2-2\lambda+2&2-2\lambda&0\\2-2\lambda&\lambda^2-2\lambda+2&0\\1-2\lambda&1&\lambda^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3&-4\\-3&2&1\\-4&1&5\end{pmatrix}\;\Rightarrow$$

$$\underline{\underline{No \;\; existe \;\; \lambda \in R \;\; tal \;\; que \;\; \left(A-\lambda I\right)^2 = B}}$$

****

Problema A.- Sea S el sistema de ecuaciones lineales $S \equiv \begin{cases} x+2y+3z=6 \\ x+4y+9z=14 \\ x+8y+Az=\frac{10}{7}A \end{cases}$.

Estudiar la compatibilidad del sistema en función de A. Resolver para A = 0.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & A \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 14 \\ 1 & 8 & A & \frac{10}{7}A \end{pmatrix}$$

El rango de M en función del parámetro A es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & A \end{vmatrix}=4A+24+18-12-72-2A=2A+42-84=2A-42=0 \;\Rightarrow\; \underline{A=21}$$

$$\underline{\underline{Para\;\; A\neq 21 \;\Rightarrow\; Rango\; M=Rango\; M'=3=n^{\circ}\; incógnitas \Rightarrow Compatible\; determinado}}$$

$$\underline{Para\;\; A=21} \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 14 \\ 1 & 8 & 21 & 30 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \{C_1+C_2+C_3=C_4\} \;\Rightarrow\; \underline{Rango\;\; M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\;\; A=21 \;\Rightarrow\; Rango\; M=Rango\; M'=2<n^{\circ}\; incóg. \Rightarrow Compatible\; Indeterminado}}$$

Resolvemos para A = 0.

El sistema resulta: $S \equiv \begin{cases} x+2y+3z=6 \\ x+4y+9z=14 \\ x+8y=0 \quad \rightarrow \underline{x=-8y} \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -8y+2y+3z=6 \\ -8y+4y+9z=14 \end{matrix}\right\}$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -6y+3z=6 \\ -4y+9z=14 \end{matrix}\right\} \;\; \left.\begin{matrix} -2y+z=2 \\ -4y+9z=14 \end{matrix}\right\} \;\; \left.\begin{matrix} 4y-2z=-4 \\ -4y+9z=14 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 7z=10 \;\;;;\;\; \underline{\underline{z=\frac{10}{7}}}$$

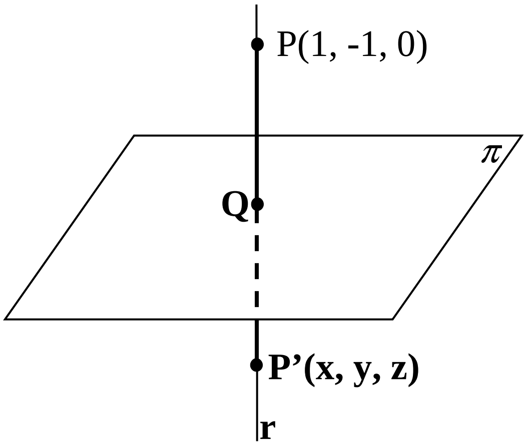
$$-2y+z=2 \;\;;;\;\; 2y=z-2=\frac{10}{7}-2=-\frac{4}{7} \;\;;;\;\; \underline{\underline{y=-\frac{2}{7}}} \;\;;;\;\; \underline{\underline{x=\frac{16}{7}}}$$

7

****

BLOQUE B

Cuestión B.- Sea el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$, y sea P(1, -1, 0). Hallar el punto P', simétrico de P con respecto a π, explicando el proceso para dicho cálculo.



Un vector normal al plano π es:

$$\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ 1)$$

La recta r es la que pasa por el punto P y es perpendicular al plano, por lo tanto su vector director pude ser el normal del plano, y entonces:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Los puntos de r tienen por expresión $Q'(1+\lambda,\ -1+\lambda,\ -\lambda)$.

El punto Q, intersección del plano π con la recta r, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x + y + z = 1 \\ Q'(1+\lambda,\ -1+\lambda,\ -\lambda) \end{array}\right\} \Rightarrow\ (1+\lambda) + (-1+\lambda) + (-3\lambda) = 1\ ;;\ 1 + \lambda - 1 + \lambda - 3\lambda = 1\ ;;$$

$$-\lambda = 1\ ;;\ \underline{\lambda = -1}\ \ \Rightarrow\ \ \underline{Q(0,\ -2,\ 1)}$$

Para que P' sea el punto simétrico de P con respecto a π, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'}\ \Rightarrow\ Q - P = P' - Q\ ;;\ (0,\ -2,\ 1) - (1,\ -1,\ 0) = (x,\ y,\ z) - (0,\ -2,\ 1)\ ;;$$

$$(-1,\ -1,\ 1) = (x - 0,\ y + 2,\ z - 1)\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 0 = -1\ \ \rightarrow\ \underline{x = -1} \\ y + 2 = -1\ \ \rightarrow\ \underline{y = -3} \\ z - 1 = 1\ \rightarrow\ \underline{z = 2} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \ \underline{\underline{P'(-1,\ -3,\ 2)}}$$

****

Problema B.- Sean los puntos del espacio P(1, 2, 2) y Q(2, a, a). Hallar el valor de a para que la recta r que pasa por P y Q pase por el origen de coordenadas. Hallar la ecuación de la recta r como intersección de dos planos y en forma de paramétricas.

Existen diversas formas de resolver este ejercicio; una de ellas es la siguiente:

Si la recta r pasa por el origen de coordenadas tiene como vector director el de origen O y extremo P: $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP} = (1,\ 2,\ 2)$.

La recta r por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}$.

El punto Q(2, a, a), por pertenecer a r, tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \\ Q(2,\ a,\ a) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} 1 + \lambda = 2 \\ 2 + 2\lambda = a \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{\lambda = 1}\ ;;\ \underline{\underline{a = 4}}$$

Para expresar la recta r como intersección de dos planos, en principio la expresamos por unas ecuaciones continuas: $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$.

De la expresión anterior se deduce que: $r \equiv \begin{cases} 2x - 2 = y - 2 \\ y - 2 = z - 2 \end{cases}$, o mejor expresada:

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}}}$$

****

BLOQUE C

Cuestión C.- Sea $f(x) = x^3 + 2x - 1$ y el intervalo $I = [0,\ 2]$. Enunciar el Teorema del Valor Medio y aplicarlo a la función f en el intervalo I, hallando el punto de dicho intervalo para el cual se verifica el resultado del teorema.

El Teorema del Valor Medio o de Lagrange, que dice: “Si f es una función continua en [a, b] y derivable en (a, b), entonces existe al menos un punto $c \in (a,\ b)$ que cumple: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$”.

La función $f(x) = x^3 + 2x - 1$ es continua y derivable en su dominio, que es R, por lo que le es aplicable el Teorema de Valor Medio a cualquier intervalo finito que se considere.

Aplicando el teorema al intervalo $I = [0,\ 2]$ es:

$$f'(x) = 3x^2 + 2$$

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{(2^3 + 2 \cdot 2 - 1) - (0 + 0 - 1)}{2} = \frac{8 + 4 - 1 + 1}{2} = \frac{12}{2} = 6 \ \Rightarrow$$

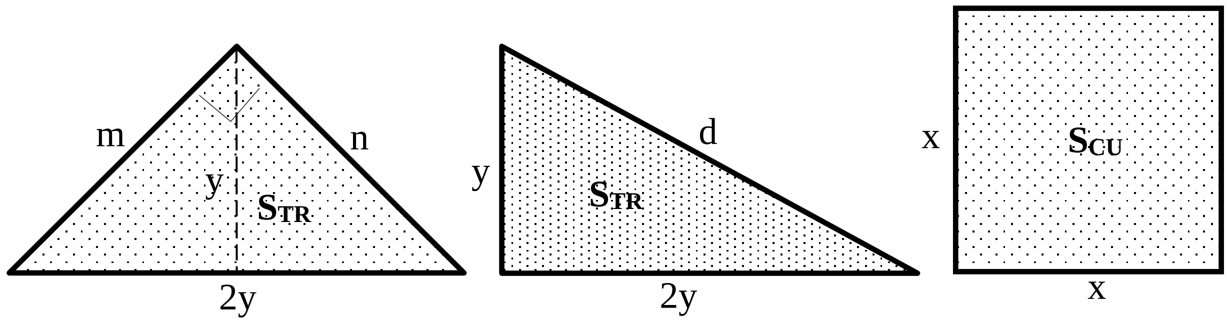
$$\Rightarrow \ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ \Rightarrow \ 3c^2 + 2 = 6 \ ;; \ 3c^2 = 4 \ ;; \ c^2 = \frac{4}{3} \ ;; \ c = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

Considerando el valor positivo resulta:

$$c = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3} = c \in I = [0,\ 2]}}$$

****

Problema C.- Un trozo de alambre de longitud 20 m se divide en dos trozos. Con el primero se forma un triángulo rectángulo cuya base es el doble de su altura y con el segundo se forma un cuadrado. Encontrar las longitudes de dichos trozos para que sea mínima la suma del área del rectángulo y la del cuadrado.



En primer lugar se hace constar que los triángulos rectángulos que satisfacen las condiciones del problema son las dos indicadas en la figura, que tienen el mismo área por tener iguales sus bases y sus alturas. Sin embargo sus perímetros no son iguales, por lo cual es indispensable para el problema que se elija aquél que tenga el mayor perímetro, con lo cual, quedará menos trozo para construir el cuadrado y, en consecuencia, la suma de las áreas pedidas será mínima, como se nos pide.

El perímetro del primero de los triángulos es el siguiente:

El área del triángulo es $S_{TR} = \dfrac{2y \cdot y}{2} = y^2$; teniendo en cuenta que el triángulo es rectángulo, también su área es $S_{TR} = \dfrac{m \cdot n}{2}$, de donde se deduce que $m \cdot n = 2y^2$. (1)

Por otra parte, aplicando el Teorema de Pitágoras: $4y^2 = m^2 + n^2$. (2)

De (1) y (2): $2m \cdot n = m^2 + n^2$;; $m^2 + n^2 - 2mn = 0$;; $(m-n)^2 = 0 \Rightarrow \underline{m = n}$

Lo anterior nos permite expresar los lados iguales del triángulo rectángulo en función del valor de y, aplicando de nuevo el Teorema de Pitágoras a uno de los dos triángulos rectángulos que la altura divide al triángulo considerado al principio:

$$n^2 = y^2 + y^2 = 2y^2 \Rightarrow \underline{n = m = \sqrt{2}\, y}$$

El perímetro del triángulo es:

$$P_1 = 2y + m + n = 2y + \sqrt{2}\, y + \sqrt{2}\, y = \underline{2\left(1 + \sqrt{2}\right)y = P_1}.$$

El perímetro del segundo triángulo es:

$$P_2 = y + 2y + \sqrt{y^2 + 4y^2} = 3y + \sqrt{5y^2} = 3y + y\sqrt{5} = \underline{\left(3 + \sqrt{5}\right)y = P_2}$$

Para determinar el que tiene el perímetro mayor, basta comparar las expresiones $2\left(1+\sqrt{2}\right)$ y $3+\sqrt{5}$:

$$2+2\sqrt{2} \approx 3+\sqrt{5} \;\;;;\;\; 2+\sqrt{8} \approx 3+\sqrt{5} \;\;;;\;\; 2+2'\cdots \approx 3+2'\cdots \Rightarrow \underline{2\left(1+\sqrt{2}\right)<3+\sqrt{5}}$$

Lo anterior implica que la solución tiene que hacerse con el segundo triángulo.

Teniendo en cuenta que la suma de los perímetros del triángulo y del cuadrado suman 20 m y que la diagonal del triángulo es $d=\sqrt{5}\,y$, es:

$$\left(3+\sqrt{5}\right)y+4x=20 \;\Rightarrow\; \underline{x=\frac{20-\left(3+\sqrt{5}\right)y}{4}}.$$

La superficie total es: $S=S_{TR}+S_{CU}=\frac{2y\cdot y}{2}+x^2=y^2+x^2$.

$$S=y^2+\left[\frac{20-\left(3+\sqrt{5}\right)y}{4}\right]^2=y^2+\frac{400-40\left(3+\sqrt{5}\right)y+\left(3+\sqrt{5}\right)^2y^2}{16}=$$

$$=\frac{16y^2+400-40\left(3+\sqrt{5}\right)y+\left(9+6\sqrt{5}+5\right)y^2}{16}=\frac{\left(30+6\sqrt{5}\right)y^2-40\left(3+\sqrt{5}\right)y+400}{16}=$$

$$=\frac{6\left(5+\sqrt{5}\right)y^2-40\left(3+\sqrt{5}\right)y+400}{16}=\underline{\frac{1}{8}\left[3\left(5+\sqrt{5}\right)y^2-20\left(3+\sqrt{5}\right)y+200\right]=S}$$

Para que la superficie sea mínima, su derivada tiene que ser cero:

$$S'=\frac{1}{8}\left[6\left(5+\sqrt{5}\right)y-20\left(3+\sqrt{5}\right)\right]=0 \;\Rightarrow\; 6\left(5+\sqrt{5}\right)y-20\left(3+\sqrt{5}\right)=0 \;\;;;\;\; y=\frac{10\left(3+\sqrt{5}\right)}{3\left(5+\sqrt{5}\right)}=$$

$$=\frac{10\left(3+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}{3\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)}=\frac{10\left(15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5\right)}{3\left(25-5\right)}=\frac{10\left(10+2\sqrt{5}\right)}{3\cdot 20}=\frac{10+2\sqrt{5}}{6}=\underline{\underline{\frac{5+\sqrt{5}}{3}\;m=y}}$$

$$x=\frac{20-\left(3+\sqrt{5}\right)y}{4}=\frac{20-\left(3+\sqrt{5}\right)\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{3}}{4}=\frac{60-\left(15+3\sqrt{5}+5\sqrt{5}+5\right)}{12}=\frac{60-\left(20+8\sqrt{5}\right)}{12}=$$

$$=\frac{40-8\sqrt{5}}{12}=\underline{\underline{\frac{10-2\sqrt{5}}{3}\;metros=x}}$$

****

BLOQUE D

Cuestión D.- Calcular la integral indefinida $I=\int \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}\cdot dx$.

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & +x^2 & & +1 & x^2-1 \\ \cline{5-5} -x^3 & & +x & & x+1 \\ \cline{1-4} 0 & +x^2 & +x & +1 & \\ & -x^2 & & +1 & \\ \cline{2-4} & 0 & +x & +2 & \end{array}$$

$$I=\int \frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}\cdot dx=\int\left(x+1+\frac{x+2}{x^2-1}\right)\cdot dx=\frac{x^2}{2}+x+\int\frac{x+2}{x^2-1}\cdot dx=\underline{\frac{x^2}{2}+x+I_1=I} \qquad (*)$$

Para resolver la integral I_1 descomponemos factorialmente el denominador:

$$I_1=\int\frac{x+2}{x^2-1}\cdot dx=\int\frac{x+2}{(x+1)(x-1)}\cdot dx=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}\right)\cdot dx=\int\frac{Ax-A+Bx+B}{(x+1)(x-1)}\cdot dx=$$

$$=\int\frac{(A+B)x+(-A+B)}{x^2-1}\cdot dx \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A+B=1 \\ -A+B=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2B=3 \;;;\; \underline{B=\frac{3}{2}} \;;;\; \underline{A=-\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1=\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{3}{2}}{x-1}\right)\cdot dx=-\frac{1}{2}L|x+1|+\frac{3}{2}L|x-1|=\frac{1}{2}\left(L\,\frac{3\,|x-1|}{|x+1|}\right)=\underline{L\sqrt{\frac{|x-1|^3}{|x+1|}}=I_1}$$

Sustituyendo el valor de I_1 en la expresión (*), queda finalmente:

$$\underline{\underline{I=\frac{x^2}{2}+x+L\sqrt{\frac{|x-1|^3}{|x+1|}}=I_1+C}}$$

****

Problema D.- La parábola $y = 4 - x^2$, su recta tangente en x = 1 y el eje OY limitan un recinto finito en el plano. Dibujar un esquema de dicho recinto y hallar su área mediante cálculo integral.

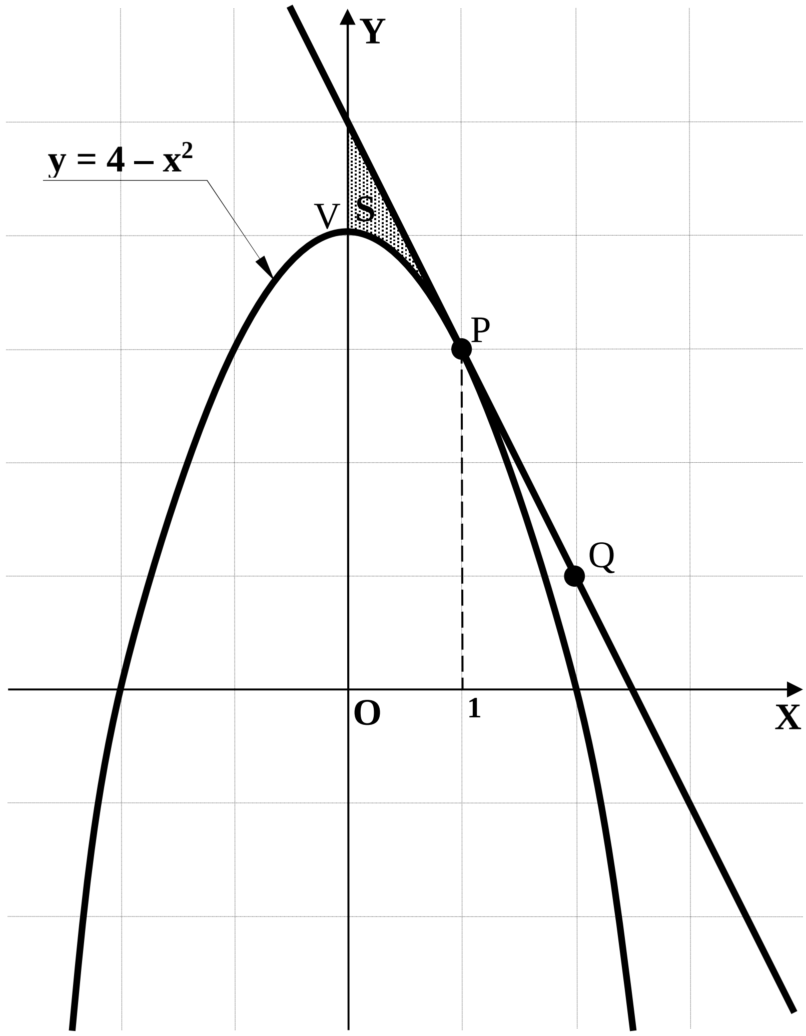
El punto de tangencia para x = y es P(1, 3) y la recta tangente tiene por pendiente el valor de la derivada en el punto de tangencia:

$$y' = -2x \ \ ;; \ \ m = y'_{(1)} = -2 \cdot 1 = \underline{-2 = m}.$$

Conociendo la pendiente y el punto de tangencia, la recta tangente es:

$$t \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = -2(x - 1) = -2x + 2 \ \ ;; \ \ \underline{t \equiv y = -2x + 5}$$

Otro punto de la recta tangente, por ejemplo para x = 2, es Q(2, 1).



La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que indica la figura, donde se sombrea la superficie pedida, cuyo valor es el siguiente, teniendo en cuenta que las ordenadas de la recta son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función en el intervalo correspondiente a la superficie a calcular:

$$S=\int_0^1\left[\left(-2x+5\right)-\left(4-x^2\right)\right]\cdot dx=\int_0^1\left(x^2-2x+1\right)\cdot dx=\left[\frac{x^3}{3}-2\cdot\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^1=\frac{1}{3}-1+1=\underline{\underline{\frac{1}{3}\,u^2=S}}$$

****

BLOQUE E

Cuestión E.- Un coleccionista decide regalar un montón de sellos. A cada persona con la que se encuentra le da la mitad de los sellos que llevaba más uno, y se encuentra exactamente con seis personas. Si al final regala todos los sellos, ¿cuántos sellos tenía el coleccionista?

Sea x el número de sellos que llevaba el coleccionista al salir de su casa.

A la primera persona le regaló los siguientes sellos: $n_1 = \frac{x}{2} + 1 = \underline{\frac{x+2}{2} = n_1}$.

El número de sellos que le restan es: $x - \frac{x+2}{2} = \frac{2x - x - 2}{2} = \underline{\frac{x-2}{2}}$.

A la segunda persona le regaló los siguientes sellos:

$$n_2 = \frac{\frac{x-2}{2}}{2} + 1 = \frac{x-2}{4} + 1 = \frac{x-2+4}{4} = \underline{\frac{x+2}{4} = n_2}.$$

El número de sellos que le restan es:

$$x - \frac{x+2}{2} - \frac{x+2}{4} = \frac{4x - 2(x+2) - (x+2)}{4} = \frac{4x - 2x - 4 - x - 2}{4} = \underline{\frac{x-6}{4}}.$$

A la tercera persona le regaló los siguientes sellos:

$$n_3 = \frac{\frac{x-6}{4}}{2} + 1 = \frac{x-6}{8} + 1 = \frac{x-6+8}{8} = \underline{\frac{x+2}{8} = n_2}.$$

De lo anterior se deduce que los sellos que se lleva cada una de las sucesivas personas constituye una sucesión (progresión) geométrica decreciente de las siguientes características: $\begin{cases} \text{Primer término} \rightarrow a_1 = \frac{x+2}{2} \\ \text{Número de términos} \rightarrow n = 6 \\ \text{Razón} \rightarrow r = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Con los datos anteriores y sabiendo que el término general es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, el último término (sexto) es: $a_6 = \frac{x+2}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 (x+2) = \underline{\frac{1}{64}(x+2) = a_6}$.

Sabiendo que la suma de los términos de una progresión geométrica viene dada por la fórmula $S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$, el número de sellos pedidos es:

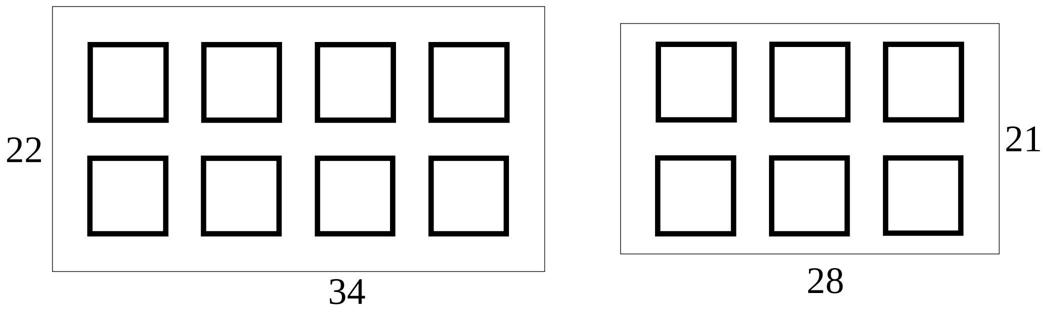
$$x = \frac{a_6 \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{\frac{1}{64}(x+2)\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x+2)}{\frac{1}{2}-1} = \frac{\frac{1}{2}(x+2)\left(\frac{1}{64}-1\right)}{-\frac{1}{2}} = -\frac{1-64}{64}(x+2) = \frac{63}{64}x \ ;;$$

$$64x = 63(x+2) \ ;; \ 64x = 63x + 126 \ ;; \ \underline{x = 126}$$

<u>El coleccionista tenía 126 sellos.</u>

****

Problema E.- Una empresa debe realizar un trabajo de publicidad consistente en imprimir 3000 panfletos cuadrados de 8 cm de lado. El trabajo debe hacerse o bien con hojas de tipo A cuyas dimensiones son 22 cm por 34 cm o bien con hojas del tipo B cuyas dimensiones son 21 cm por 28 cm. Decidir el tamaño de hojas que conviene emplear para desperdiciar la menor cantidad de papel posible.



La situación de cada uno de los dos tipos de hojas se refleja en la figura, donde se observa que en el primer papel se pueden obtener 8 panfletos por cada hoja y en el segundo se pueden obtener panfletos por cada hoja.

El desperdicio en cada una de las hojas del primer papel es el siguiente:

$$D_1 = 34 \cdot 22 - 8 \cdot 8^2 = 748 - 512 = 226\ cm^2.$$

El número de hojas del primer tipo que se necesitan es $n_1 = \dfrac{3000}{8} = \underline{375\ hojas = n_1}$.

El desperdicio de papel es: $D_{1T} = 226 \cdot 375 = \underline{84.750\ cm^2 = D_{1T}}$.

El desperdicio en cada una de las hojas del segundo papel es el siguiente:

$$D_2 = 28 \cdot 21 - 6 \cdot 8^2 = 588 - 384 = 204\ cm^2.$$

El número de hojas del 2º tipo que se necesitan es $n_2 = \dfrac{3000}{6} = \underline{500\ hojas = n_2}$.

El desperdicio de papel es: $D_{2T} = 204 \cdot 500 = \underline{102.000\ cm^2 = D_{2T}}$.

Conviene utilizar el papel de 22 por 34 cm.

****