PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

JUNIO – 2003

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Nota: Deberán contestarse la cuestión o el problema de cada uno de los bloques A, B, C, D y E. Cada uno de los ejercicios será valorado entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y sea n un número natural cualquiera. Encontrar el valor de A^n para cada n y hallar $A^{350} - A^{250}$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 3+3 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 \cdot 2 & 1 \end{pmatrix} = A^2}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 6+3 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 \cdot 3 & 1 \end{pmatrix} = A^3}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 9+3 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 12 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 \cdot 4 & 1 \end{pmatrix} = A^4}$$

....

$$\underline{\underline{A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3n & 1 \end{pmatrix}}}$$

$$A^{350} - A^{250} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 350 \cdot 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 250 \cdot 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1050 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 750 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 300 & 0 \end{pmatrix} = A^{350} - A^{250}}}$$

****

Problema A.- Discutir el sistema $S \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ ax+y+z=2 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$ en función del valor de a.. Resolverlo en los casos en que sea compatible.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2+a+1-1-1-2a = 1-a = 0 \;\;;;\;\; \underline{a=1}$$

$$\underline{\underline{Para\;\; a \neq 1 \Rightarrow Rango\;\; M = Rango\;\; M' = 3 = n^{o}\;\; incóg. \Rightarrow Compatible\;\; Determinado}}$$

$$Para\;\; a=1 \;\Rightarrow\; M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_2\} \Rightarrow Rango\;\; M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3+2-4-3 = 5-7 = -2 \neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango\;\; M' = 3}$$

$$\underline{\underline{Para\;\; a=1 \Rightarrow Rango\;\, M = 2 \;\;;;\;\; Rango\;\, M' = 3 \Rightarrow Incompatible}}$$

Resolvemos para $a \neq 1$ aplicando la Regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{1-a} = \frac{2+3-3-4}{1-a} = \underline{\underline{\frac{-2}{1-a} = x}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{1-a} = \frac{4+3a-2-3}{1-a} = \underline{\underline{\frac{3a-1}{1-a} = y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{1-a} = \frac{3+2-2-3a}{1-a} = \frac{3-3a}{1-a} = \frac{3(1-a)}{1-a} = \underline{\underline{3 = z}}$$

****

BLOQUE B

Cuestión B.- Dados tres puntos diferentes del espacio $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $P_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ y $P_3(x_3,\ y_3,\ z_3)$, describir brevemente un procedimiento para determinar si están en una misma línea recta. Sean $A(a,\ 1,\ 2)$, $B(0,\ 2,\ 3)$ y $C(0,\ 3,\ 4)$, ¿existe algún valor de a para el cual los tres puntos estén alineados? Razonar la respuesta y en su caso hallar el valor de a.

Los puntos $P_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $P_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ y $P_3(x_3,\ y_3,\ z_3)$ estarán en línea recta cuando los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P_1P_3}$ sean linealmente dependientes.

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2,\ y_2,\ z_2) - (x_1,\ y_1,\ z_1) = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = P_3 - P_1 = (x_3,\ y_3,\ z_3) - (x_1,\ y_1,\ z_1) = (x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ z_3 - z_1)$$

Para que los puntos estén alineados tiene que cumplirse lo siguiente:

$$\underline{\underline{\overrightarrow{u} = k \cdot \overrightarrow{v} \quad \Rightarrow \quad (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1) = k \cdot (x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ z_3 - z_1),\ \forall k \in R,\ k \neq 0}}$$

En el caso particular de los puntos dados sería:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 2,\ 3) - (a,\ 1,\ 2) = (-a,\ 1,\ 1) \\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 3,\ 4) - (a,\ 1,\ 2) = (-a,\ 2,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \underline{\overrightarrow{u} = k \cdot \overrightarrow{v}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (-a,\ 1,\ 1) = k \cdot (-a,\ 2,\ 2) = (-ka,\ 2k,\ 2k) \ \Rightarrow \ \underline{\underline{a = 0\ \ ;;\ \ k = \frac{1}{2}}}$$

****

Problema B.- Se consideran los planos $\pi_1 \equiv 4x+2y-4z=2,\ \pi_2 \equiv x-2y-z=2$ y $\pi_3 \equiv x+ay+z=b$. ¿Existen valores de a y b para los cuales los tres planos se corten en una recta? En caso de que la respuesta sea negativa razonar la contestación. En caso de que la respuesta sea positiva, calcular dichos valores.

Si los tres planos se cortan en una recta, todos los infinitos puntos de la recta son solución del sistema que determinan, por lo cual, según el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado; los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada tienen que ser ambos iguales e iguales a dos.

Las matrices son $M=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & a & 1 & b \end{pmatrix}$.

$$Rango\ \ M=2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=0\ \ ;;\ -8-4a-2-8+4a-2=0\ \ ;;\ \underline{-20=0}\ \ ???$$

No existe ningún valor real de a para que el rango de M sea dos.

$$\underline{\underline{\forall a, b \in R,\ los\ \ planos\ \ \pi_1,\ \pi_2\ \ y\ \ \pi_3\ \ no\ \ se\ \ cortan\ \ en\ \ una\ \ recta.}}$$

****

BLOQUE C

Cuestión C.- Sea f la función dada por $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & si \;\; x<2 \\ 2x & si \;\; x\geq 2 \end{cases}$. ¿Existen valores de a y b para los cuales f satisfaga las hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo [0, 4]? Razonar la contestación y en caso afirmativo calcular dichos valores.

Para que la función satisfaga las hipótesis del Teorema del Valor Medios es condición necesaria que sea continua y derivable en todos los puntos del intervalo dado.

Por tratarse de una función definida por dos trozos, una parábola y una recta, respectivamente, son continuos en todos los puntos de sus existencias, por lo cual, el punto a estudiar, perteneciente al intervalo, es para x = 2.

Para que sea continua para x = 2 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+ax+b\right)=\underline{4+2a+b} \\ \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(2x)=f(2)=\underline{4} \end{array}\right\} \Rightarrow 4+2a+b=4 \;\;;;\;\; \underline{2a+b=0} \qquad (*)$$

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+a & si \;\; x<2 \\ \\ 2 & si \;\; x\geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'\left(2^-\right)=2\cdot 2+a=\underline{4+a} \\ \\ f'\left(2^+\right)=\underline{2} \end{cases} \Rightarrow \;\; 4+a=2 \;\;;;\;\; \underline{\underline{a=-2}}$$

Sustituyendo en (*) el valor de a, resulta:

$$2a+b=0 \;\;;;\;\; 2\cdot(-2)+b=0 \;\;;;\;\; -4+b=0 \;\;;;\;\; \underline{\underline{b=4}}$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio a la función $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+4 & si \;\; x<2 \\ 2x & si \;\; x\geq 2 \end{cases}$ en el intervalo [0, 4]:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{2\cdot 4-(0-0+4)}{4}=\frac{8-4}{4}=\frac{4}{4}=\underline{1=f'(c)}$$

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & si \quad x<2 \\ \\ 2 & si \quad x\geq 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(c)=1 \Rightarrow 2c-2=1 \;;;\; 2c=3 \;;;\; \underline{\underline{c=\frac{3}{2}}}$$

****

Problema C.- Sea f la función definida por $f(x)=e^{2x}-4e^{x}+1$. Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f y sus asíntotas. ¿Tiene f algún máximo o mínimo?

La función está definida para cualquier valor real de x, por lo cual su dominio de definición es R.

$$f'(x)=2\cdot e^{2x}-4e^{x} \;;;\; f'(x)=0 \Rightarrow e^{2x}-2e^{x}=0 \;;;\; \left(e^{x}\right)^{2}-2e^{x}=0 \;;;\; e^{x}\left(e^{x}-2\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{x}\neq 0,\ \forall x\in R \;;;\; e^{x}-2=0 \;;;\; e^{x}=2 \;;;\; \underline{x=L2}$$

$$Para\ \ x<L2 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow \underline{\underline{Decreciente\ \ (-\infty,\ L2)}}$$

$$Para\ \ x>L2 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow \underline{\underline{Creciente\ \ (L2,\ +\infty)}}$$

$$f''(x)=4\cdot e^{2x}-4e^{x}=4e^{x}\left(e^{x}-1\right) \;;;\; f''(L2)=4\cdot 2\cdot(2-1)=8>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Existe\ \ un\ \ Mínimo\ \ para\ \ x=L2}$$

$$f(L2)=e^{2L2}-4e^{L2}+1=4-4\cdot 2+1=5-8=-3 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo \Rightarrow P(L2,\ -3)}}$$

Por ser una función continua y derivable en su dominio (R), no existen asíntotas verticales.

Las posibles asíntotas son las los límites cuando x tiende a $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{2x}-4e^{x}+1\right)=\infty-\infty \Rightarrow Ind. \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[e^{x}\left(e^{x}-4+\frac{1}{e^{x}}\right)\right]=$$

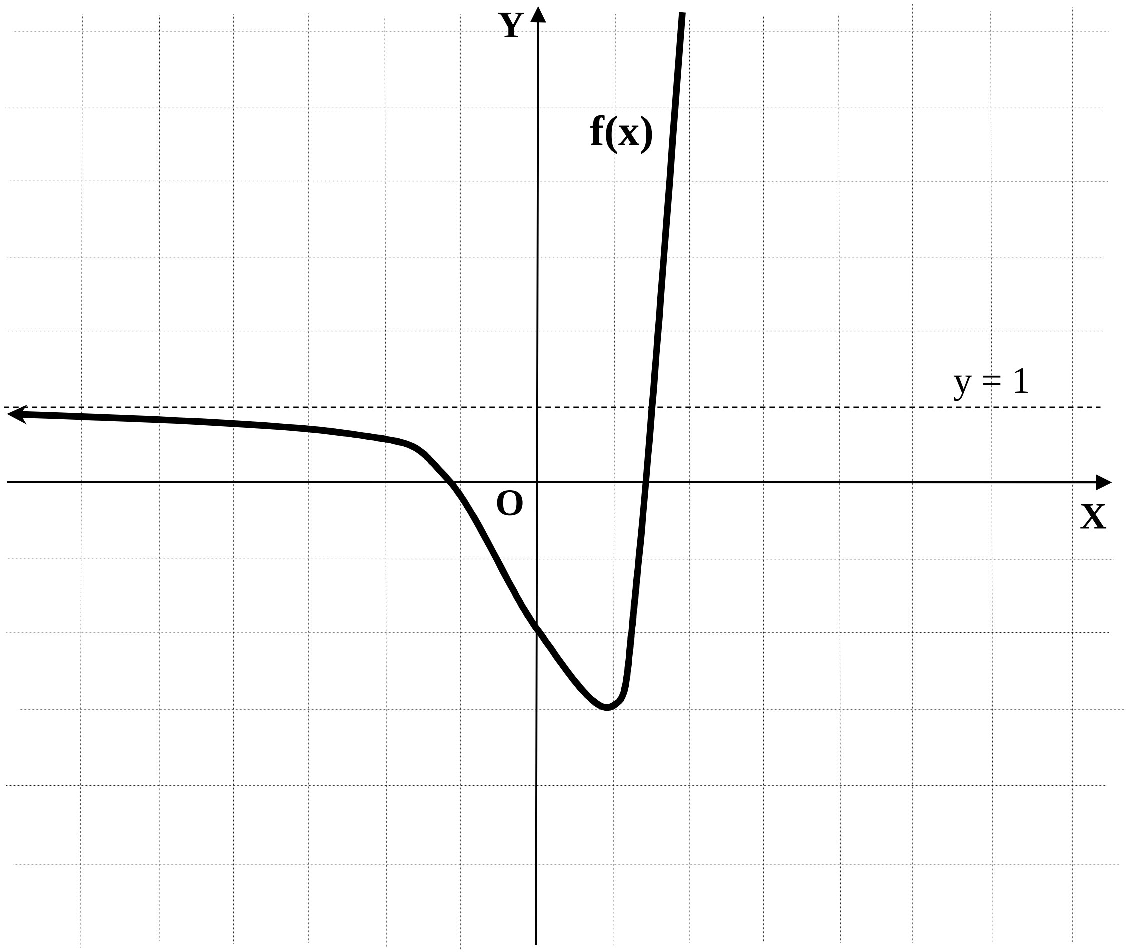
$$=\infty\cdot(\infty-4+0)=\infty\cdot\infty=+\infty \Rightarrow \underline{No\ \ hay\ \ asíntota\ \ para\ \ x\to+\infty}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-4e^{x}+1\right)=e^{-\infty}-4e^{-\infty}+1=0-0+1=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Existe\ \ una\ \ asíntota\ \ para\ \ x\to-\infty}$$

$$\underline{\underline{Asíntota\ \ horizontal\ \ y=1}}$$

La representación gráfica de la situación es la que se indica en la siguiente figura.

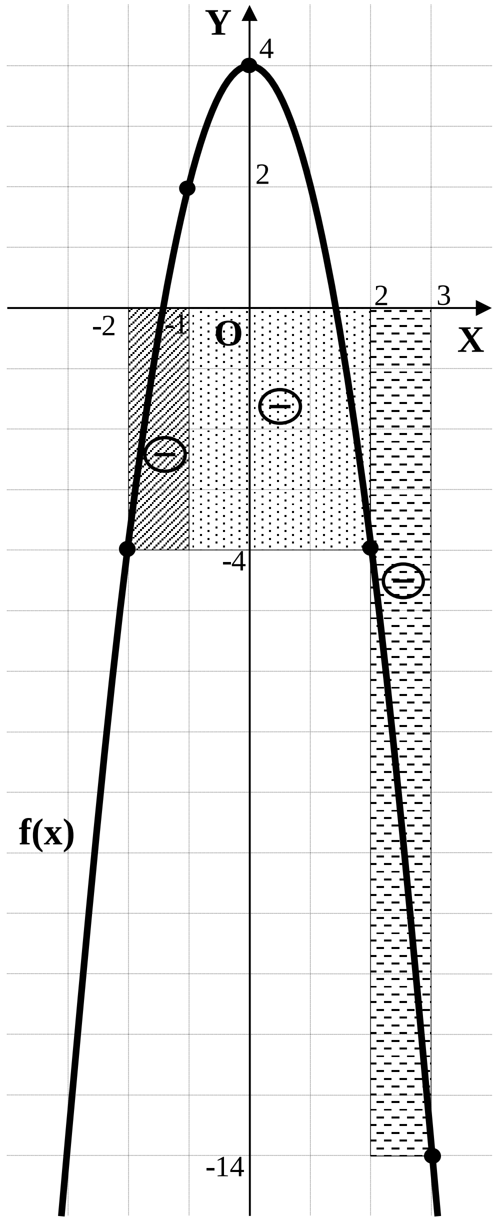

Y
f(x)
y = 1
O
X

****

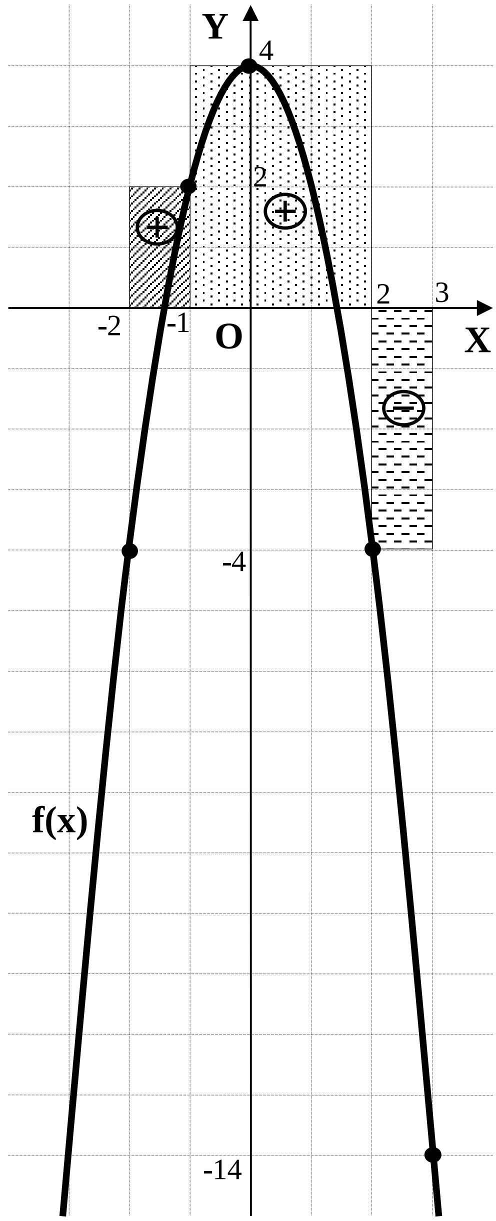
Cuestión D.- Sea $f(x) = 4 - 2x^2$. Se considera el intervalo I = [-2, 3] y la partición suya P = {-2, -1, 2, 3}. Calcular la suma superior e inferior de dicha función correspondientes al intervalo I y a la partición P.

La función f(x) es una parábola cóncava, simétrica con respecto al eje OY cuyo punto máximo es A(0, 4).

Para una mejor comprensión del cálculo de las sumas superior e inferior, a continuación se hacen gráficos de las mismas.



Sumas Inferiores



Sumas Superiores

Se llama suma inferior de f(x) asociada a la partición P y se designa de la forma $I(f,\ P)$ al siguiente número real:

$$I(f,\ P) = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_i(x_i - x_{i-1}) + \cdots + m_n(x_n - x_{n-1})$$

siendo m_i el valor mínimo del intervalo genérico $(x_{i-1},\ x_i)$.

Se llama suma superior de f(x) asociada a la partición P y se designa de la forma $S(f,\ P)$ al siguiente número real:

$$S(f,\ P) = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots + M_i(x_i - x_{i-1}) + \cdots + M_n(x_n - x_{n-1})$$

siendo M_i el valor máximo del intervalo genérico $(x_{i-1},\ x_i)$.

Aplicando las fórmulas anteriores a $f(x) = 4 - 2x^2;\ P\{-2,\ -1,\ 2,\ 3\}$, teniendo en cuenta que los mínimos de los diferentes intervalos son:

$$m_1 = f(-2) = 4 - 2 \cdot (-2)^2 = 4 - 2 \cdot 4 = 4 - 8 = -4$$

$$m_2 = f(2) = 4 - 2 \cdot 2^2 = 4 - 2 \cdot 4 = 4 - 8 = -4$$

$$m_3 = f(3) = 4 - 2 \cdot 3^2 = 4 - 2 \cdot 9 = 4 - 18 = -14$$

$$I(f,\ P) = m_1[-1 - (-2)] + m_2[2 - (-2)] + m_3(3 - 2) = -4 \cdot 1 + (-4) \cdot 4 + (-14) \cdot 1 =$$

$$= -4 - 16 - 14 = \underline{\underline{-30 = I(f,\ P)}}$$

Los máximos de las diferentes particiones son las siguientes:

$$M_1 = f(-1) = 4 - 2 \cdot (-1)^2 = 4 - 2 \cdot 1 = 4 - 2 = 2$$

$$M_2 = f(0) = 4 - 2 \cdot 0^2 = 4 - 2 \cdot 0 = 4 - 0 = 4$$

$$M_3 = f(2) = 4 - 2 \cdot 2^2 = 4 - 2 \cdot 4 = 4 - 8 = -4$$

$$S(f,\ P) = M_1[-1 - (-2)] + M_2[2 - (-1)] + M_3(3 - 2) = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot 1 =$$

$$= 2 + 12 - 4 = \underline{\underline{10 = S(f,\ P)}}$$

****

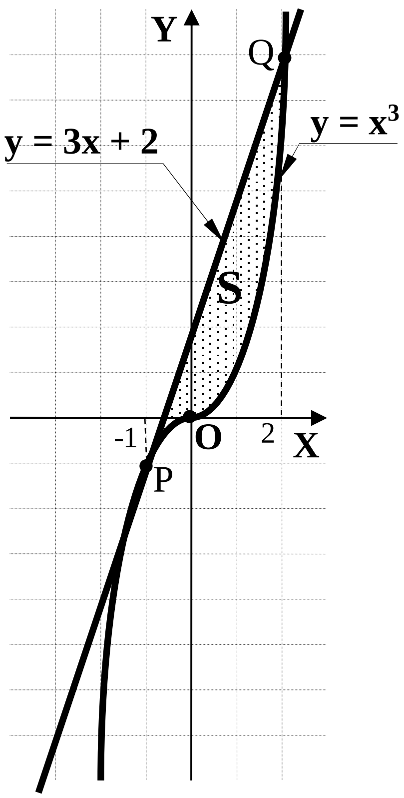
Problema D.- La recta $y = 3x + 2$ y la curva $y = x^3$ limitan un recinto en el plano. Trazar un esquema gráfico de dicho recinto y calcular su área.

Los puntos de corte de las gráficas se obtienen resolviendo el sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x + 2 \\ y = x^3 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 = 3x + 2 \;;;\; x^3 - 3x - 2 = 0.$$

Resolviendo por Ruffini:

	1	0	-3	-2
-1		-1	1	2
	1	-1	-2	$\boxed{0}$
-1		-1	2	
	1	-2	$\boxed{0}$	
2		2		
	1	$\boxed{0}$		



Los puntos de corte son P(-1, -1) y Q(2, 8).

La representamos gráficamente la situación es, aproximadamente, la figura adjunta.

Como puede observarse, en el intervalo correspondiente al área S, todas las ordenadas de la recta son iguales o mayores que las de la curva, por lo cual el área pedida es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{2} \left[(3x+2) - x^3\right] \cdot dx = \int_{-1}^{2} \left(-x^3 + 3x + 2\right) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2^4}{4} + \frac{3 \cdot 2^2}{2} + 2 \cdot 2\right) - \left[-\frac{(-1)^4}{4} + \frac{3 \cdot (-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1)\right] =$$

$$= -4 + 6 + 4 - \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 2\right) = 6 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 = 8 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{32 + 1 - 6}{4} = \underline{\underline{\frac{27}{4}\ u^2 = S}}$$

****

BLOQUE E

Cuestión E.- Dados dos números a y b tales que $a \cdot b > 0$, demostrar que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Por ser $a \cdot b > 0$, los números a y b tienen que tener, necesariamente, el mismo signo, por lo cual los cocientes $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$ son positivos.

La expresión dada puede expresarse de la forma $\frac{a^2 + b^2}{a \cdot b} \geq 2$, que es equivalente a $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

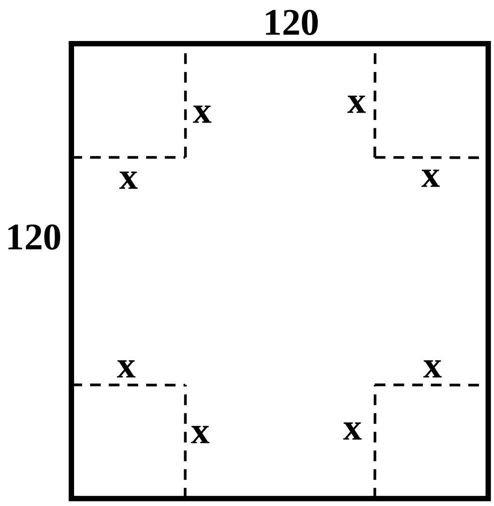
Restando $(2ab)$ a los dos términos de la última expresión queda:

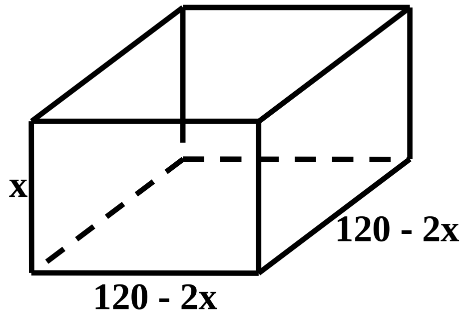
$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 2ab - 2ab \;\;;;\;\; a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \;\;;;\;\; \underline{(a-b)^2 \geq 0}$$

Como quiera que el cuadrado de cualquier número es mayor o igual a cero, haber llegado a la última expresión demuestra lo pedido.

****

Problema E.- Se dispone de un trozo cuadrado de cartón cuyo lado mide 120 cm. De sus esquinas se quitan cuatro cuadrados iguales para hacer con el cartón resultante una caja sin tapa, cuyo volumen se quiere maximizar. Calcular las dimensiones de la caja que verifica dichas condiciones.





Sea x el valor del lado del cuadrado recortado de cada una de las esquinas de la cartulina.

El volumen de la caja resultante es: $V = (120-2x)^2 \cdot x$.

Para que el volumen sea máximo su derivada tiene que ser nula:

$$V' = [2(120-2x)\cdot(-2)]\cdot x + (120-2x)^2 \cdot 1 = (120-2x)(-4x+120-2x) =$$

$$= (120-2x)(120-6x) = 2\cdot 6\cdot(60-x)(20-x) = \underline{\underline{12(60-x)(20-x) = V'}}$$

$$V' = 0 \Rightarrow 12(60-x)(20-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = 60} \\ \underline{x_2 = 20} \end{cases}$$

De las dos soluciones obtenidas, es lógico que la primera carece de sentido, pues si la longitud del trozo recortado de cada esquina fuera de 60 cms, se dividiría la cartulina en cuatro trozos sin posibilidad de construir la caja (sería volumen mínimo); por el contrario, el valor de x = 20 si tiene sentido, y en efecto, es la solución.

$$Lado\ \ de\ \ la\ \ base = 120 - 2x = 120 - 2\cdot 20 = 120 - 40 = 80$$

Las dimensiones de la caja son 80 x 80 cm de base y 20 cm de altura..

****