PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

JUNIO - 2002

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Nota: Deberán contestarse la cuestión o el problema de cada uno de los bloques A, B, C, D y E. Cada uno de los ejercicios será valorado entre 0 y 2 puntos.

BLOQUE A

Cuestión A.- Encontrar las matrices A y B sabiendo que verifican las siguientes ecuaciones matriciales:

$$2A+3B=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -16 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \;;;\; -A+5B=\begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

$$\left.\begin{array}{l} 2A+3B=\begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -16 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix} \\ -2A+10B=\begin{pmatrix} 18 & -4 & 32 \\ 34 & 2 & -20 \\ 18 & 10 & 26 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow 13B=\begin{pmatrix} 26 & 0 & 39 \\ 52 & 13 & -26 \\ 26 & 13 & 39 \end{pmatrix}=13\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$-A+5B=\begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix} \;;;\; A=5B-\begin{pmatrix} 10 & 0 & 15 \\ 20 & 5 & -10 \\ 4 & 5 & 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}=A$$

****

Problema A.- Discutir el sistema $\begin{cases} 2x+y+z=a \\ 2x+y+2z=2a \\ 2x+y+3z=3 \end{cases}$ en función del valor de a. Resolver en los casos en que sea compatible.

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} ;;\ M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 & 2a \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} ;;\ |M|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0\ \{C_1=C_2\}\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ de\ M=2}$$

Como el rango de M es menor que el número de incógnitas, el sistema no puede ser en ningún caso compatible determinado. Para que sea compatible indeterminado el rango de M’ tiene que ser 2, por lo tanto:

$$M'\ \Rightarrow\ \{C_2,\ C_3,\ C_4\}\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 2a \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0\ ;;\ 6+3a+2a-2a-6a-3=0\ ;;\ 3=3a\ ;;\ \underline{\underline{a=1}}$$

$$Para\ a\neq 1\ \Rightarrow\ Rango\ M\neq Rango\ M'\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Incompatible}}$$

$$Para\ a=1\ \Rightarrow\ Rango\ M=Rango\ M'=2<n^o\ incógnitas\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Compatible\ \ Indeterminado}}$$

Para a = 1 resulta el sistema: $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ 2x+y+3z=3 \end{cases}$

Para resolver el sistema, parametrizamos una incógnita (por ejemplo, x = k) y resolvemos el sistema resultante de eliminar una de las ecuaciones (por ejemplo, la tercera):

$$\left.\begin{matrix} y+z=1-2k \\ y+2z=2-2k \end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix} -y-z=-1+2k \\ y+2z=2-2k \end{matrix}\right\}\Rightarrow \underline{\underline{z=1}}\ ;;\ \ y+z=1-2k\rightarrow y+1=1-2k\ ;;\ \underline{\underline{y=-2k}}$$

Dando valores a k se obtienen las infinitas soluciones, por ejemplo:

$$\underline{\underline{k=0\ \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}}}\ ;;\ \ \underline{\underline{k=1\ \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \\ z=1 \end{cases}}}\ ;;\ \ \underline{\underline{k=-2\ \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \\ z=1 \end{cases}}}\ \ \cdots\cdots$$

****

BLOQUE B

Cuestión B.- Dada la recta $r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$ y un punto P(a, b, c) exterior a la misma, describir el proceso para hallar un plano que contenga a la recta r y al punto P. ¿Es único dicho plano? Razonar la respuesta.

La recta r está determinada por los planos $\begin{cases} \pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \\ \pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$, que necesariamente no pueden ser paralelos.

El haz de los infinitos planos que contienen a la recta viene expresado por la ecuación:

$$\pi + k \cdot \pi' = 0, \ \ \forall k \in R. \ \ \ Es \ \ decir: \ Ax + By + Cz + D + k\left(A'x + B'y + C'z + D'\right) = 0 \qquad (*)$$

De los infinitos planos anteriores, solamente uno de ellos pasa por el punto P exterior a la recta r, por lo tanto, la ecuación anterior tiene que satisfacerse para las coordenadas del punto P, o sea:

$$A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c + D + k\left(A' \cdot a + B' \cdot b + C' \cdot c + D'\right) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{k = -\frac{A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c + D}{A' \cdot a + B' \cdot b + C' \cdot c + D'}}}$$

<u>Sustituyendo en (*) el valor obtenido de k se obtiene el único plano que conteniendo a la recta r pasa por el punto P, tal como se nos pedía.</u>

****

Problema B.- Sea la recta cuya ecuación en forma continua es $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ y sean los planos $\pi_1 \equiv x+y+z=1$ y $\pi_2 \equiv x+y-z=1$. Si P_1 es el punto de corte de r con π_1 y P_2 el punto de corte de r con π_2, encontrar dichos puntos y la longitud del segmento que determinan.

La expresión de r por ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 1+k \\ y = 1-k \\ z = 1-2k \end{cases}$.

El punto P_1, intersección de r con π_1 es:

$$(1+k)+(1-k)+(1-2k)=1 \;;;\; 1+k+1-k+1-2k=1 \;;;\; 3-2k=1 \;;;\; 2k=2 \;;;\; \underline{k=1}$$

$$\underline{\underline{P_1(2,\ 0,\ -1)}}$$

El punto P_2, intersección de r con π_2 es:

$$(1+k)+(1-k)-(1-2k)=1 \;;;\; 1+k+1-k-1+2k=1 \;;;\; 1+2k=1 \;;;\; 2k=0 \;;;\; \underline{k=0}$$

$$\underline{\underline{P_2(1,\ 1,\ 1)}}$$

La distancia entre los puntos hallados es la siguiente:

$$d = \overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2(z_2-z_1)^2} = \sqrt{(1-2)^2+(1-0)^2(1+1)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\underline{\underline{d = \overline{P_1P_2} = \sqrt{6}\ \ unidades}}$$

****

BLOQUE C

Cuestión C.- Explicar en qué consiste la regla de derivación de funciones compuestas (o regla de la cadena). Si $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=\cos x^2$, utilizar dicha regla para calcular la derivada de las funciones $H(x)=f[g(x)]$ y $J(x)=g[f(x)]$.

Sabiendo que la derivada de una función f(x) en un punto x_o viene dada por la fórmula:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Aplicando la misma fórmula a una función compuesta, por ejemplo, $(f\circ g)(x_0)$:

$$(f\circ g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{(f\circ g)(x)-(f\circ g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f[g(x)]-f[g(x_0)]}{x-x_0}$$

Multiplicando y dividiendo por $g(x)-g(x_0)$ la expresión anterior, queda:

$$(f\circ g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f[g(x)]-f[g(x_0)]}{g(x)-g(x_0)}\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f[g(x)]-f[g(x_0)]}{g(x)-g(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\underline{f'[g(x_0)]\cdot g'(x_0)=(f\circ g)'(x_0)}$$

En general:

$$\underline{\underline{(f\circ g)'(x)=f'[g(x)]\cdot g'(x)}}\quad o\quad \underline{\underline{(g\circ f)'(x)=g'[f(x)]\cdot f'(x)}}$$

Aplicando las fórmulas obtenidas al ejemplo que se nos pide, sería:

$$f(x)=x^2+1\to f'(x)=2x\quad ;;\quad g(x)=\cos x^2\to g'(x)=-2x\cdot sen\ x^2$$

$$H(x)=f[g(x)]\Rightarrow H'(x)=f'[g(x)]\cdot g'(x)=\left[2\cdot\left(\cos x^2\right)\right]\cdot\left(-2x\cdot sen\ x^2\right)=$$

$$=-4x\cdot sen\ x^2\cdot\cos x^2=\underline{\underline{-2x\cdot sen\left(2x^2\right)=H'(x)}}$$

$$J(x)=g[f(x)]\Rightarrow J'(x)=g'[f(x)]\cdot f'(x)=\left[-2\cdot\left(x^2+1\right)\cdot sen\left(x^2+1\right)^2\right]\cdot(2x)=$$

$$=\underline{\underline{-4x\cdot\left(x^2+1\right)\cdot sen\left(x^2+1\right)^2=J'(x)}}$$

****

Problema C.- Sea f la función definida por $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x-2}$. Encontrar el dominio de definición de f, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus asíntotas. ¿Tiene f algún tipo de máximo o mínimo?

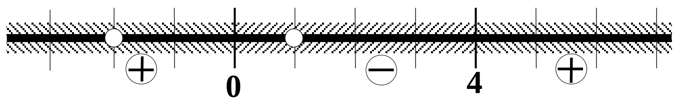
Por tratarse de una función racional, el dominio de definición de la misma es el conjunto de los números reales, excepto los valores de x que anulen el denominador.

$$x^2+x-2=0 \;;;\; x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\ x_2=-2\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{D(f)\Rightarrow R-\{1,\,-2\}}}$$

$$f'(x)=\frac{2x\cdot\left(x^2+x-2\right)-x^2\cdot(2x+1)}{\left(x^2+x-2\right)^2}=\frac{2x^3+2x^2-4x-2x^3-x^2}{\left(x^2+x-2\right)^2}=\underline{\frac{x^2-4x}{\left(x^2+x-2\right)^2}=f'(x)}$$

El signo de f’(x) depende del numerador, ya que, el denominador es siempre positivo.

$$x^2-4x=0 \;;;\; x(x-4)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ \underline{x_2=4}\end{cases}\Rightarrow$$



$$\underline{\underline{f'(x)>0\;\Rightarrow\; Creciente\;\Rightarrow\;(-\infty,\,-2)\cup(-2,\,0)\cup(4,\,\infty)}}$$

$$\underline{\underline{f'(x)<0\;\Rightarrow\; Decreciente\;\Rightarrow\;(0,\,1)\cup(1,\,4)}}$$

Asíntotas horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x-2}=\underline{\underline{1=y}}$$

Asíntotas verticales: son los valores de x que anulan el denominador: $\begin{cases}\underline{\underline{x=0}}\\ \underline{\underline{x=-2}}\end{cases}$.

No tiene asíntotas oblicuas. (Para que tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador).

Los máximos y mínimos son los valores que anulan la primera derivada, por tanto puede tener máximos y mínimos en los puntos de abscisas 1 y -2. (Para que existan los máximos o mínimos es necesario que no se anule, para esos valores, la segunda derivada).

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x^2+x-2)^2 - (x^2-4x)\cdot 2\cdot(x^2+x-2)\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^4} =$$

$$= \frac{(2x-4)(x^2+x-2) - (x^2-4x)\cdot 2\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^3} =$$

$$= \frac{2x^3+2x^2-4x-4x^2-4x+8-2(2x^3+x^2-8x^2-4x)}{(x^2+x-2)^3} =$$

$$= \frac{2x^3-2x^2-8x+8-4x^3+14x^2+8x}{(x^2+x-2)^3} = \frac{-2x^3+12x^2+8}{(x^2+x-2)^3} = \underline{\frac{-2(x^3-6x^2-4)}{(x^2+x-2)^3} = f''(x)}$$

$$f''(0) = \frac{8}{-8} = -1 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Máx(0,\ 0)}} \qquad f''(4) = \frac{-2(64-96-4)}{+} = \frac{+}{+} > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Mín\left(4,\ \frac{8}{9}\right)}}$$

****

BLOQUE D

Cuestión D.- ¿Cuándo se dice que una función P(x) es una primitiva de f(x)? Encontrar una primitiva de las siguientes funciones $f(x)=\frac{x}{(x-2)(x+1)}$; $g(x)=x\cdot e^x$.

Se dice que P(x) es una función primitiva de f(x) si y sólo si la derivada de P(x) es igual a f(x), o sea: P'(x) = f(x).

Como quiera que todas las funciones que se diferencian en una constante tienen la misma derivada, existen infinitas funciones primitivas de f(x). A este conjunto de las infinitas funciones primitivas se denomina integral indefinida de f(x) y se expresa de la forma $P(x)=\int f(x)\cdot dx$.

$$I_1=\int f(x)\cdot dx=\int\frac{x}{(x-2)(x+1)}\cdot dx=\int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}\right)\cdot dx \Rightarrow \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}=$$

$$=\frac{Ax+A+Bx-2B}{(x-2)(x+1)}=\frac{(A+B)x+(A-2B)}{(x-2)(x+1)}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l|l} A+B=1 & -A-B=-1 \\ A-2B=0 & A-2B=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r} B=\frac{1}{3} \\ A=\frac{2}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1=\frac{2}{3}\int\frac{1}{x-2}\cdot dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}\cdot dx=\frac{2}{3}L(x-2)+\frac{1}{3}L(x+1)+C=\underline{\underline{L\sqrt[3]{(x-2)^2(x+1)}+C=I_1}}$$

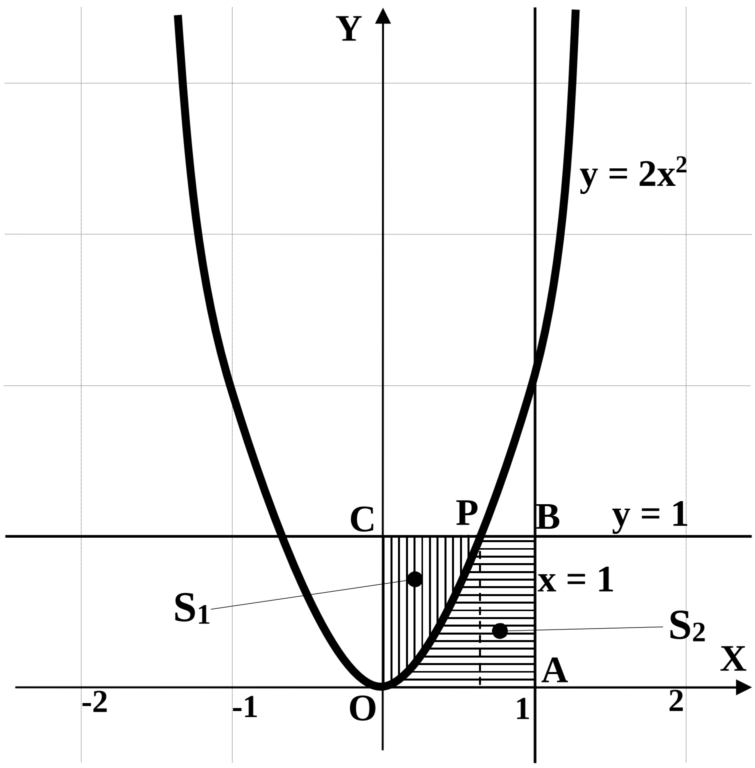
$$I_2=\int g(x)\cdot dx=\int x\cdot e^x\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{array}{c} x=u\rightarrow dx=du \\ e^x\cdot dx=dv\rightarrow v=e^x\end{array}\right\}\Rightarrow I_2=x\cdot e^x-\int e^x\cdot dx=$$

$$=x\cdot e^x-e^x+C=\underline{\underline{e^x(x-1)+C=I_2}}$$

Nota: La segunda de las integrales se ha hecho por el método denominado "por partes", cuya fórmula es: $\int u\cdot dv=u\cdot v-\int v\cdot du$.

****

Problema D.- La curva $y = 2x^2$ divide al cuadrado de vértices O(0, 0), A(1, 0), B(1, 1) y C(0, 1) en dos recintos. Dibujar dichos recintos y hallar el área de cada uno de ellos.



El punto P es la intersección de la curva $y = 2x^2$ con la recta y = 1:

$$P \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} y = 2x^2 \\ y = 1 \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; 2x^2 = 1 \;;;\; x^2 = \frac{1}{2} \;;;\; x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\, 1\right)}}$$

$$S_1 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 1 \cdot dx - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2x^2 \cdot dx = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(1 - 2x^2\right) \cdot dx = \left[x - \frac{2x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{3} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{3-1}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{3}\; u^2 = S_1}}$$

$$S_2 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2x^2 \cdot dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} 1 \cdot dx = \left[\frac{2x^3}{3} \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} + \left[x\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} = 0 - \frac{2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{3} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}}{3} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 + 3\sqrt{2} - 3}{3\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} - 2}{3\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot 2 - 2\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \underline{\underline{\frac{3 - \sqrt{2}}{3}\; u^2 = S_2}}$$

****

BLOQUE E

Cuestión E.- En una caja hay monedas de tres tipos: de dos euros, de un euro y de cincuenta céntimos de euro. Se sabe que en total hay 33 monedas y el valor conjunto de todas ellas es de 40 euros. ¿Se puede determinar el número de cada tipo de monedas?. Si la respuesta es afirmativa, encontrar el número de cada uno de los tipos de moneda. Si la respuesta es negativa, encontrar al menos dos conjuntos diferentes de 33 monedas de los tipos descritos de manera que el valor total sea de 40 euros.

$$\text{Llamando} \Rightarrow \begin{cases} x \to n^{o} \;\; de \;\; monedas \;\; de \;\; 2 \;\; euros \\ y \to n^{o} \;\; de \;\; monedas \;\; de \;\; 1 \;\; euro \\ z \to n^{o} \;\; de \;\; monedas \;\; de \;\; 0'5 \;\; euros \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=33 \\ 2x+y+0'5z=40 \end{array}\right\} \Rightarrow \;\; \text{Sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas.}$$

Aplicando el Teorema de Rouché, siempre tiene solución, ya que el rango de la matriz de coeficientes es igual que el rango de la matriz ampliada, en este caso, 2. Al ser menor el rango que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

Para resolverlo se parametriza una de las incógnitas, por ejemplo z, y se resuelve el sistema resultante en función del parámetro:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=33 \\ 2x+y+0'5z=40 \end{array}\right\} \Rightarrow \;\; \underline{z=k} \;\; \left\{\begin{array}{l} x+y=33-k \\ 2x+y=40-0'5k \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to y=33-k-x \\ \to \;\; y=40-0'5k-2x \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 33-k-x=40-0'5k-2x \;\; ;; \;\; \underline{x=7+0'5k} \;\; ;; \;\; y=33-k-7-0'5k=\underline{26-1'5k=y}$$

Los valores que puede tener k son, en principio naturales, y además, debemos tener en cuenta que tiene que ser par para que x e y sean naturales.

Los conjuntos de soluciones posibles son los siguientes:

$$k=2 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x=8}} \\ \underline{\underline{y=23}} \\ \underline{\underline{z=2}} \end{cases} \qquad k=4 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x=9}} \\ \underline{\underline{y=20}} \\ \underline{\underline{z=4}} \end{cases} \qquad k=6 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x=10}} \\ \underline{\underline{y=17}} \\ \underline{\underline{z=6}} \end{cases} \qquad k=8 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x=11}} \\ \underline{\underline{y=14}} \\ \underline{\underline{z=8}} \end{cases}$$

$$k=10 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x=12}} \\ \underline{\underline{y=11}} \\ \underline{\underline{z=10}} \end{cases} \qquad k=12 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x=13}} \\ \underline{\underline{y=8}} \\ \underline{\underline{z=12}} \end{cases} \qquad k=14 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x=14}} \\ \underline{\underline{y=5}} \\ \underline{\underline{z=14}} \end{cases} \qquad k=16 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x=15}} \\ \underline{\underline{y=2}} \\ \underline{\underline{z=16}} \end{cases}$$

(Para k = 18 resulta un valor negativo de y, que carece de sentido lógico)

****

Problema E.- Encontrar la última cifra del número $N = 7^{160} + 13^{14}$.

Las terminaciones de las sucesivas potencias de 7 son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 7^0 \xrightarrow{TERMINA} 1 \\ 7^1 \xrightarrow{TERMINA} 7 \\ 7^2 \xrightarrow{TERMINA} 9 \\ 7^3 \xrightarrow{TERMINA} 3 \\ 7^4 \xrightarrow{TERMINA} 1 \\ 7^5 \xrightarrow{TERMINA} 7 \\ \quad \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \Rightarrow 7^N \xrightarrow{TERMINA} r \Rightarrow \quad \begin{array}{l|l} N & 4 \\ \hline r & c \end{array}$$

En el caso que nos ocupa, 7^{160} termina en el mismo número que 7^0, o sea, en 1.

Las terminaciones de las sucesivas potencias de 7 son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 13^0 \xrightarrow{TERMINA} 1 \\ 13^1 \xrightarrow{TERMINA} 7 \\ 13^2 \xrightarrow{TERMINA} 9 \\ 13^3 \xrightarrow{TERMINA} 3 \\ 13^4 \xrightarrow{TERMINA} 1 \\ 13^5 \xrightarrow{TERMINA} 7 \\ \quad \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \Rightarrow 13^N \xrightarrow{TERMINA} r \Rightarrow \quad \begin{array}{l|l} N & 4 \\ \hline r & c \end{array}$$

En el caso que nos ocupa, 13^{14} termina en el mismo número que 13^2, o sea, en 9.

$$\underline{\underline{El\ \ número\ \ N = 7^{160} + 13^{14}\ \ ter\min a\ en\ 0}}$$

****