

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO****SEPTIEMBRE - 2002**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Nota: Deberán contestarse la cuestión o el problema de cada uno de los bloques A, B, C, D y E. Cada uno de los ejercicios será valorado entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A.- Sean A y B las matrices que siguen:

$$A = \begin{pmatrix} 2x & 2 & 3+x \\ 2 & x & 5 \\ 10 & 6 & x+5 \end{pmatrix} \quad ;; \quad B = \begin{pmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 4 \\ 5 & 6 & x \end{pmatrix}.$$

Sabiendo que el determinante de B vale 7, utilizar las propiedades de los determinantes para calcular el valor del determinante de A.

$$A = \begin{pmatrix} 2x & 2 & 3+x \\ 2 & x & 4+1 \\ 10 & 6 & x+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2 & 3 \\ 2 & x & 4 \\ 10 & 6 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x & 2 & x \\ 2 & x & 1 \\ 10 & 6 & 5 \end{pmatrix} ;;$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2x & 2 & 3 \\ 2 & x & 4 \\ 10 & 6 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2x & 2 & x \\ 2 & x & 1 \\ 10 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 1 & x & 4 \\ 5 & 6 & x \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} x & 2 & x \\ 1 & x & 1 \\ 5 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 0 = \underline{\underline{14}} = |A|$$

Nota: El valor del último determinante es cero por tener dos columnas iguales.

Problema A.- Se considera el sistema S dado por: $S \equiv \begin{cases} x - y + z = a \\ x - z = -a \\ 2x - y = 0 \end{cases}$. Discutir la compatibilidad en función del valor de a. Resolver en los casos de compatibilidad.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; ; M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & -a \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; ; |M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 + 2 - 1 = 0$$

Para $a \neq 0 \Rightarrow$ Rango de $M \neq$ Rango \Rightarrow Incompatible

Para $a = 0 \Rightarrow$ Rango $M =$ Rango $M' = 2 < n^\circ$ incógnitas \Rightarrow Compatible Indeterminado

Para $a = 0$ resulta el sistema:
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación: $x = z$. Haciendo $z = k$, resulta:

$$\underline{\underline{\begin{cases} x = k \\ y = 2k \quad \forall k \in R, (k \neq 0) \\ z = k \end{cases}}}$$

Dando valores a k se obtienen las infinitas soluciones del sistema.

BLOQUE B

Cuestión B.- Se π el plano de ecuación: $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y sea P un punto exterior al mismo dado por P(a, b, c). Describir el proceso para calcular el punto simétrico de P respecto a π .

En primer lugar tendremos en cuenta que un vector normal (perpendicular) al plano π es $\vec{v} = (A, B, C)$.

La ecuación de la recta r que pasando por P es perpendicular a π es la que tiene como vector director a \vec{v} y pasa por P; en forma de ecuaciones paramétricas es:

$$r \equiv \begin{cases} x = a + Ak \\ y = b + Bk \\ z = c + Ck \end{cases}$$

El punto de intersección de r con π es $Q(q_1, q_2, q_3)$. El punto simétrico de P con respecto a π es P'(x, y, z) que se obtiene teniendo en cuenta que:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \Rightarrow [(q_1 - a), (q_2 - b), (q_3 - c)] = [(x - q_1), (y - q_2), (z - q_3)] \Rightarrow \begin{cases} x = 2q_1 - a \\ y = 2q_2 - b \\ z = 2q_3 - c \end{cases}$$

El punto pedido es: $Q(2q_1 - a, 2q_2 - b, 2q_3 - c)$

Problema B.- Encontrar la ecuaciones paramétricas de la recta que contiene al punto $P(2, 1, 3)$ y cuyo vector de dirección es perpendicular a los vectores $\vec{v} = (1, 2, 0)$ y $\vec{w} = (1, 1, 2)$. Escribir la ecuación de la recta en forma continua. ¿Pertenece el punto $Q(1, 2, 3)$ a la recta?

El producto vectorial de dos vectores es otro \vec{n} vector perpendicular al plano que forman los vectores, por lo tanto, es perpendicular a los mismos:

$$\vec{n} = \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4i + k - 2k + 2j = 4i + 2j - k \Rightarrow \underline{\underline{\vec{n} = (4, 2, 1)}}$$

La recta pedida es la que tiene como vector director a \vec{n} y pasa por el punto P; sus ecuaciones paramétricas son:

$$r(P; \vec{n}) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(2, 1, 3) \\ \vec{n} = (4, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = 2 + 4k \\ y = 1 + 2k \\ z = 3 - k \end{cases}}}$$

La expresión de r por unas ecuaciones continuas es:

$$\underline{\underline{r \equiv \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}}}$$

Veamos si el punto Q pertenece a r; tiene que satisfacer sus ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1} \\ Q(1, 2, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1-2}{4} \neq \frac{2-1}{2} \neq \frac{3-3}{-1} \Rightarrow \underline{\underline{Q \notin r}}$$

BLOQUE C

Cuestión C.- Encontrar la ecuación de la recta tangente para la función $f(x) = x^4 + 16$ en un punto cualquiera $x = a$. ¿Existe algún valor de a para el cual dicha recta tangente tenga de pendiente 1? ¿Existe algún valor de a para el cual dicha recta tangente pase por el punto exterior a la curva $O(0, 0)$? Razonar las contestaciones si son negativas o realizar los cálculos en caso de ser afirmativas.

$$f(x) = x^4 + 16 \Rightarrow y = f(a) = a^4 + 16 \Rightarrow \underline{P(a, a^4 + 16)}$$

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow m = f'(a) = \underline{4a^3 = m}$$

La ecuación de una recta que pasa por un punto conocida la pendiente es:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - (a^4 + 16) = 4a^3(x - a) \quad ; ; \quad y - a^4 - 16 = 4a^3x - 4a^4 \quad ; ;$$

$$\underline{\underline{t \equiv 4a^3x - y + (16 - a^4) = 0}}$$

Para que la pendiente sea 1 tiene que cumplirse:

$$m = 1 \Rightarrow 4a^3 = 1 \quad ; ; \quad a^3 = \frac{1}{4} \quad ; ; \quad a = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt[3]{2}}{2}}} = a$$

Para que la recta r pase por el punto $O(0, 0)$ tiene que cumplirse que:

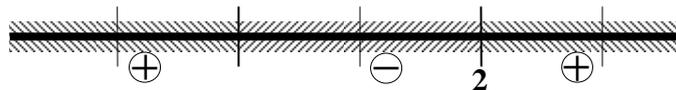
$$16 - 3a^4 = 0 \quad ; ; \quad 3a^4 = 16 \quad ; ; \quad a = \sqrt[4]{\frac{16}{3}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[4]{3^3}}{3} = \underline{\underline{\frac{2 \cdot \sqrt[4]{27}}{3}}} = a$$

Problema C.- Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos locales y las asíntotas de la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$. Trazar su gráfica.

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{x \cdot e^x(2-x)}{e^{2x}} = \frac{x(2-x)}{e^x} = f'(x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(2-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

El signo de $f'(x)$ depende del numerador, ya que, el denominador es siempre positivo.



$$\underline{\underline{f'(x) > 0 \Rightarrow \text{Creciente} \Rightarrow (-\infty, 0) \cup (2, \infty)}}$$

$$\underline{\underline{f'(x) < 0 \Rightarrow \text{Decreciente} \Rightarrow (0, 2)}}$$

$$f''(x) = \frac{(2-2x) \cdot e^x - x(2-x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2-2x-2x+x^2}{e^x} = \frac{x^2-4x+2}{e^x} = f''(x)$$

$$f''(0) = \frac{2}{e^0} = \frac{2}{1} = 2 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mín}(0, 0)}}$$

$$f''(2) = \frac{2^2 - 4 \cdot 2 + 2}{e^2} = \frac{-2}{e^2} < 0 \Rightarrow f(2) = \frac{2^2}{e^2} = \frac{4}{e^2} \cong 0'54 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máx}(2, 0'54)}}$$

Para que exista P. I. es condición necesaria que $f''(x) = 0$, pero no es suficiente; para que exista P. I. es necesario que $f'''(x) \neq 0$.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \;; \; x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{2} \\ x_2 = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$f'''(x) = \frac{(2x-4) \cdot e^x - (x^2-4x+2) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2x-4-x^2+4x-2}{e^x} = \frac{-x^2+6x-6}{e^x} = f'''(x)$$

$$f'''(2 + \sqrt{2}) \neq 0 \Rightarrow \text{P. I.} \Rightarrow f(2 + \sqrt{2}) = \frac{(2 + \sqrt{2})^2}{e^{2+\sqrt{2}}} \cong 0'38 \Rightarrow \underline{\underline{\text{P. I.}(3'41, 0'38)}}$$

$$f'''(2 - \sqrt{2}) \neq 0 \Rightarrow \text{P. I.} \Rightarrow f(2 - \sqrt{2}) = \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{e^{2-\sqrt{2}}} \cong 0'24 \Rightarrow \underline{\underline{\text{P. I.}(0'59, 0'24)}}$$

Asíntotas horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma $y = k$.

$$y = k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow \{\text{Aplicando L'Hopital}\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow \{\text{Aplicando de nuevo L'Hopital}\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

Asíntota horizontal : $y = 0$ (Eje X)

Asíntotas verticales: son los valores de x que anulan el denominador:

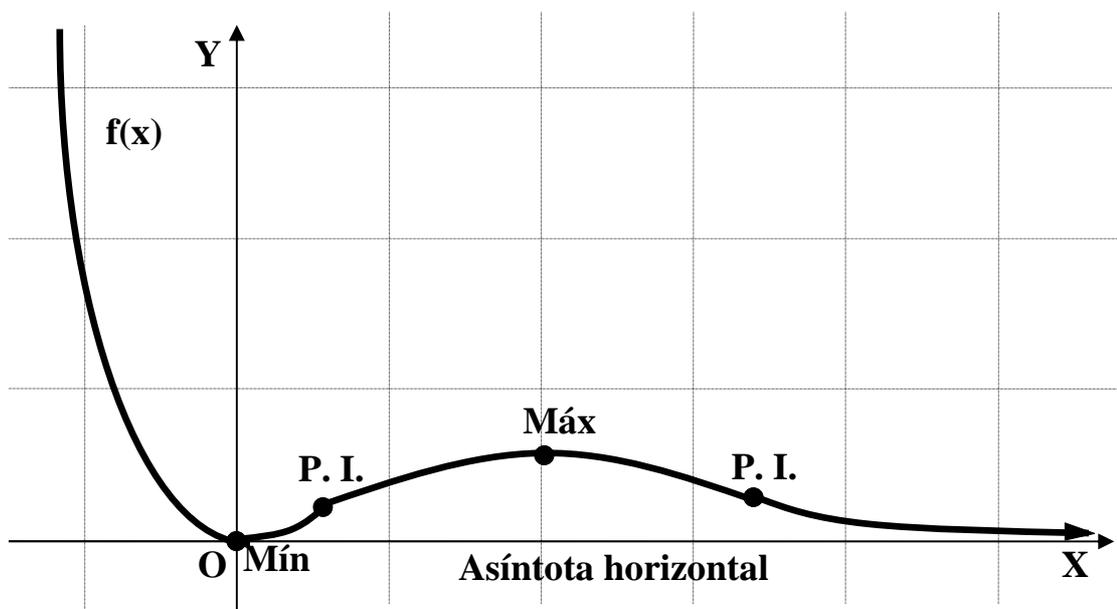
$$\underline{\underline{e^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{No tiene.}}}$$

Asíntotas oblicuas.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} \Rightarrow \{\text{L'Hopital}\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0 = m$$

No tiene asíntotas verticales.

La representación gráfica es, aproximadamente, la que sigue:



BLOQUE D

Cuestión D.- Describir en qué consiste el método de integración por partes. Utilizar dicho método para encontrar una primitiva de la función $f(x) = x \cdot \cos(3x)$.

El método de integración por partes está basado en la diferencial (derivada) de un producto, teniendo en cuenta que si u y v son dos funciones de x se cumple que:

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$$

Teniendo en cuenta que la integral de una suma algebraicas de funciones es igual a la suma algebraica de las integrales de las funciones, podemos escribir:

$$\int d(u \cdot v) = \int du \cdot v + \int u \cdot dv$$

Teniendo en cuenta que $\int d(u \cdot v) = u \cdot v$, la expresión anterior puede ponerse de la forma:

$$\underline{\underline{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}}$$

La expresión anterior es la que se conoce como la del método de integración por partes.

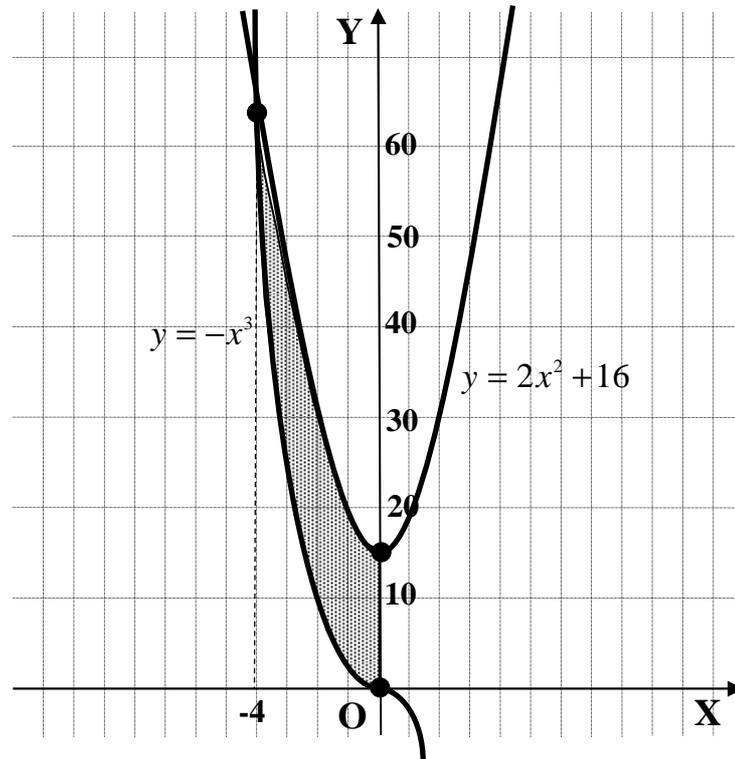
Aplicando la fórmula anterior podemos determinar la integral de la función dada:

$$I = \int x \cdot \cos(3x) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ \cos(3x) \cdot dx = dv \rightarrow v = \frac{1}{3} \text{sen}(3x) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = x \cdot \frac{1}{3} \text{sen}(3x) - \int \frac{1}{3} \text{sen}(3x) \cdot dx = \frac{x}{3} \cdot \text{sen}(3x) - \frac{1}{3} \int \text{sen}(3x) \cdot dx =$$

$$= \frac{x}{3} \cdot \text{sen}(3x) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \cos(3x) + C = \underline{\underline{\frac{1}{9} [3x \cdot \text{sen}(3x) + \cos(3x)] + C = I}}$$

Problema D.- La curva $y = -x^3$, el eje OY y la curva $y = 16 - 2x^2$ limitan un recinto finito del plano. Trazar un esquema de dicho recinto y calcular su área haciendo uso del cálculo integral.



El punto de corte de ambas funciones es:

$$\left. \begin{array}{l} y = -x^3 \\ y = 2x^2 + 16 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^3 = 2x^2 + 16 \ ; \ ; \ x^3 + 2x^2 + 16 = 0$$

Resolviendo por Ruffini se obtiene la única raíz real, que es $x = -4$.

La parábola es fácil representar ya que es simétrica con respecto a Y; corta al eje Y en el punto P(0, 16).

Con los datos anteriores ya podemos obtener el área pedida, que es la sombreada en la figura.

$$A = \int_{-4}^0 (x^2 + 16) \cdot dx - \int_{-4}^0 -x^3 \cdot dx = \int_{-4}^0 (x^2 + 16) \cdot dx + \int_{-4}^0 x^3 \cdot dx = \int_{-4}^0 (x^3 + x^2 + 16) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 16x \right]_{-4}^0 = 0 - \left(64 - \frac{64}{3} + 64 \right) = \underline{\underline{\frac{64}{3} u^2 = A}}$$

BLOQUE E

Cuestión E.- Se sabe que los lados de un triángulo tienen longitud entera cuando se expresan en centímetros, y que el perímetro del triángulo es de 8 centímetros. Llamando S al área del triángulo, calcular todos los valores posibles de S.

Supongamos que los lados son a, b y c y que $a \geq b \geq c$. Los casos que pueden presentarse son los siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} a = 6 \text{ cm} \\ b = 1 \text{ cm} \\ c = 1 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{No se puede construir debido a que: } a > b + c.$$

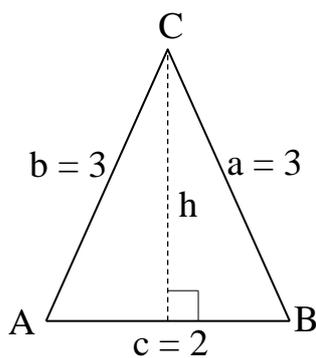
$$\left. \begin{array}{l} a = 5 \text{ cm} \\ b = 2 \text{ cm} \\ c = 1 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{No se puede construir debido a que: } a > b + c.$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 4 \text{ cm} \\ b = 3 \text{ cm} \\ c = 1 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{No se puede construir debido a que: } a = b + c.$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 4 \text{ cm} \\ b = 2 \text{ cm} \\ c = 2 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{No se puede construir debido a que: } a = b + c.$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 3 \text{ cm} \\ b = 3 \text{ cm} \\ c = 2 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Es el único caso que se puede construir, por lo tanto la solución es única.}}}$$

Se trata de un triángulo isósceles cuyos datos se obtienen a continuación:



Por el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{9 - 1} = \sqrt{8} = \underline{\underline{2\sqrt{2} \text{ cm} = h}}$$

$$S = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{2\sqrt{2} \text{ cm}^2 = S}}$$

$$\text{sen } A = \text{sen } B = \frac{h}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0.9428 \Rightarrow \underline{\underline{A = B = 70^\circ 31' 44''}}$$

$$C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - 141^\circ 3' 28'' = \underline{\underline{38^\circ 56' 32'' = C}}$$

Problema E.- Dos alumnos de segundo curso discuten sobre el valor de la potencia enésima de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Uno afirma que para cada n natural se verifica que

$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3(2^n - 1) \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$ y el otro dice que la verdadera fórmula de A^n es $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3^n \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$. ¿Alguno de ellos está en lo cierto? Razonar la cuestión.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 3(2^2 - 1) \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix}}}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 21 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 3(2^3 - 1) \\ 0 & 2^3 \end{bmatrix}}}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 45 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 3(2^4 - 1) \\ 0 & 2^4 \end{bmatrix}}}$$

.....

$$\underline{\underline{A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3(2^n - 1) \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}}}$$

Por lo anterior se deduce que tiene razón el primero de los alumnos.
