PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

JUNIO – 2004

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Nota: Deberán contestarse la cuestión o el problema de cada uno de los bloques A, B, C, D y E. Cada uno de los ejercicios será valorado entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A.- Para cada a se considera la matriz $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Encontrar el rango de la matriz $A^2(a)-A^T(a)$ en función del valor de a.

Se recuerda que $A^2(a)$ es la matriz multiplicada por sí misma y $A^T(a)$ es la matriz traspuesta.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+0+0 & a+a+0 & 1+a^2+1\\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+a+a\\ 0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2a & a^2+1\\ 0 & 1 & 2a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$$

$$A^2(a)-A^T(a) = \begin{pmatrix}1 & 2a & a^2+1\\ 0 & 1 & 2a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ a & 1 & 0\\ 1 & a & 1\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}0 & 2a & a^2+1\\ -a & 0 & 2a\\ -1 & -a & 0\end{pmatrix} = A^2(a)-A^T(a)}$$

$$\begin{vmatrix}0 & 2a & a^2+1\\ -a & 0 & 2a\\ -1 & -a & 0\end{vmatrix} = a^2\left(a^2+1\right)-4a^2 = a^2\left(a^2-3\right)=0 \Rightarrow \begin{cases}a_1=0\\ a_2=\sqrt{3}\\ a_3=-\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\underline{\underline{Para \ \left\{\begin{matrix} a \neq 0 \\ a \neq \sqrt{3} \\ a \neq -\sqrt{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rango \ \ de \ \ A^2 - A^T = 3}}$$

$$\underline{a = 0} \Rightarrow A^2 - A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{Para \ \ a = 0 \ \Rightarrow \ Rango \ \ de \ \ A^2 - A^T = 1}}$$

$$\underline{a = \sqrt{3}} \Rightarrow A^2 - A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} & 4 \\ -\sqrt{3} & 0 & 2\sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{Para \ \ a = \sqrt{3} \ \Rightarrow \ Rango \ \ de \ \ A^2 - A^T = 2}}$$

$$\underline{a = -\sqrt{3}} \Rightarrow A^2 - A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} & 4 \\ \sqrt{3} & 0 & -2\sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{Para \ \ a = -\sqrt{3} \ \Rightarrow \ Rango \ \ de \ \ A^2 - A^T = 2}}$$

****

Problema A.- Dado el sistema $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y=0 \\ 3x+2y+az=2a \end{cases}$, demostrar que es compatible para todos los valores de a. Resolverlo en los casos en que sea compatible indeterminado.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a \end{pmatrix} \;;;\; M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & a & 2a \end{pmatrix}$$

Como puede observarse en la matriz de coeficientes, las columnas tercera y cuarta son linealmente dependientes, por lo tanto su rango es igual que la matriz de coeficientes, independientemente del valor de a, lo cual significa que

$$\underline{\underline{El\ \ sistema\ \ es\ \ compatible\ \ \forall a \in R,\ \ c.q.d.}}$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix} = a+4-3-2a = 1-a = 0 \;;;\; \underline{a=1}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a \neq 1 \Rightarrow Rango\ \ M = Rango\ \ M' = 3 = n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow\ Compatible\ \ Determinado}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a = 1 \Rightarrow Rango\ \ M = Rango\ \ M' = 2 < n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow\ Compatible\ \ Indeterminado}}$$

Resolvemos para x =1: (despreciamos la tercera ecuación y parametrizamos z)

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \;;;\; \left.\begin{array}{r} x+y=-\lambda+2 \\ 2x+y=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-y=\lambda-2 \\ 2x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x=\lambda-2}$$

$$2x+y=0 \;;;\; y=-2x=\underline{-2\lambda+4=y}$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=\lambda-2 \\ y=-2\lambda+4 \quad \forall \lambda \in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

BLOQUE B

Cuestión B.- Sean A(0, 1, 2) y B(1, 2, 3). Encontrar la ecuación de la recta r que pasa por dichos puntos y expresarla por unas ecuaciones paramétricas. ¿Existen valores de a y b para los cuales el punto $C(3,\ a+b,\ a-b)$ pertenezca a la recta r. En caso afirmativo, calcular los valores de a y b. Razonar la contestación en caso negativo.

El vector $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(1,\ 2,\ 3)-(0,\ 1,\ 2)=(1,\ 1,\ 1)$ es un vector director de la recta r, por tanto unas ecuaciones paramétricas pueden ser, considerando el punto A:

$$\underline{\underline{r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\ y=1+\lambda \quad \forall\lambda\in R\\ z=2+\lambda\end{cases}}}$$

Para que la recta pase por el punto C es necesario que el vector $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$ sea linealmente dependiente a $\overrightarrow{u}$.

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}=C-A=(3,\ a+b,\ a-b)-(0,\ 1,\ 2)=(3,\ a+b-1,\ a-b-2)$$

$$\frac{3}{1}=\frac{a+b-1}{1}=\frac{a-b-2}{1}\Rightarrow \left.\begin{matrix}a+b-1=3\\ a-b-2=3\end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix}a+b=4\\ a-b=5\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2a=9\ ;;\ \underline{\underline{a=\frac{9}{2}}}$$

$$a-b=5\ ;;\ b=a-5=\frac{9}{2}-5=\frac{9-10}{2}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}=b}}$$

Como puede observarse, existen los valores obtenidos de a y b para los cuales la recta r pasa por el punto C.

****

Problema B.- Sea la recta r que pasa por el punto P(0, 1, 0) y que tiene como vector director a $\overrightarrow{v}=(1,\ 1,\ -1)$. Se considera también el plano $\pi \equiv -x+2y+z+A=0$. Estudiar la posición relativa de la recta r y del plano π en función de A.

El vector normal del plano es $\overrightarrow{n}=(-1,\ 2,\ 1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{n}$ son perpendiculares ya que su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}=(1,\ 1,\ -1)\cdot(-1,\ 2,\ 1)=-1+2-1=0$$

Esto significa que la recta r es paralela al plano π o está contenida en él, en cuyo caso el punto $P\in r$ también se cumpliría que $P\in\pi$.

Si $P\in\pi$ tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv -x+2y+z+A=0\\ P(0,\ 1,\ 0)\end{array}\right\} \Rightarrow -0+2\cdot 1+0+A=0\ \ ;;\ \ \underline{A=-2}$$

$$\underline{\underline{Solución:\left\{\begin{array}{l}A=-2\Rightarrow\ \ r\ \ está\ \ contenida\ \ en\ \ \pi\\ \\ A\neq -2\Rightarrow\ \ r\ \ es\ \ paralela\ \ a\ \ \pi\end{array}\right.}}$$

****

BLOQUE C

Cuestión C.- Dada la función $f(x)=\begin{cases} sen\ x & si\ \ x\le 0 \\ x-ax^2 & si\ \ x>0 \end{cases}$. ¿Existen valores de a con los cuales f sea derivable en toda la recta real?

En cualquier caso, razonar la contestación y si es afirmativa, encontrar dichos valores.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por tanto, veamos si es continua para x = 0, que es el único punto crítico que posee la función:

Para que sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} sen\ x=\underline{0}=f(0) \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} \left(x-ax^2\right)=\underline{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)}$$

<u>La función es continua para x = 0.</u>

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} \cos x & si\ \ x\le 0 \\ \\ 1-2ax & si\ \ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'\left(0^-\right)=\underline{1} \\ \\ f'\left(0^+\right)=\underline{1} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{f(x)\ \ es\ \ derivable\ \ \forall a\in R}}$$

****

Problema C.- Del polinomio $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx$ se sabe que su recta tangente en el punto x = 1 es paralela a la recta $y = 7x - 3$ y también se sabe que tiene un punto extremo en x = -1. Con estos datos, hallar A y B y razonar si con dichos valores P(x) tiene algún otro extremo, además del correspondiente al punto x = -1.

La pendiente de la recta es m = 7, que tiene que ser igual al valor de la derivada para x = 1:

$$P'(x) = 3x^2 + 2Ax + B \;;;\; P'(1) = 3 + 2A + B = 7 \;;;\; \underline{2A + B = 4} \qquad (1)$$

Por tener un extremo para x = -1, la derivada tiene que anularse para este valor:

$$P'(-1) = 0 \;;;\; P'(-1) = 3 - 2A + B = 0 \;;;\; \underline{-2A + B = -3} \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 2A + B = 4 \\ -2A + B = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{B = \frac{1}{2}}} \;;;\; 2A + B = 4 \;;;\; A = \frac{4 - B}{2} = \frac{4 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{7}{2}}{2} = \underline{\underline{\frac{7}{4} = A}}$$

El polinomio resulta ser $\underline{P(x) = x^3 + \frac{7}{4}x^2 + \frac{1}{2}x}$. Veamos si tiene otros extremos:

$$P'(x) = 3x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{1}{2} \;;;\; P'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \;;;\; 6x^2 + 7x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{12} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{12} = \frac{-7 \pm 5}{12} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = -\frac{1}{6}} \\ \underline{x_2 = -1} \end{cases}$$

$$P''(x) = 6x + \frac{7}{2} \Rightarrow \begin{cases} P''\left(-\frac{1}{6}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{7}{2} = -1 + \frac{7}{2} = \frac{5}{2} > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Mínimo para } x = -\frac{1}{6}}} \\ P''(-1) = -6 + \frac{7}{2} = -\frac{5}{2} < 0 \Rightarrow \underline{\textit{Máxim para } x = -1, \textit{ como se sabía}} \end{cases}$$

****

BLOQUE D

Cuestión D.- Describir en qué consiste el método de integración por partes para el cálculo de primitivas. Aplicar dicho método para calcular las siguientes primitivas:

$$I = \int x \cdot e^{2x} \cdot dx \ ; \ J = \int x \cdot L\,x \cdot dx$$

El método de integración por partes está basado en la diferencial (derivada) de un producto, teniendo en cuenta que si u y v son dos funciones de x se cumple que:

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$$

Teniendo en cuenta que la integral de una suma algebraicas de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de las funciones, podemos escribir:

$$\int d(u \cdot v) = \int du \cdot v + \int u \cdot dv$$

Teniendo en cuenta que $\int d(u \cdot v) = u \cdot v$, la expresión anterior puede ponerse de la forma:

$$\underline{\underline{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}}$$

La expresión anterior es la que se conoce como la del método de integración por partes.

Aplicando la fórmula anterior podemos determinar la integral de la función dada:

$$I = \int x \cdot e^{2x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = x \rightarrow du = dx \\ e^{2x} \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} \Rightarrow I = x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} \cdot dx =$$

$$= \frac{x}{2} \cdot e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cdot dx = \frac{x}{2} \cdot e^{2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{2x} + C = \underline{\underline{\frac{e^{2x}}{4}(2x-1) + C = I}}$$

$$J = \int x \cdot L\,x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = L\,x \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ x \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow I = L\,x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot L\,x - \frac{1}{2} \int x \cdot dx = \frac{x}{2} \cdot L\,x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \underline{\underline{\frac{x}{4}(2\,L\,x - x) + C = J}}$$

****

Problema D.- La curva $y = x^2 - 2x + 1$ y la recta que pasa por los puntos $A(1,\ 0)$ y $B(3,\ 4)$ limitan un recinto finito del plano. Trazar un esquema gráfico de dicho recinto y calcular su área.

La curva puede expresarse de la forma: $y = (x-1)^2$, que tiene un mínimo en el punto M(1, 0).

Sabiendo que la recta que pasa por dos puntos es: $r \equiv \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, sería:

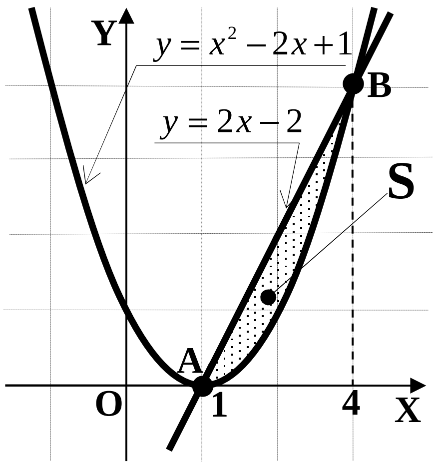
$$r \equiv \frac{y-0}{4-0} = \frac{x-1}{3-1}\ ;;\ 2y = 4x - 4\ ;;\ \underline{r \equiv y = 2x - 2}.$$

Los puntos de intersección de la curva y la recta son:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = 2x - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x - 2\ ;;\ x^2 - 4x + 3 = 0\ ;;$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \rightarrow \underline{B(3,\ 4)} \\ x_2 = 1 \rightarrow \underline{A(1,\ 0)} \end{cases}$$

La representación gráfica es, aproximadamente, la siguiente:



$$S = \int_1^3 \left[(2x-2) - (x^2 - 2x + 1)\right] \cdot dx =$$

$$= \int_1^3 (2x - 2 - x^2 + 2x - 1) \cdot dx = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_1^3 = (-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3\right) =$$

$$= 0 + \frac{1}{3} + 1 = \underline{\underline{\frac{4}{3}\ u^2 = S}}$$

****

BLOQUE E

Cuestión E.- A una velada de baile asistieron un total de 20 personas. La primera chica bailó con 7 muchachos, la segunda con 8 y así sucesivamente, hasta la última que bailó con todos los muchachos. ¿Cuántos muchachos había en la velada?

Una forma de resolver este ejercicio es la que sigue:

Por el enunciado del problema, el mínimo número de muchachos es 8 y el número máximo de chicas es 12. Procediendo por tanteo se plantean los siguientes supuestos:

$$\left.\begin{array}{l} Muchachos \rightarrow 9 \\ Chicas \rightarrow 11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} 1^a & baila & con & 7 \\ 2^a & " & " & 8 \\ 3^a & " & " & 9 \end{array}\right\} \Rightarrow 3\ \ chicas \ \Rightarrow \ \underline{NO}$$

$$\left.\begin{array}{l} Muchachos \rightarrow 10 \\ Chicas \rightarrow 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} 1^a & baila & con & 7 \\ 2^a & " & " & 8 \\ 3^a & " & " & 9 \\ 4^a & " & " & 10 \end{array}\right\} \Rightarrow 4\ \ chicas \ \Rightarrow \ \underline{NO}$$

$$\left.\begin{array}{l} Muchachos \rightarrow 11 \\ Chicas \rightarrow 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} 1^a & baila & con & 7 \\ 2^a & " & " & 8 \\ 3^a & " & " & 9 \\ 4^a & " & " & 10 \\ 5^a & " & " & 11 \end{array}\right\} \Rightarrow 5\ \ chicas \ \Rightarrow \ \underline{NO}$$

$$\left.\begin{array}{l} Muchachos \rightarrow 12 \\ Chicas \rightarrow 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} 1^a & baila & con & 7 \\ 2^a & " & " & 8 \\ 3^a & " & " & 9 \\ 4^a & " & " & 10 \\ 5^a & " & " & 11 \\ 6^a & " & " & 12 \end{array}\right\} \Rightarrow 6\ \ chicas \ \Rightarrow \ \underline{NO}$$

$$\left.\begin{array}{l} Muchachos \rightarrow 13 \\ Chicas \rightarrow 7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} 1^a & baila & con & 7 \\ 2^a & " & " & 8 \\ 3^a & " & " & 9 \\ 4^a & " & " & 10 \\ 5^a & " & " & 11 \\ 6^a & " & " & 12 \\ 7^a & " & " & 13 \end{array}\right\} \Rightarrow 7\ \ chicas \ \Rightarrow \ \underline{SI}$$

El número de muchachos era de 13 y el de chicas, 7.

****

Problema E.- El beneficio obtenido por la producción y venta de x kilos de un artículo viene dado por la función $B(x) = -0'01x^2 + 3'6x - 180$.

a) Determinar los kilos que hay que producir y vender para que el beneficio sea máximo.

b) Determinar los kilos que hay que producir y vender como máximo para que la empresa no tenga pérdidas.

----

a)

El beneficio será máximo cuando su derivada se anule, es decir:

$$B'(x) = -0'02x + 3'6 \;\;;;\;\; B'(x) = 0 \Rightarrow -0'02x + 3'6 = 0 \;\;;;\;\; 2x = 360 \;\;;;\;\; \underline{x = 180}$$

$$B(180) = -0'01 \cdot 180^2 + 3'6 \cdot 180 - 180 = -324 + 648 - 180 = \underline{144 = f(180)}$$

<u>El beneficio máximo se consigue cuando se venden 180 kilos.</u>

Justificación de que se trata de un máximo:

$$\underline{B''(x) = -0'02 < 0 \Rightarrow Máximo,} \quad \underline{\underline{c.q.j.}}$$

b)

La representación gráfica del beneficio es una parábola cóncava cuyo vértice es el punto máximo obtenido en el apartado anterior: <u>V(180, 144)</u>.

Los puntos de corte con el eje de abscisas de la parábola son:

$$-0'01x^2 + 3'6x - 180 = 0 \;\;;;\;\; x^2 - 360x + 18000 = 0$$

$$x = \frac{360 \pm \sqrt{129600 - 72000}}{2} = \frac{360 \pm 240}{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = 300} \\ \underline{x_2 = 60} \end{cases}$$

<u>La cantidad máxima que debe venderse para no tener pérdidas es de 300 kilos</u>

<u>Nota</u>: Es interesante observar que si se venden menos de 60 kilos también hay pérdidas, o sea, que el beneficio se produce cuando las ventas son mayores de 60 kilos y menores de 300 kilos.

****