PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO

JULIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no sean programables.

OPCIÓN A

1º) Consideramos la función lineal $F(x,y)=15x+6y$ definida en el plano XY y las siguientes restricciones: $6\le 2x+3y\le 29,\ 0\le y\le -1+2x,\ 5x+2y\le 45.$

a) Dibujar en el plano XY la región de soluciones factibles que cumplen las restricciones.

b) Hallar los máximos y mínimos de la función $F(x,y)$ en la región descrita en el apartado anterior.

----

a)

El conjunto de restricciones son las siguientes: $\begin{cases} 2x+3y\ge 6 \\ 2x+3y\le 29 \\ 2x-y\ge 1 \\ 5x+2y\le 45 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$.

La función de objetivos es la siguiente: $F(x,y)=15x+6y$.

① $\Rightarrow 2x+3y\ge 6 \Rightarrow y\ge \frac{6-2x}{3} \Rightarrow O(0,0)\to No.$

x	0	3
y	3	0

② $\Rightarrow 2x+3y\le 29 \Rightarrow y\le \frac{29-2x}{3} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	10	4
y	3	7

③ $\Rightarrow 2x-y\ge 1 \Rightarrow y\le 2x-1 \Rightarrow O(0,0)\to No.$

x	5	2
y	9	3

④ $\Rightarrow 5x+2y\le 45 \Rightarrow y\le \frac{45-5x}{2} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	0	4
y	10	0

La región factible se indica en la figura.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

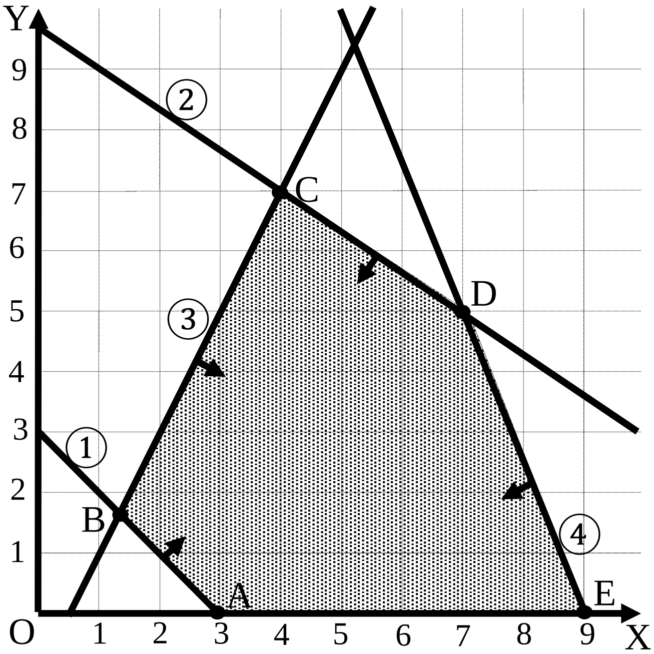
$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2x + 3y = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A(3, 0)}.$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 6 \\ 2x - y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{B\left(\frac{9}{8}, \frac{5}{4}\right)}.$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ 2x + 3y = 29 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C(4, 7)}.$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 29 \\ 5x + 2y = 45 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{D(7, 5)}.$

$E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 5x + 2y = 45 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{E(9, 0)}.$



$b)$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(3, 0) = 15 \cdot 3 + 6 \cdot 0 = 45 + 0 = 45.$

$B \Rightarrow f\left(\frac{9}{8}, \frac{5}{4}\right) = 15 \cdot \frac{9}{8} + 6 \cdot \frac{5}{4} = \frac{135}{8} + \frac{60}{8} = \frac{195}{8} = \mathbf{24,375} \Rightarrow \boldsymbol{Mínimo}.$

$C \Rightarrow f(4, 7) = 15 \cdot 4 + 6 \cdot 7 = 60 + 42 = 102.$

$D \Rightarrow f(7, 5) = 15 \cdot 7 + 6 \cdot 5 = 105 + 30 = \mathbf{135} \Rightarrow \boldsymbol{Máximo}.$

$E \Rightarrow f(9, 0) = 15 \cdot 9 + 6 \cdot 0 = 135 + 0 = \mathbf{135} \Rightarrow \boldsymbol{Máximo}.$

$\underline{El\ mínimo\ se\ produce\ en\ el\ punto\ B\ y\ su\ valor\ es\ 24{,}375}.$

$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ en\ todos\ los\ puntos\ del\ intervalo\ (3, 9)\ de\ X\ y\ es\ 135.}$

****

2º) El polinomio cúbico $f(x) = ax^3 + bx - 22$ pasa por el punto $P(1,0)$ y tiene un máximo en $x = 2$. Responder las siguientes preguntas:

a) Encontrar con la información anterior los coeficientes a y b.

b) Encontrar el mínimo y el máximo de la función $f(x)$ y hacer un esbozo de la gráfica del polinomio con todas las características significativas.

----

a)

Por pasar por $P(1,0) \Rightarrow f(1) = 0$:

$f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1 - 22 = 0;\ \ a + b = 22.$ (1)

$f'(x) = 3ax^2 + b.$

Por tener un máximo en $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0$:

$f'(2) = 3a \cdot 2^2 + b = 0;\ \ 12a + b = 0.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 22 \\ 12a + b = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -a - b = -22 \\ 12a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 11a = -22 \Rightarrow \underline{a = -2}.\ \underline{b = 24}.$$

$$\underline{f(x) = -2x^3 + 24x - 22.}$$

b)

$f(2) = -2 \cdot 2^3 + 24 \cdot 2 - 22 = -16 + 48 - 22 = 10 \Rightarrow \boldsymbol{M}\text{á}\boldsymbol{x}: \boldsymbol{P(2, 10)}.$

$f'(x) = -6x^2 + 24 = -6(x^2 - 4) = -6(x - 2)(x + 2).$

La segunda raíz de la primera derivada es $x_2 = -2$. (la primera es x = 2).

$f(-2) = -2 \cdot (-2)^3 + 24 \cdot (-2) - 22 = 16 - 48 - 22 = -54.$

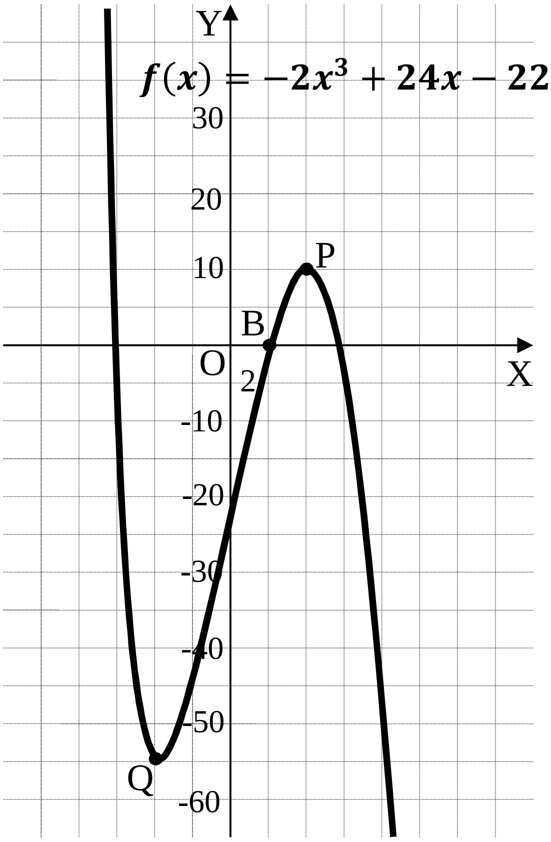
$$\underline{El\ punto\ mínimo\ pedido\ es\ Q(-2, -54).}$$

Para hacer un esbozo de la gráfica del polinomio tenemos en cuenta que su dominio es R y que corta a los ejes de coordenadas en los puntos siguientes:

$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \rightarrow A(0, -22).$

$Eje\ X \Rightarrow f(x) = y = 0;\ -2x^3 + 24x - 22 = 0.$ Resolviendo por Ruffini se obtiene una primera raíz x = 1, por lo cual el punto $B(1,0)$ es de corte con X; los otros dos puntos de corte son valores irracionales.

La representación gráfica, aproximada, del polinomio es la siguiente:



****

3º) Un productor de Ecuador y otro de Brasil trasladan cajas idénticas de una tonelada (tn) de peso a un almacén. Cada caja puede contener plátanos o café. El productor de Brasil aporta 600 cajas de plátanos y 1.200 de café y el de Ecuador aporta 750 cajas de plátanos y un número desconocido de cajas de café. Responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántas toneladas de café habrá aportado Ecuador si el café es el 60 % del contenido del almacén?

Un cliente compra café de Ecuador dejando sólo 400 tn de este producto en el almacén.

b) Si alguien elige al azar consecutivamente dos cajas, ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo país?

c) ¿Qué probabilidad hay de que si una caja elegida al azar es de plátanos, su origen sea Ecuador?

----

a)

Sean x el número de cajas de café de Ecuador.

El nº total de cajas en el almacén es: $600 + 1.200 + 750 + x = 2.550 + x$.

El nº total de cajas de café es: $1.200 + x$.

Como el café supone el 60 % del total de cajas del almacén, ha de ser:

$1.200 + x = 0{,}6 \cdot (2.550 + x)$.

$1.200 + x = 1.530 + 0{,}6x;\;\; x - 0{,}6x = 1.530 - 1.200;\;\; 0{,}4x = 330;$

$4x = 3.300;\;\; x = \frac{3.300}{4} = 825.$

$$\underline{Ecuador\ ha\ aportado\ 825\ cajas\ de\ café.}$$

b)

Después de la compra del cliente queda en el almacén:

De Brasil: 600 cajas de plátanos y 1.200 cajas de café $\Rightarrow Total$: 1.800.

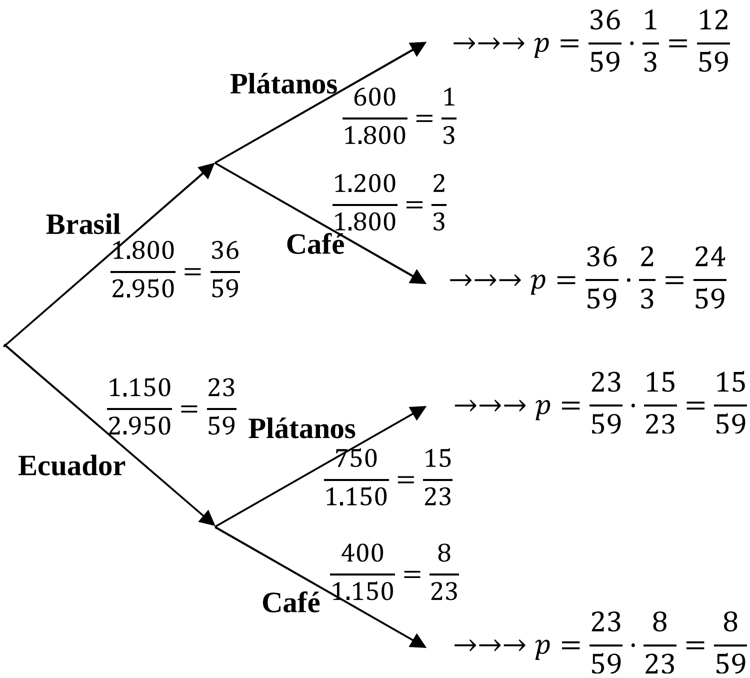
De Ecuador: 750 cajas de plátanos y 400 cajas de café $\Rightarrow Total$: 1.150.

El número total de cajas en el almacén es: $1.800 + 1.150 = 2.950$.

Teniendo en cuanta las simplificaciones que se efectúan a continuación, el diagrama del árbol que resume la situación es el que se indica.

$$\frac{1.800}{2.950} = \frac{180}{295} = \frac{36}{59}. \quad \frac{600}{1.800} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}. \quad \frac{1.200}{1.800} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

$$\frac{1.150}{2.950} = \frac{115}{295} = \frac{23}{59}. \quad \frac{750}{1.150} = \frac{75}{115} = \frac{15}{23}. \quad \frac{400}{1.150} = \frac{40}{115} = \frac{8}{23}$$



$$P = \frac{1.800}{2950} \cdot \frac{1.799}{2949} + \frac{1.150}{2950} \cdot \frac{1.149}{2949} = \frac{3.238.200+1.321.350}{8.699.550} = \frac{4.559.550}{8.699.550} = \underline{0,5241}.$$

$c)$

$$P = \frac{\frac{15}{59}}{\frac{12}{59}+\frac{15}{59}} = \frac{15}{12+15} = \frac{15}{27} = \frac{5}{9} = \underline{0,5556}.$$

****

4º) En una muestra de 300 universitarios al 80 % ha respondido que acude semanalmente al cine.

a) ¿Entre qué valores se encuentra, con un nivel de confianza del 95 %, la proporción del total de universitarios que acude todas las semanas al cine?

b) ¿Y el intervalo para la proporción anterior con un nivel de confianza del 99 %?

----

a)

$n = 300;\ \ p = 0{,}8;\ \ q = 0{,}2.$

$1-\alpha = 0{,}95\ \rightarrow\ \alpha = 1-0{,}95 = 0{,}05\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = \mathbf{1{,}96}.$
$1-0{,}025 = 0{,}975\ \rightarrow z = 1{,}96).$

Ahora se aplica la fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, que es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}8 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{300}}, 0'8 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{300}}\right);\ \left(0{,}8 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}16}{300}}, 0'8 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}16}{300}}\right);$$

$$(0{,}8 - 1{,}96 \cdot 0{,}023, 0'8 + 1{,}96 \cdot 0{,}023);\ (0{,}8 - 0{,}045, 0'8 + 0{,}045).$$

$$\underline{Intervalo\ de\ confianza: (0'755, 0'845).}$$

b)

$1-\alpha = 0{,}99\ \rightarrow\ \alpha = 1-0{,}99 = 0{,}01\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}005} = \mathbf{2{,}575}.$
$1-0{,}005 = 0{,}995\ \rightarrow z = 2{,}575).$

$$(0{,}8 - 2{,}575 \cdot 0{,}023, 0'8 + 2{,}575 \cdot 0{,}023);\ (0{,}8 - 0{,}059, 0'8 + 0{,}059).$$

$$\underline{Intervalo\ de\ confianza: (0'741, 0'859).}$$

****

OPCIÓN B

1º) $a)$ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ a & b \end{pmatrix}$, determinar los valores de los parámetros a y b para que se verifique la ecuación matricial $A^2 = 2A$.

$b)$ Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular la matriz $D = B^{50} \cdot C^t$. (C^t es la matriz traspuesta de C).

$a)$

$$A^2 = 2A \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ a & b \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ a & b \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 9-3a & -9-3b \\ 3a+ab & -3a+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 2a & 2b \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 9-3a=6 \\ -9-3b=-6 \\ 3a+ab=2a \\ -3a+b^2=2b \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 3-a=2 \\ 3+b=2 \\ 3+b=2 \\ b^2=3a+2b \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = 1, b = -1.$

$$\underline{A^2 = 2A \Rightarrow a = 1 \ y \ b = -1}.$$

$b)$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{B^{50}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-50} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

$$D = B^{50} \cdot C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -50 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -48 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -48 & 1 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) A lo largo de la semana una planta potabilizadora de agua aporta al depósito municipal una cantidad de litros expresado por la función $p(x) = 10x^2 - 100x + 550$, donde $0 \leq x \leq 7$ representa el instante de la semana medido en días. De la misma manera, la demanda de agua se representa por la función $d(x) = -10x^2 + 80x + 240$. Por un lado el flujo de agua en el instante x es la diferencia entre lo aportado y lo extraído, es decir, $f(x) = p(x) - d(x)$ y por otro el excedente $e(r)$ es la cantidad de agua acumulada hasta el momento r, $e(r) = \int_0^r f(x) \cdot dx$. Responder:

a) ¿Cuál es el instante de mayor demanda?

b) ¿En qué intervalo de tiempo el flujo es negativo, es decir, el depósito se esta vaciando?

c) ¿Cuál es el excedente al final de la semana (r = 7)?

----

a)

El instante de mayor demanda será el valor de x que anule la primera derivada de la función demanda: $d(x) = -10x^2 + 80x + 240$.

$$d'(x) = -20x + 80 = 0 \;\Rightarrow\; -20x + 80 = 0;\; -x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4.$$

$\underline{\textit{La mayor demanda de agua se produce el cuarto día de la semana.}}$

b)

El depósito se estará vaciando cuando el aporte sea menor que el gasto, es decir, cuando sea negativa la función $f(x) = p(x) - d(x)$:

$$f(x) = p(x) - d(x) = 10x^2 - 100x + 550 - (-10x^2 + 80x + 240) =$$

$$= 10x^2 - 100x + 550 + 10x^2 - 80x - 240 = 20x^2 - 180x + 310.$$

Los puntos de corte con el eje de abscisas de la parábola convexa ($\cup$) obtenida son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 20x^2 - 180x + 310 = 0;\;\; 2x^2 - 18x + 31 = 0;$$

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 2 \cdot 31}}{2 \cdot 2} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 248}}{2 \cdot 2} = \frac{18 \pm \sqrt{76}}{4} = \frac{18 \pm \sqrt{4 \cdot 19}}{4} = \frac{18 \pm 2\sqrt{19}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{19}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x_1 = 2{,}32;\; x_2 = 6{,}68.$$

$\underline{\textit{El depósito se vacía en el intervalo } 2{,}32 < x < 6{,}68 \textit{ de la semana.}}$

c)

$$e(r) = \int_0^7 f(x) \cdot dx = \int_0^7 (20x^2 - 180x + 310) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{20x^3}{3} - \frac{180x^2}{2} + 310x\right]_0^7 = \left[\frac{20x^3}{3} - 90x^2 + 310x\right]_0^7 =$$

$$= \left(\frac{20 \cdot 7^3}{3} - 90 \cdot 7^2 + 310 \cdot 7\right) - 0 = \frac{6.860}{3} - 4.410 + 2.170 = \frac{6.860}{3} - 2.240 =$$

$$= \frac{6.860 - 6.720}{3} = \frac{140}{3} = 46{,}67.$$

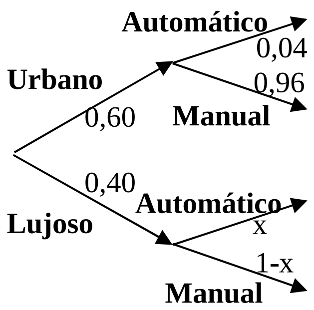
$$\underline{El\ excedente\ semanal\ es\ de\ 46{,}67\ litros}.$$

****

3º) Un concesionario vende vehículos de dos gamas: U (urbano) y L (lujoso). El 60 % son de la gama U; de éstos, el 40 % vienen con cambio automático (A), mientras que el resto de los de gama U son de cambio manual (M). En el stock total el porcentaje de vehículos con cambio automático A es el 5 % y de cambio manual M el 95 %.

a) Si se elige un vehículo al azar y tiene cambio automático, hallar la probabilidad de que sea urbano.

b) ¿Qué porcentaje de vehículos de lujo tienen cambio automático?



$\rightarrow p = 0{,}60 \cdot 0{,}04 = 0{,}024$

$\rightarrow p = 0{,}60 \cdot 0{,}96 = 0{,}576$

$\rightarrow p = 0{,}40 \cdot x = 0{,}026 \Rightarrow x = \frac{0{,}026}{0{,}40} = 0{,}065$

$\rightarrow p = 0{,}40 \cdot 0{,}935 = 0{,}374$

a)

$$P = P(U|A) = \frac{P(U \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}024}{0{,}024+0{,}026} = \frac{0{,}024}{0{,}05} = \underline{0{,}048}.$$

b)

$$P = P(A|L) = \frac{P(A \cap L)}{P(L)} = \frac{0{,}026}{0{,}4} = \frac{0{,}026}{0{,}4} = \underline{0{,}065 = 6{,}5\ \%}.$$

****

4º) Las calificaciones de 1.000 estudiantes sometidos a un test de inteligencia se distribuyen normalmente con media 70 y desviación típica 20. Calcular:

a) La probabilidad de que un estudiante obtenga más de 80 puntos.

b) La probabilidad de que un estudiante obtenga menos de 50 puntos.

c) ¿Cuál es, con una probabilidad del 95 %, la calificación máxima que se puede esperar alcanzar?

----

a)

$$Variable\ X \to N(70, 20).$$

$$Para\ n = 1.000 \to \overline{X} = N\left(70, \frac{20}{\sqrt{1.000}}\right) = N\left(70, \frac{20}{10\sqrt{10}}\right) = \boldsymbol{N(70, 0'63)}.$$

Tipificando: $Z = \frac{\overline{X}-70}{20}$.

$$P(\overline{X} > 80) = P\left(\frac{\overline{X}-70}{20} > \frac{80-70}{20}\right) = P\left(\frac{\overline{X}-70}{20} > \frac{10}{20}\right) = P(Z > 0,5) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0,5) = 1 - 0,6915 = \underline{0,3085}.$$

b)

$$P(\overline{X} < 50) = P\left(\frac{\overline{X}-70}{20} < \frac{50-70}{20}\right) = P\left(\frac{\overline{X}-70}{20} < \frac{-20}{20}\right) = P(Z < -1) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = \underline{0,1587}.$$

c)

El valor correspondiente en la tabla del 95 % $= 0,9500\ es\ 1,645$.

$$P(\overline{X} \leq n) = 0,95 \Rightarrow P\left(\frac{\overline{X}-70}{20} \leq \frac{n-70}{20}\right) = 0,95 \Rightarrow \frac{n-70}{20} = 1,645;$$

$$n - 70 = 20 \cdot 1,645 = 32,9 \ \Rightarrow \ \underline{n = 102,9}.$$

****