PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JUNIO – 2006

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Nota: En cada bloque debe contestarse la cuestión o el problema. Cada uno de los ejercicios será valorado entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Para cada número natural n, hallar A^n. Calcular $A^{22} - 12A^2 + 2A$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & \alpha+\alpha \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^2}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & \alpha+2\alpha \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 3\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^3}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & \alpha+3\alpha \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 4\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A^4}$$

De lo anterior se deduce que $\underline{\underline{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$

$$A^{22} - 12A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 22\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 12 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 22\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 & -24\alpha \\ 0 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2\alpha \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} = -9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -9I$$

$$\underline{\underline{A^{22} - 12A^2 + 2A = -9I}}$$

****

Problema A.- Se considera el sistema $S \equiv \begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2x+3y+4z=9 \\ 3x+4y+mz=2(m+1) \end{cases}$, ¿existe algún valor de m para el cual el sistema sea compatible indeterminado? En caso negativo razonar la respuesta. Si la respuesta es positiva, hallar la solución del sistema en ese caso.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & m \end{pmatrix} \quad y \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 3 & 4 & m & 2(m+1) \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de m es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & m \end{vmatrix} = 3m+24+24-27-16-4m = -m+5 = 0 \;;;\; \underline{m=5}$$

$$\underline{Para \;\; m \neq 5 \Rightarrow Rango \;\; M = Rango \;\; M' = 3 = n^{o} \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; Determinado}$$

$$Para \;\; m=5 \;\Rightarrow\; M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 + C_2 + C_3 = C_4\} \Rightarrow \underline{Rango \;\; M' = 2}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; m=5 \Rightarrow Rango \;\; M = Rango \;\; M' = 2 < n^{o} \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; Indeterminado}}$$

Para m = 5 el sistema resulta $S \equiv \begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2x+3y+4z=9 \\ 3x+4y+5z=12 \end{cases}$. Despreciando una de las ecuaciones (tercera) y parametrizando una de las incógnitas (z), resulta:

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2x+3y+4z=9 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x+2y &= 6-3\lambda \\ 2x+3y &= 9-4\lambda \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 2x+4y &= 12-6\lambda \\ -2x-3y &= -9+4\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{y = 3-2\lambda} \;;;\; x = 6-3\lambda-2y = 6-3\lambda-6+4\lambda = \underline{\lambda = x}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=\lambda \\ y=3-2\lambda, \quad \forall \lambda \in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

BLOQUE B

Cuestión B.- Sean los puntos P(0, 0, 0) y Q(0, 1, 2). Encontrar la condición que debe cumplir un punto de coordenadas A(x, y, z) para que la distancia desde A hasta P sea igual que la distancia desde A hasta Q. ¿El conjunto de todos los puntos que satisfacen esa condición, forma un plano? Razonar la contestación.

El conjunto de todos los puntos que satisfacen la condición dada es un lugar geométrico; exactamente es el plano π, perpendicular al segmento $\overline{PQ}$ que contiene a su punto medio.

La ecuación general del plano π se obtiene de la condición dada:

$$\overline{PA}=\overline{QA} \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2+(z-2)^2} \;;;$$

$$x^2+y^2+z^2=x^2+(y-1)^2+(z-2)^2 \;;;\; y^2+z^2=y^2-2y+1+z^2-4z+4 \;;;$$

$$0=-2y-4z+5 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv 2y+4z-5=0}}$$

A título de comprobación, vamos a determinar la ecuación del plano de la forma que la hemos definido en la respuesta:

El punto medio del segmento $\overline{PQ}$ es $M\left(0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)$.

La recta que contiene al segmento $\overline{PQ}$ tiene como vector director a $\overrightarrow{v}=(0,\ 1,\ 2)$.

El plano que buscamos, por ser perpendicular a la recta que contiene al segmento $\overline{PQ}$ tiene como vector normal al vector director de la recta, o sea: $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{v}=(0,\ 1,\ 2)$.

La ecuación general del plano π es $\pi \equiv y+2z+D=0$. Para determinar el valor del término independiente D tenemos en cuenta que el plano π contiene al punto M:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv y+2z+D=0 \\ M\left(0,\ \frac{1}{2},\ 1\right)\end{array}\right\} \Rightarrow 1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot 1+D=0 \;;;\; D=-\frac{1}{2}-2=\underline{-\frac{5}{2}=D}$$

$$\pi \equiv y+2z-\frac{5}{2}=0 \;;;\; \underline{\underline{\pi \equiv 2y+4z-5=0}} \quad \text{(mismo resultado, como cabía esperar)}$$

****

Problema B.- Calcular unas ecuaciones paramétricas de la recta $r \equiv \begin{cases} x-y-z=1 \\ x+y+3z=2 \end{cases}$.

¿Existe algún valor de v tal que el punto $P(v,\ v,\ v-1)$ pertenezca a la recta r? Razonar la respuesta, calculando el valor de v en caso de que sea afirmativa.

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x-y-z=1 \\ x+y+3z=2 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-y=1+\lambda \\ x+y=2-3\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x=3-2\lambda\ ;;\ \underline{x=\frac{3}{2}-\lambda}$$

$$y=x-1-\lambda=\frac{3}{2}-\lambda-1-\lambda=\underline{\frac{1}{2}-2\lambda=y} \Rightarrow \underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x=\frac{3}{2}-\lambda \\ y=\frac{1}{2}-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

Un punto genérico de la recta r es $Q\left(\frac{3}{2}-\lambda,\ \frac{1}{2}-2\lambda,\ 2\lambda\right)$, por lo cual, para que el punto $P(v,\ v,\ v-1)$ pertenezca a la recta r tiene que cumplirse lo siguiente:

Por ser iguales las dos primeras componentes tiene que ser $\frac{3}{2}-\lambda=\frac{1}{2}-2\lambda$, de donde se obtiene el valor de λ que satisface la igualdad:

$$\frac{3}{2}-\lambda=\frac{1}{2}-2\lambda\ ;;\ 3-2\lambda=1-4\lambda\ ;;\ 2=-2\lambda\ ;;\ \underline{\lambda=-1}.$$

El valor de v para $\lambda=-1$ es: $v=\frac{3}{2}-(-1)=\frac{3}{2}+1=\underline{\frac{5}{2}=v}$.

Veamos si se satisface para estos valores la tercera componente de P:

$$v-1=2\lambda \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \lambda=-1 \\ v=\frac{5}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{5}{2}-1=2\cdot(-1)\ ;;\ \frac{3}{2}=-2\ ??? \Rightarrow \underline{\underline{P \notin r}}$$

****

BLOQUE C

Cuestión C.- Se sabe que una función f(x) es derivable en todos los puntos y además se sabe que f(1) = 0 y que f'(1) = 2. Se considera la función $h(x)=e^{f(x)}+x^2 f(x)+[f(x)]^2$. Calcular razonadamente h'(1).

$$h'(x)=f'(x)\cdot e^{f(x)}+2x\cdot f(x)+x^2\cdot f'(x)+2\cdot f(x)\cdot f'(x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad h'(1)=f'(1)\cdot e^{f(1)}+2\cdot 1\cdot f(1)+1^2\cdot f'(1)+2\cdot f(1)\cdot f'(1) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} f(1)=0 \\ \\ f'(1)=2 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad h'(1)=2\cdot e^2+2\cdot 0+0+2\cdot 0\cdot 2=\underline{\underline{2e^2=h'(1)}}$$

****

Problema C.- Sea la función $f(x) = x + x \cdot e^{-x}$. Calcular la ecuación de la recta tangente a f(x) en un punto x para el cual dicha recta tangente sea paralela a la recta que pasa por los puntos A(1, 1) y B(3, 3).

La ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B tiene como vector director a $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3,\ 3) - (1,\ 1) = (2,\ 2)$, cuya pendiente es $m = \frac{2}{2} = \underline{1 = m}$.

La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente en ese punto, por lo cual:

$$f'(x) = 1 + 1 \cdot e^{-x} - x \cdot e^{-x} = 1 + e^{-x} - x \cdot e^{-x} = m = 1 \ ;;\ e^{-x} - x \cdot e^{-x} = 0 \ ;;\ e^{-x}(1 - x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x = 1} \ ;;\ f(1) = 1 + 1 \cdot e^{-1} = 1 + \frac{1}{e} = \frac{1+e}{e} \quad \Rightarrow \quad \underline{P\left(1,\ \frac{1+e}{e}\right)}$$

Sabiendo que la recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - \frac{1+e}{e} = 1 \cdot (x - 1) \ ;;\ y - \frac{1+e}{e} = x - 1 \ ;;\ ey - 1 - e = ex - e \ \Rightarrow\ \underline{\underline{t \equiv ex - ey + 1 = 0}}$$

****

BLOQUE D

Cuestión D.- Calcular el valor de la integral indefinida $I = \int_1^2 \frac{x^2+1}{x(x+1)} \cdot dx$.

$$I = \int_1^2 \frac{x^2+1}{x(x+1)} \cdot dx = \int_1^2 \frac{x^2+x-x+1}{x^2+x} \cdot dx = \int_1^2 \frac{x^2+x}{x^2+x} \cdot dx + \int_1^2 \frac{1-x}{x(x+1)} \cdot dx =$$

$$= \int_1^2 dx + \int_1^2 \frac{1-x}{x(x+1)} \cdot dx = [x]_1^2 + I_1 = 2 - 1 + I_1 = \underline{1 + I_1 = I} \qquad (*)$$

$$I_1 = \int_1^2 \frac{1-x}{x(x+1)} \cdot dx = \int_1^2 \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \right) \cdot dx = \int_1^2 \frac{Ax + A + Bx}{x(x+1)} \cdot dx = \int_1^2 \frac{A + (A+B)x}{x(x+1)} \cdot dx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{A=1} \\ A+B=-1 \end{array} \right\| \rightarrow \underline{B=-2} \right\} \;\Rightarrow\; I_1 = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} \right) \cdot dx = \left[L|x| - 2L|x+1| \right]_1^2 =$$

$$= (L2 - 2L3) - (L1 - 2L2) = L2 - 2L3 - 0 + 2L2 = 3L2 - 2L3 = L8 - L9 = \underline{L\frac{8}{9} = I_1}$$

Sustituyendo el valor de I_1 en la expresión (*):

$$\underline{\underline{I = \left(1 + L\frac{8}{9}\right) u^2}}$$

****

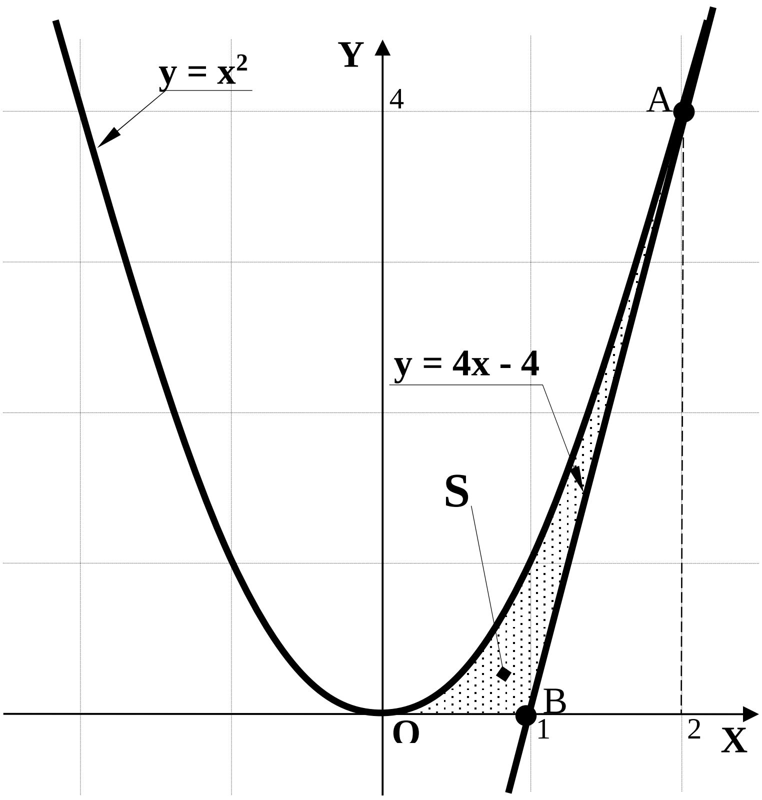
Problema D.- La curva $y = x^2$, su recta tangente en el punto x = 2 y el eje OX limitan en el primer cuadrante un recinto finito del plano. Dibujar un esquema gráfico de dicho recinto y calcular su área.

El punto de tangencia es A(2, 4).

La pendiente de una curva en un punto es el valor de la derivada de la curva en ese punto: $y' = 2x$;; $m = y'(2) = 4$.

La ecuación de la recta tangente es: $y - 4 = 4(x - 2)$;; $\underline{y = 4x - 4}$. El punto de corte de la tangente con el eje de abscisas es B(1, 0).

La representación gráfica de la situación es la que indica la figura.



De la observación de la figura se deduce el área pedida, que es la siguiente:

$$S = \int_0^2 x^2 \cdot dx - \int_1^2 (4x - 4) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 - \left[2x^2 - 4x\right]_1^2 = \frac{8}{3} - 0 - [(8 - 8) - (2 - 4)] = \frac{8}{3} - 2 =$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{3}\ u^2 = S}}$$

****

BLOQUE E

Cuestión E.- Si la base de un triángulo aumenta un 10 % y la altura disminuye un 10 %. ¿Variará el área del triángulo original?, en caso afirmativo señalar el porcentaje de aumento o disminución.

Sea el área del triángulo $S = \frac{b \cdot h}{2}$; si la base del triángulo aumenta en un 10 % se trasforma en $b' = 1'1b$ y si la altura disminuye en un 10 % se transforma en $h' = 0'9h$, con lo cual el área del nuevo triángulo es:

$$S' = \frac{b' \cdot h'}{2} = \frac{1'1b \cdot 0'9h}{2} = 0'99 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = \underline{\underline{0'99 \cdot S = S'}}$$

Como se ha demostrado

El área sufre una variación decreciente del uno por ciento.

****

Problema E.- Por la venta de una partida de sellos, todos del mismo valor, un señor obtuvo 5’27 euros. El precio de cada sello es inferior a veinte céntimos. ¿Cuántos sellos vendió? ¿Cuál es el valor de cada sello?

Supongamos que es n el número de sellos de la partida y x es el precio de cada sello.

Necesariamente tiene que ser $n \cdot x = 5'27 \;\; euros = 527 \;\; céntimos \;\; de \;\; euros$.

Descomponiendo factorialmente el número 527, resulta ser: 527 = 17 · 31, de donde se deduce por las condiciones impuestas por el ejercicio que:

El número de sellos es de 31 y su valor es de 17 céntimos.

****