CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**PAU** **SETEMBRO 2014**	**Código: 25**

FÍSICA

Puntuación máxima: Cuestiones 4 puntos (1 cada cuestión, teórica o práctica). Problemas 6 puntos (1 cada apartado).
No se valorará la simple anotación de un ítem cómo solución a las cuestiones; han de ser razonadas.
Se puede usar calculadora siempre que no sea programable ni memorice texto. El alumno elegirá una de las dos opciones.

OPCIÓN A

C.1. Un conductor macizo de forma esférica recibe una carga eléctrica ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?: A) La carga se distribuye por todo el conductor. B) El potencial es cero en todos los puntos del conductor. C) En el interior del conductor no hay campo electrostático.

C.2. Por dos conductores paralelos e indefinidos, separados una distancia d, circulan corrientes en sentido contrario de diferente valor, una el doble de la otra. La inducción magnética se anula en un punto del plano de los conductores situado: A) Entre ambos conductores. B) Fuera de los conductores y del lado del conductor que transporta más corriente. C) Fuera de los conductores y del lado del conductor que transporta menos corriente.

C.3. Si se duplica la frecuencia de la radiación que incide sobre un metal: A) Se duplica la energía cinética de los electrones extraídos. B) La energía cinética de los electrones extraídos no experimenta modificación. C) No es cierta ninguna de las opciones anteriores.

C.4. Determina la aceleración de la gravedad a partir de los siguientes datos experimentales.

EXPERIENCIA	1ª	2ª	3ª	4ª
Longitud del péndulo (m)	0,90	1,10	1,30	1,50
Tiempo 10 oscilaciones (s)	18,93	21,14	22,87	24,75

P.1. Ceres es el planeta enano más pequeño del sistema solar y tiene un periodo orbital alrededor del Sol de 4,60 años, una masa de $9{,}43\cdot10^{20}$ kg y un radio de 477 km. Calcular: a) El valor de la intensidad del campo gravitatorio que Ceres crea en su superficie. b) La energía mínima que ha de tener una nave espacial de 1000 kg de masa para que, saliendo de la superficie, pueda escapar totalmente de la atracción gravitatoria del planeta. c) La distancia media entre Ceres y el Sol, teniendo en cuenta que la distancia media entre la Tierra y el Sol es de $1{,}50\cdot10^{11}$ m y que el período orbital de la Tierra alrededor del Sol es de un año. (Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²·kg⁻²).

P.2. Un rayo de luz de frecuencia $5\cdot10^{14}$ Hz incide, con un ángulo de incidencia de 30°, sobre una lámina de vidrio de caras plano-paralelas de espesor 10 cm. Sabiendo que el índice de refracción del vidrio es 1,50 y el del aire 1,00: a) Enuncia las leyes de la refracción y dibuja la marcha de los rayos en el aire y en el interior de la lámina de vidrio. b) Calcula la longitud de onda de la luz en el aire y en el vidrio, y la longitud recorrida por el rayo en el interior de la lámina. c) Halla el ángulo que forma el rayo de luz con la normal cuando emerge de nuevo al aire. DATO: $c = 3{,}00\cdot10^{8}$ m/s.

OPCIÓN B

C.1. Un planeta gira alrededor del Sol con una trayectoria elíptica. El punto de dicha trayectoria en el que la velocidad orbital del planeta es máxima es: A) En el punto más próximo al Sol. B) En el punto más alejado del Sol. C) Ninguno de los puntos citados.

C.2. Un protón y una partícula α ($q_\alpha = 2\ q_p$; $m_\alpha = 4\ m_p$) penetran, con la misma velocidad, en un campo magnético uniforme perpendicularmente a las líneas de inducción. Estas partículas: A) Atraviesan el campo sin desviarse. B) El protón describe una órbita circular de mayor radio. C) La partícula alfa describe una órbita circular de mayor radio.

C.3. En la formación del núcleo de un átomo: A) Disminuye la masa y se desprende energía. B) Aumenta la masa y se absorbe energía. C) En unos casos sucede la opción A) y en otros casos la B).

C.4. En el laboratorio trabajas con lentes convergentes y recoges en una pantalla las imágenes de un objeto. Explica lo que sucede, ayudándote del diagrama de rayos, cuando sitúas el objeto a una distancia de la lente inferior a su distancia focal.

P.1. Se cuelga un cuerpo de 10 kg de masa de un resorte y se alarga 2,0 cm. Después se le añaden otros 10 kg y se le da un tirón hacia abajo, de modo que el sistema comienza a oscilar con una amplitud de 3,0 cm. a) Calcula la constante elástica del resorte y la frecuencia del movimiento. b) Escribe, en función del tiempo, las ecuaciones de la elongación, velocidad, aceleración y fuerza. c) Calcula la energía cinética y la energía potencial elástica a los 2 s de haber empezado a oscilar. ($g = 9{,}8$ m/s²).

P.2. Dos cargas puntuales iguales de +2 µC se encuentran en los puntos (0, 1) m y (0, −1) m. Calcula: a) El vector campo y el potencial electrostático en el punto (−3, 0) m. b) Halla el trabajo necesario para trasladar una carga de +3 µC desde el infinito al citado punto. Si en el punto (−3, 0) m se abandona una carga de −2 µC y masa l g: c) Calcula su velocidad en el origen de coordenadas. DATO: $K = 9\cdot10^{9}$ N·m²·C⁻².

Soluciones

OPCIÓN A

C.1. Un conductor macizo de forma esférica recibe una carga eléctrica ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?:
A) La carga se distribuye por todo el conductor.
B) El potencial es cero en todos los puntos del conductor.
C) En el interior del conductor no hay campo electrostático.

(P.A.U. Sep. 14)

Solución: C

La intensidad $\overline{\boldsymbol{E}}$ de campo electrostático en el interior de un conductor metálico en equilibrio es nula. Si no fuese así, las cargas se desplazarían debido a la fuerza del campo.

Las otras opciones:
B: Falsa.
La diferencia de potencial entre dos puntos $V_1 - V_2$ es:

$$V_1 - V_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{\boldsymbol{E}}\, \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}$$

Al ser nula la intensidad del campo, también lo será la diferencia de potencial entre dos puntos:

$$V_1 - V_2 = 0$$

O sea, el potencial será constante:

$$V_1 = V_2$$

Pero no es nulo, porque en un punto de la superficie, el campo ya no es cero, sino igual al producido por la carga como si estuviese concentrada en el centro de la esfera de radio r:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = K \frac{Q}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

El potencial en la superficie, y también en el interior de la esfera, es igual al que produciría toda la carga concentrada en el centro de la esfera:

$$V = K \frac{Q}{r} \neq 0$$

C: Falsa.
La carga se distribuye por la superficie de la esfera.
Si hubiese carga en el interior del conductor, esta crearía un campo eléctrico que produciría el movimiento de las cargas y el conductor ya no estaría en equilibrio.

C.2. Por dos conductores paralelos e indefinidos, separados una distancia d, circulan corrientes en sentido contrario de diferente valor, una el doble de la otra. La inducción magnética se anula en un punto del plano de los conductores situado:
A) Entre ambos conductores.
B) Fuera de los conductores y del lado del conductor que transporta más corriente.
C) Fuera de los conductores y del lado del conductor que transporta menos corriente.

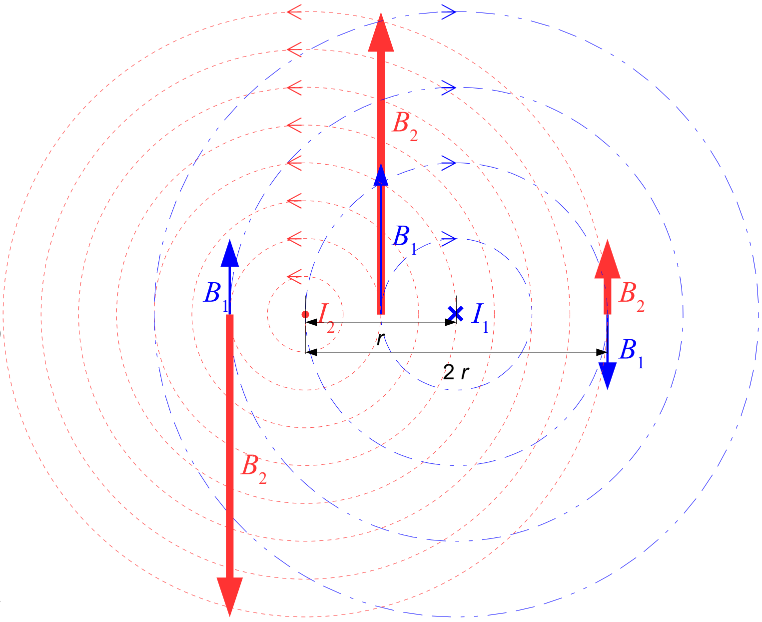
(P.A.U. Sep. 14)

Solución: C

La ley de Biot - Savart dice que el campo magnético creado en un punto por un conductor rectilíneo indefinido por el que pasa una intensidad de corriente I, en un punto que se encuentra a una distancia r del conductor es directamente proporcional a la intensidad de corriente e inversamente proporcional a la distancia a la que se encuentra el punto del conductor.

$$B=\frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}$$

Las líneas del campo magnético son circulares alrededor del conductor.
La dirección del campo magnético viene dada por la regla de la mano derecha, que dice que si colocamos el pulgar en el sentido de la corriente, el sentido del campo magnético es el de los otros dedos al cerrar la mano.



En la figura se representan los campos magnéticos creados por los dos conductores, el que lleva la corriente I_1 hacia dentro y el que lleva la corriente I_2 hacia afuera y del doble de intensidad.
En la zona situada entre ambos conductores, los campos magnéticos creados por las corrientes paralelas de los hilos son del mismo sentido, por lo que el campo resultante nunca será nulo.
En la zona exterior del lado de I_2 (izquierda) que transporta el doble de corriente, el campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}_2$ creado por la corriente de ese conductor siempre será mayor que el creado por el de I_1, que se encuentra más alejado.
En la zona exterior del lado de I_1 (derecha), los puntos se encuentran más cerca del conductor 1 que del conductor 2, y los campos magnéticos de ambos pueden ser del mismo valor, y como son de sentido opuesto, pueden anularse en algún punto.
La distancia x de este punto al conductor que lleva I_2 debe cumplir la condición

$$B_2 = B_1$$

$$\frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \cdot x}=\frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi (x-r)}$$

$$(x - r)\ I_2 = x \cdot I_1$$

Como $I_2 = 2\ I_1$, queda

$$(x - r) \cdot 2\ I_1 = x \cdot I_1$$

$$x = 2\ r$$

C.3. Si se duplica la frecuencia de la radiación que incide sobre un metal:
A) Se duplica la energía cinética de los electrones extraídos.
B) La energía cinética de los electrones extraídos no experimenta modificación.
C) No es cierta ninguna de las opciones anteriores.

(P.A.U. Sep. 14)

Solución: C

Interpretación de Einstein del efecto fotoeléctrico.

Cuando la luz interacciona con el metal de la célula fotoeléctrica lo hace como si fuese un chorro de partículas llamadas fotones (paquetes de energía).
Cada fotón choca con un electrón y le transmite toda su energía.
Para que ocurra efecto fotoeléctrico, los electrones emitidos deben tener energía suficiente para llegar al anticátodo, lo que ocurre cuando la energía del fotón es mayor que el trabajo de extracción, que es una característica del metal.
La ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico puede escribirse:

$$E_f = W_e + E_c$$

En la ecuación, E_f representa la energía del fotón incidente, W_e el trabajo de extracción del metal y E_c la energía cinética máxima de los electrones (fotoelectrones) emitidos.
La energía que lleva un fotón de frecuencia f es:

$$E_f = h \cdot f$$

En esta ecuación, h es la constante de Planck y tiene un valor muy pequeño: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J·s
La energía cinética máxima de los electrones emitidos será:

$$E_c = E_f - W_e$$

Por lo tanto, si se duplica la frecuencia de la radiación incidente, se duplica la energía de los fotones, y se hace mayor la energía cinética (y la velocidad) de los electrones emitidos.
Por tanto, la opción B es falsa.
Pero como no hay proporcionalidad entre la energía cinética y la energía del fotón, la opción A también es falsa.

C.4. Determina la aceleración de la gravedad a partir de los siguientes datos experimentales.

EXPERIENCIA	1ª	2ª	3ª	4ª
Longitud del péndulo (m)	0,90	1,10	1,30	1,50
Tiempo 10 oscilaciones (s)	18,93	21,14	22,87	24,75

(P.A.U. Sep. 14)

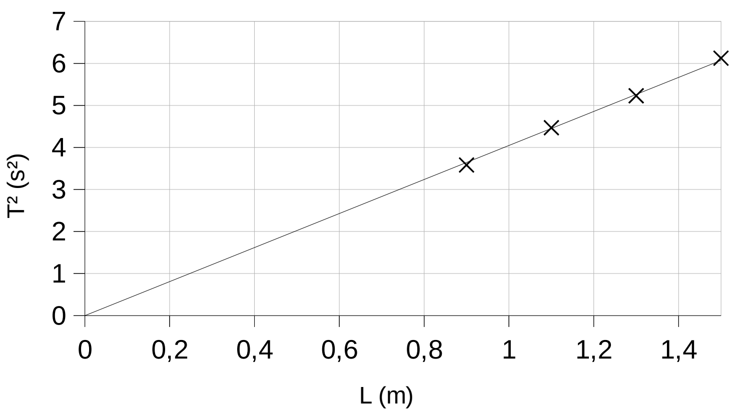
Solución:

La ecuación del período de un péndulo es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Al representar los cuadrados de los períodos T^2 frente a las longitudes L se obtiene una recta.
Se construye una tabla para calcular los valores de T^2 y g ($g = 4\ \pi^2\ L\ /\ T^2$)

L (m)	t_{10} (s)	T (s)	T^2 (s²)	g (m·s⁻²)
0,90	18,93	1,893	3,59	9,92
1,10	21,14	2,114	4,47	9,72
1,30	22,87	2,287	5,23	9,81
1,50	24,75	2,475	6,13	9,67



El valor medio de g calculado de los valores de la tabla es:

$$g_m = 9{,}78 \text{ m·s}^{-2}$$

La pendiente de la recta obtenida mediante un ajuste por mínimos cuadrados vale:

$$p = 4{,}05 \text{ s}^2/\text{m}$$

De la ecuación del período, la relación de la pendiente con el valor de la aceleración de la gravedad es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow p = \frac{\Delta T^2}{\Delta L} = \frac{4\pi^2}{g} \Rightarrow$$

$$g = \frac{4\pi^2}{p}$$

$$g = 9{,}75 \text{ m·s}^{-2}$$

Es un resultado similar al del valor medio de g.

P.1. Ceres es el planeta enano más pequeño del sistema solar y tiene un periodo orbital alrededor del Sol de 4,60 años, una masa de $9{,}43·10^{20}$ kg y un radio de 477 km. Calcula:

a) El valor de la intensidad del campo gravitatorio que Ceres crea en su superficie.

b) La energía mínima que ha de tener una nave espacial de 1000 kg de masa para que, saliendo de la superficie, pueda escapar totalmente de la atracción gravitatoria del planeta.

c) La distancia media entre Ceres y el Sol, teniendo en cuenta que la distancia media entre la Tierra y el Sol es de $1{,}50·10^{11}$ m y que el período orbital de la Tierra alrededor del Sol es de un año.

Dato: $G = 6{,}67×10^{-11}$ N·m²·kg⁻². *(P.A.U. Sep. 14)*

Rta.: a) $g = 0{,}277$ m/s²; b) $\Delta E = 1{,}32·10^{8}$ J; c) $d = 4{,}15·10^{11}$ m.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Período orbital de Ceres	$T_1 = 4{,}60$ años $= 1{,}45·10^{8}$ s
Masa de Ceres	$M = 9{,}43·10^{20}$ kg
Radio de Ceres	$R = 477$ km $= 4{,}77·10^{5}$ m
Masa de la nave espacial	$m = 1000$ kg
Distancia de la Tierra al Sol	$r_2 = 1{,}50·10^{11}$ m
Período orbital de la Tierra	$T_2 = 1{,}00$ años $= 3{,}16·10^{7}$ s
Constante de la gravitación universal	$G = 6{,}67·10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Incógnitas	
Intensidad del campo gravitatorio en la superficie de Ceres	g
Energía de la nave espacial en la superficie de Ceres para escapar	ΔE
Distancia media entre Ceres y el Sol	r_1
Otros símbolos	
Masa del Sol	M
Ecuaciones	
Velocidad de un satélite a una distancia r del centro de un astro de masa M	$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$F_G=G\frac{M\,m}{r^2}$
Energía cinética	$E_c = ½\, m · v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) La intensidad del campo gravitatorio creado por la masa esférica M del planeta (enano) Ceres en su superficie, a una distancia R de su centro es la fuerza gravitatoria sobre la unidad de masa:

$$g=\frac{F_G}{m}=\frac{G\frac{M\cdot \cancel{m}}{R^2}}{\cancel{m}}=G\frac{M}{R^2}=6{,}67\cdot 10^{-11}\ [\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\ \frac{9{,}43\cdot 10^{20}\ [\text{kg}]}{(4{,}77\cdot 10^{5}\ [\text{m}])^2}=0{,}277\ \text{m/s}^2$$

b) La energía potencial de la nave espacial en la superficie de Ceres valdrá:

$$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}\ =-6{,}67\cdot 10^{-11}[\text{N·m}^2\cdot\text{kg}^{-2}]\ \frac{9{,}43\cdot 10^{20}\ [\text{kg}]\cdot 1000\ [\text{kg}]}{4{,}77\cdot 10^{5}\ [\text{m}]}=-1{,}32\cdot 10^{8}\ [\text{J}]$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial.
La energía potencial de la nave espacial a una distancia muy grande de Ceres será nula.
La energía mínima que ha de tener en la superficie será la que corresponde a una energía cinética nula muy lejos de Ceres.
Por tanto la energía mecánica que tendrá la nave espacial muy lejos de Ceres será nula.
La energía que ha tener será:

$$\Delta E = E_\infty - E_p = 0 - (-1{,}32·10^{8}\ [\text{J}]) = 1{,}32·10^{8}\ \text{J}$$

c) Tanto la Tierra como Ceres describen trayectorias aproximadamente circulares alrededor del Sol, pudiéndose considerar satélites del mismo.
La velocidad de un satélite que gira a una distancia r alrededor del centro de un astro de masa M es:

$$v=\sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

La velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T es:

$$v=\frac{2\pi \cdot r}{T}$$

Sustituyendo esta expresión en la anterior y elevando al cuadrado queda

$$\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2=\frac{G \cdot M}{r}$$

Reordenando

$$\frac{r^3}{T^2}=\frac{G \cdot M}{4\pi^2}$$

Aplicando esta ecuación tanto a la Tierra como a Ceres y dividiendo una entre la otra quedaría la tercera ley de Kepler

$$\frac{r_1^3}{T_1^2}=\frac{r_2^3}{T_2^2}$$

Aplicando esta ley entre la Tierra y Ceres

$$\frac{r_1^3}{(4{,}60\,[\text{año}])^2}=\frac{(1{,}50 \cdot 10^{11}\,[\text{m}])^3}{(1\,[\text{año}])^2}$$

La distancia media de Ceres al Sol vale

$$r_1=1{,}50 \cdot 10^{11}\,[\text{m}]\sqrt[3]{4{,}60^2}=4{,}15 \cdot 10^{11}\text{ m}$$

Análisis: El radio calculado de la órbita de Ceres sale mayor que el de la Tierra, como cabe esperar.

$$(r_1 = 4{,}15 \cdot 10^{11}\text{ m}) > (r_2 = 1{,}50 \cdot 10^{11}\text{ m})$$

P.2. Un rayo de luz de frecuencia $5 \cdot 10^{14}$ Hz incide, con un ángulo de incidencia de 30°, sobre una lámina de vidrio de caras plano-paralelas de espesor 10 cm. Sabiendo que el índice de refracción del vidrio es 1,50 y el del aire 1,00:
a) Enuncia las leyes de la refracción y dibuja la marcha de los rayos en el aire y en el interior de la lámina de vidrio.
b) Calcula la longitud de onda de la luz en el aire y en el vidrio, y la longitud recorrida por el rayo en el interior de la lámina.
c) Halla el ángulo que forma el rayo de luz con la normal cuando emerge de nuevo al aire.
Dato: $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s. *(P.A.U. Sep. 14)*
Rta.: b) $\lambda(\text{aire}) = 6{,}00 \cdot 10^{-7}$ m; $\lambda(\text{vidrio}) = 4{,}00 \cdot 10^{-7}$ m; L = 10,6 cm; c) $\alpha_2 = 30{,}0°$.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Frecuencia del rayo de luz	$f = 5{,}00 \cdot 10^{14}$ Hz
Ángulo de incidencia	$\theta_{i1} = 30{,}0°$
Espesor de la lámina de vidrio	e = 10,0 cm = 0,100 m
Índice de refracción del vidrio	$n_v = 1{,}50$
Índice de refracción del aire	$n_a = 1{,}00$
Velocidad de la luz en el vacío	$c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s
Incógnitas	
Longitud de onda de luz en el aire y en el vidrio	λ_a, λ_v
Longitud recorrida por el rayo de luz en el interior de la lámina	L
Ángulo de desviación del rayo al salir de la lámina	θ_{r2}

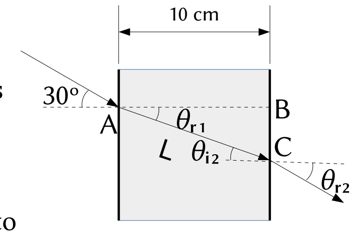
Ecuaciones

Índice de refracción de un medio $_i$ en el que la luz se desplaza a la velocidad v_i $n_i = \frac{c}{v_i}$

Relación entre la velocidad v, la longitud de onda λ y la frecuencia f $v = \lambda \cdot f$

Ley de Snell de la refracción $n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$

Solución:



a) Las leyes de Snell de la refracción son:
1ª El rayo incidente, el rayo refractado y la normal están en el mismo plano.
2ª La relación matemática entre los índices de refracción n_i y n_r de los medios incidente y refractado y los ángulos de incidencia y refracción θ_i y θ_r , es:

$$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$$

En la figura se representa la trayectoria de la luz. El rayo incidente en el punto A con un ángulo de incidencia θ_{i1} = 30° pasa del aire al vidrio dando un rayo refractado que forma el primer ángulo de refracción θ_{r1} y el segundo ángulo de incidencia θ_{i2} entre el vidrio y el aire. Finalmente sale de la lámina de vidrio por el punto B con el segundo ángulo de refracción θ_{r2}.

b) La velocidad de la luz en el aire es:

$$v_a = \frac{c}{n_a} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1{,}00} = 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Por tanto, la longitud de onda de la luz en el aire es:

$$\lambda_a = \frac{v_a}{f} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{5{,}00 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}} = 6{,}00 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 600 \text{ nm}$$

La velocidad de la luz en el vidrio es:

$$v_v = \frac{c}{n_v} = \frac{3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1{,}50} = 2{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Por tanto, la longitud de onda de la luz en el vidrio es:

$$\lambda_v = \frac{v_v}{f} = \frac{2{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{5{,}00 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}} = 4{,}00 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 400 \text{ nm}$$

Como el espesor de la lámina es de 10 cm, la longitud recorrida por el rayo es la hipotenusa L del triángulo ABC.
El primer ángulo de refracción θ_{r1} se puede calcular aplicando la ley de Snell

$$1{,}00 \cdot \text{sen } 30° = 1{,}50 \cdot \text{sen } \theta_{r1}$$

$$\text{sen}\, \theta_{r1} = \frac{1{,}00 \cdot \text{sen}\, 30°}{1{,}50} = 0{,}333$$

$$\theta_{r1} = \text{arcsen } 0{,}333 = 19{,}5°$$

Por tanto la hipotenusa L vale

$$L = \frac{e}{\cos \theta_{r1}} = \frac{10{,}0 \text{ [cm]}}{\cos 19{,}5°} = 10{,}6 \text{ cm}$$

c) Como la lámina de vidrio es de caras paralelas, el segundo ángulo de incidencia a_{i2} es igual al primer ángulo de refracción:

$$\theta_{i2} = \theta_{r1} = 19{,}5°$$

Para calcular el ángulo con el que sale de la lámina, se vuelve a aplicar la ley de Snell entre el vidrio (que ahora es el medio incidente) y el aire (que es el medio refractado):

$$1{,}50 \cdot \text{sen } 19{,}5° = 1{,}00 \cdot \text{sen } \theta_{r2}$$

$$\text{sen}\, \theta_{r2} = \frac{1{,}50 \cdot \text{sen}\, 19{,}5°}{1{,}00} = 0{,}500$$

$$\theta_{r2} = \text{arcsen } 0{,}500 = 30{,}0°$$

Análisis: Este resultado es correcto porque el rayo sale paralelo al rayo incidente original.

OPCIÓN B

C.1. Un planeta gira alrededor del Sol con una trayectoria elíptica. El punto de dicha trayectoria en el que la velocidad orbital del planeta es máxima es:
A) En el punto más próximo al Sol.
B) En el punto más alejado del Sol.
C) Ninguno de los puntos citados.

(P.A.U. Sep. 14)

Solución: A

La velocidad areolar de un planeta es el área que barre el radiovector que une el Sol con el planeta en la unidad de tiempo.
La segunda ley de Kepler puede enunciarse así:
El radiovector que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales
O sea, que la velocidad areolar es constante.

En un sistema de referencia con el Sol en el origen de coordenadas, la velocidad areolar será la derivada del área barrida por el vector de posición del planeta en la unidad de tiempo:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{A}}{dt}$$

El área barrida en un tiempo muy pequeño dt, es la mitad del producto vectorial del vector de posición $\overline{\boldsymbol{r}}$ del planeta por su vector desplazamiento d$\overline{\boldsymbol{r}}$.

$$d\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times d\vec{r})$$

La velocidad areolar puede expresarse así:

$$\vec{v}_A = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v}$$

Siendo $\overline{\boldsymbol{v}}$ el vector velocidad del planeta.
Como la velocidad areolar es constante, la expresión anterior se puede escribir en módulos:

$$|\overline{\boldsymbol{r}}| \cdot |\overline{\boldsymbol{v}}| \cdot \text{sen } \varphi = \text{constante}$$

Despreciando las variaciones del ángulo φ, entre el vector de posición y el vector velocidad, cuanto menor sea la distancia r entre el planeta y el Sol, mayor será su velocidad.

C.2. Un protón y una partícula α ($q_\alpha = 2\, q_p$; $m_\alpha = 4\, m_p$) penetran, con la misma velocidad, en un campo magnético uniforme perpendicularmente a las líneas de inducción. Estas partículas:
A) Atraviesan el campo sin desviarse.
B) El protón describe una órbita circular de mayor radio.
C) La partícula alfa describe una órbita circular de mayor radio.

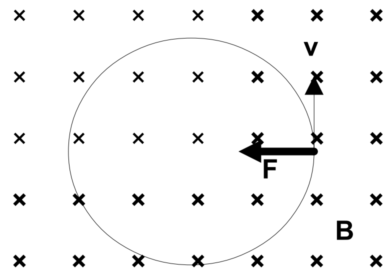
(P.A.U. Sep. 14)

Solución: C

La fuerza magnética $\overline{\boldsymbol{F}}_B$ sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ viene dada por la ley de Lorentz:

$$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$$

Esta fuerza es perpendicular en todos los puntos a la dirección de avance de la partícula, por lo que describe trayectoria circular con velocidad de valor constante ya que la aceleración solo tiene componente normal a_N, Si solo actúa la fuerza magnética:



$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_B$$

Aplicando la 2ª ley de Newton

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

$$F_B = m \cdot a = m \cdot a_N = m \frac{v^2}{R}$$

Usando la expresión de la ley de Lorentz (en módulos) para la fuerza magnética

$$|q| \cdot B \cdot v \cdot \operatorname{sen} \varphi = m \frac{v^2}{R}$$

Si las partículas entran perpendicularmente al campo, sen φ = 1.
Despejando el radio R

$$R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$$

Como la velocidad es la misma y el campo magnético es el mismo, aplicando esta expresión tanto al protón como a la partícula α y dividiendo una entre la otra queda:

$$\frac{R_\alpha}{R_p} = \frac{\frac{m_\alpha \cdot v}{q_\alpha \cdot B}}{\frac{m_p \cdot v}{q_p \cdot B}} = \frac{m_\alpha \cdot q_p}{m_p \cdot q_\alpha} = \frac{4\, m_p \cdot q_p}{m_p \cdot 2\, q_p} = 2$$

$$R_\alpha = 2\, R_p$$

El radio de la circunferencia descrita por la partícula alfa es el doble que el de la circunferencia descrita por protón.

C.3. En la formación del núcleo de un átomo:
- A) Disminuye la masa y se desprende energía.
- B) Aumenta la masa y se absorbe energía.
- C) En unos casos sucede la opción A y en otros casos la B.

(P.A.U. Sep. 14)

Solución: A

La masa del núcleo es siempre inferior a la suma de las masas de los nucleones que lo componen. La diferencia entre la masa del núcleo y los nucleones se llama defecto de masa «Δm».
El proceso hipotético de la formación de un núcleo a partir de la unión de los protones y neutrones que lo forman desprende una gran cantidad de energía que procede de la transformación del defecto de masa «Δm» en energía «E», según la ecuación de Einstein.

$$E = \Delta m \cdot c^2$$

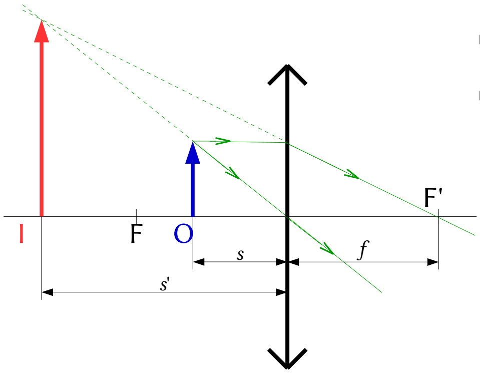
Siendo c la velocidad de la luz en el vacío.
A esta energía se la conoce como energía de enlace y, dividida por en número de nucleones, como energía de enlace por nucleón.
Esta energía de enlace por nucleón aumenta con el número atómico en los núcleos más ligeros hasta alcanzar un máximo en el hierro, a partir del cual desciendo ligeramente. Esto indica que el núcleo de hierro es el más estable.
En realidad los núcleos de los átomos se forman por reacciones de fusión nuclear o bien en el interior de las estrellas, los anteriores al hierro, o bien en la explosión de supernovas, los posteriores.

C.4. En el laboratorio trabajas con lentes convergentes y recoges en una pantalla las imágenes de un objeto. Explica lo que sucede, ayudándote del diagrama de rayos, cuando sitúas el objeto a una distancia de la lente inferior a su distancia focal.

(P.A.U. Sep. 14)

Solución:

Si colocamos el objeto a la distancia inferior a la distancia focal, la imagen se forma antes de la lente, es virtual y no se puede recoger en una pantalla.



P.1. Se cuelga un cuerpo de 10 kg de masa de un resorte y se alarga 2,0 cm. Después se le añaden otros 10 kg y se le da un tirón hacia abajo, de modo que el sistema comienza a oscilar con una amplitud de 3,0 cm.
a) Calcula la constante elástica del resorte y la frecuencia del movimiento.
b) Escribe, en función del tiempo, las ecuaciones de la elongación, velocidad, aceleración y fuerza.
c) Calcula la energía cinética y la energía potencial elástica a los 2 s de haber empezado a oscilar.
Dato: g = 9,8 m/s². *(P.A.U. Sep. 14)*
Rta.: a) k = 4900 N/m; f = 2,49 Hz; b) x = 0,0300 cos(15,7 t) (m); v = −0,470 sen(15,7 t) (m/s); a = −7,35 cos(15,7 t) (m/s²); F = −147 cos(15,7 t) (N); c) E_c = 0,0270 J; E_p = 2,18 J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que se cuelga del muelle	m_0 = 10,0 kg
Alargamiento	Δx = 2,00 cm = 0,0200 m
Masa que realiza el M.A.S.	m = 20,0 kg
Posición inicial	x_0 = 3,00 cm = 0,0300 m
Amplitud (elongación máxima)	$A = x_0$ = 0,0300 m
Tiempo para calcular la energía	t = 2,00 s
Aceleración de la gravedad	g = 9,80 m/s²
Incógnitas	
Constante elástica del resorte	k
Frecuencia del movimiento	f
Ecuaciones del movimiento armónico:	x, v, a, F
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Fase inicial	φ_0
Velocidad máxima	v_m
Aceleración máxima	a_m
Fuerza máxima	F_m
Energía cinética cuando t = 2 s	E_c
Energía potencial cuando t = 2 s	E_p
Otros símbolos	
Fuerza recuperadora elástica	F
Ecuaciones	
Peso	$P = m \cdot g$
Ley de Hooke: fuerza recuperadora elástica	$F = -k \cdot x$
Relación entre la frecuencia angular y la constante elástica	$k = m \cdot \omega^2$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\,\pi \cdot f$
Ecuación de movimiento en el M.A.S.	$x = A \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\ k \cdot x^2$
Energía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\ k \cdot A^2$

Solución:

a) Se calcula la constante elástica del muelle de la situación de equilibrio, cuando los valores del peso de la masa colgada y la fuerza elástica son iguales:

$$k \cdot \Delta x = m \cdot g$$

$$k=\frac{m\cdot g}{\Delta x}=\frac{10{,}0\ [\mathrm{kg}]\cdot 9{,}80\ [\mathrm{m/s^2}]}{0{,}020\ 0\ [\mathrm{m}]}=4{,}90\cdot 10^3\ \mathrm{N/m}$$

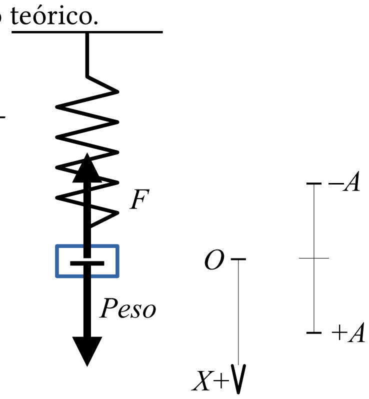
Se calcula la frecuencia a partir de la pulsación, que se obtiene de la constante elástica del muelle y de la masa oscilante.

$$k=m\cdot\omega^2 \Rightarrow \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{4{,}90\cdot 10^3\ [\mathrm{N\cdot m^{-1}}]}{20{,}0\ [\mathrm{kg}]}}=15{,}7\ \mathrm{rad/s}$$

$$\omega = 2\ \pi \cdot f = \quad f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{15{,}7\ \mathrm{rad/s}}{2\cdot 3{,}14\ \mathrm{rad}}=2{,}49\ \mathrm{s^{-1}}=2{,}49\ \mathrm{Hz}$$

b) En «M.A.S.: obtener la ecuación de movimiento» se expone el fundamento teórico.

Para calcular la fase inicial se elige un sistema de referencia con origen O en la posición de equilibrio y el eje *X*+ vertical en el sentido del alargamiento (hacia abajo) y se sustituyen en la ecuación de movimiento los datos y los valores de la posición inicial:



$$0{,}0300\ [\mathrm{m}] = 0{,}0300\ [\mathrm{m}] \cdot \mathrm{sen}(\ 15{,}7 \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\mathrm{sen}(\varphi_0) = 1$$

$$\varphi_0 = \mathrm{arcsen}(1) = \pi\ /\ 2\ [\mathrm{rad}] = 1{,}57\ \mathrm{rad}$$

La ecuación de movimiento queda:

$$x = 0{,}0300 \cdot \mathrm{sen}(15{,}7 \cdot t + \pi\ /2)\ [\mathrm{m}]$$

Como $\mathrm{sen}(\varphi + \pi\ /2) = \cos\ \varphi$, la ecuación puede escribirse más brevemente:

$$x = 0{,}0300 \cdot \cos(15{,}7 \cdot t)\ [\mathrm{m}]$$

Análisis: La ecuación de movimiento cumple la condición de la posición inicial (para $t = 0$, $x_0 = 0{,}0300$ m*).*

La velocidad es la derivada de la posición con respecto al tiempo:

$$v=\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}\{0{,}030\ 0\cos(15{,}7\cdot t)\}}{\mathrm{d}\,t}=-15{,}7\cdot 0{,}030\ 0\,\mathrm{sen}(15{,}7\cdot t)=-0{,}470\cdot\mathrm{sen}(15{,}7\cdot t)\ \ \mathrm{m/s}$$

La aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a=\frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t}=\frac{\mathrm{d}\{-0{,}470\cdot\mathrm{sen}(15{,}7\cdot t)\}}{\mathrm{d}\,t}=-0{,}470\cdot 15{,}7\cdot\cos(15{,}7\cdot t)=-7{,}35\cdot\cos(15{,}7\cdot t)\ \ \mathrm{m/s^2}$$

La fuerza elástica es:

$$F = -k \cdot x$$

$$F = -4{,}90\cdot 10^3\ [\mathrm{N/m}] \cdot 0{,}0300 \cdot \cos(15{,}7 \cdot t)\ [\mathrm{m}] = -147\ \cos(15{,}7 \cdot t)\ [\mathrm{N}]$$

c) A los 2,00 s su posición es:

$$x = 0{,}0300\ [\mathrm{m}] \cdot \cos(15{,}7\ [\mathrm{rad/s}] \cdot 2{,}00\ [\mathrm{s}]) = 0{,}0298\ \mathrm{m}$$

Energía potencial para $x = 0{,}0298$ m:

$$E_p = k \cdot x^2\ /\ 2 = 4{,}90\cdot 10^3\ [\mathrm{N/m}]\ (0{,}0298\ [\mathrm{m}])^2\ /\ 2 = 2{,}18\ \mathrm{J}$$

A los 2,00 s su velocidad es:

$$v = -0{,}470\ [\mathrm{m/s}]\cdot \mathrm{sen}(15{,}7\ [\mathrm{rad/s}] \cdot 2{,}00\ [\mathrm{s}]) = 0{,}0520\ \mathrm{m/s}$$

Energía cinética para $v = 0{,}0520$ m/s

$$E_c = m \cdot v^2\ /\ 2 = 20{,}0\ [\mathrm{kg}] \cdot (0{,}0520\ [\mathrm{m/s}])^2\ /\ 2 = 0{,}0270\ \mathrm{J}$$

Análisis: Se puede calcular la energía mecánica $E=½\ k\cdot A^2 = k \cdot A^2\ /\ 2 = 4{,}90\cdot 10^3\ [\mathrm{N/m}]\ (0{,}0300\ [\mathrm{m}])^2\ /\ 2 = 2{,}21$ J *y comprobar que es igual a la suma de las energías cinética y potencial:* 2,21 J = 0,027 J + 2,18 J

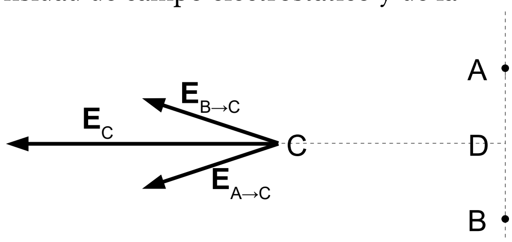
P.2. Dos cargas puntuales iguales de +2 μC se encuentran en los puntos (0, 1) m y (0, −1) m. Calcula:

a) El vector campo y el potencial electrostático en el punto (−3, 0) m.
b) Halla el trabajo necesario para trasladar una carga de +3 μC desde el infinito al citado punto.
Si en el punto (−3, 0) m se abandona una carga de −2 μC y masa 1 g:
c) Calcula su velocidad en el origen de coordenadas.
DATO: $K = 9\cdot10^9$ N·m²·C⁻². *(P.A.U. Sep. 14)*
Rta.: a) $\overline{\boldsymbol{E}} = -3{,}42\cdot10^3\ \overline{\mathbf{i}}$ N/C; $V = 1{,}14\cdot10^4$ V; b) W(ext) = -W(campo) = 0,0342 J; c) $\overline{\boldsymbol{v}} = 9{,}92\ \overline{\mathbf{i}}$ m/s.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Valores de las cargas fijas	$Q = 2{,}00\ \mu C = 2{,}00\cdot10^{-6}$ C
Posiciones de las cargas fijas: A	$\overline{r}_A = (0;\ 1{,}00)$ m
B	$\overline{r}_B = (0;\ -1{,}00)$ m
Posición del punto C	$\overline{r}_C = (-3{,}00;\ 0)$ m
Valor de la carga que se traslada desde el infinito	$q_1 = 3{,}00\ \mu C = 3{,}00\cdot10^{-6}$ C
Carga que se desplaza hasta el origen	$q_2 = -2{,}00\ \mu C = -2{,}00\cdot10^{-6}$ C
Masa de la carga que se desplaza hasta el origen	$m = 1{,}00$ g $= 1{,}00\cdot10^{-3}$ kg
Velocidad inicial en el punto C (se supone)	$\overline{v}_C = 0$
Posición del punto D por el que pasa la carga que se desplaza	$\overline{r}_D = (0, 0)$ m
Constante eléctrica	$K = 9{,}00\cdot10^9$ N·m²·C⁻²
Incógnitas	
Vector campo electrostático en el punto C	$\overline{\boldsymbol{E}}_C$
Potencial electrostático en el punto C	V_C
Trabajo necesario para trasladar 3 μC desde el infinito al punto C	$W_{\infty\to C}$
Velocidad que tendrá la carga de −2 μC al pasar por el punto D	v_D
Otros símbolos	
Distancia entre dos puntos A y B	r_{AB}
Ecuaciones	
Ley de Coulomb (aplicada a dos cargas puntuales separadas una distancia r)	$\vec{F}=K\dfrac{Q\cdot q}{r^2}\vec{u}_r$
Principio de superposición	$\vec{F}_A=\sum\vec{F}_{A\,i}$
Potencial electrostático en un punto creado por una carga puntual Q situada a una distancia r	$V=K\dfrac{Q}{r}$
Potencial electrostático de varias cargas	$V = \sum V_i$
Trabajo que hace la fuerza del campo cuando se mueve una carga q desde un punto A hasta otro punto B	$W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B)$
Energía potencial electrostática de una carga en un punto A	$E_{p\,A} = q\cdot V_A$
Energía cinética	$E_c = ½\, m\cdot v^2$
Principio de la conservación de la energía entre dos puntos A y B	$(E_c + E_p)_A = (E_c + E_p)_B$

Solución:

a) Se hace un dibujo de las cargas y cada uno de los vectores intensidad de campo electrostático y de la suma vectorial que es el campo $\overline{\boldsymbol{E}}_C$ resultante.



Cálculo de distancias:

$$r_{AC}=r_{BC}=\sqrt{(3{,}00\,[\mathrm{m}])^2+(1{,}00\,[\mathrm{m}])^2}=3{,}16\ \mathrm{m}$$

El vector unitario del punto C, $\overline{\boldsymbol{u}}_{AC}$ respecto a A es:

$$\vec{u}_{AC}=\frac{\vec{r}_{AC}}{|\vec{r}_{AC}|}=\frac{(-3{,}00\,\vec{\mathbf{i}}-1{,}00\,\vec{\mathbf{j}})\,[\mathrm{m}]}{3{,}16\,[\mathrm{m}]}=-0{,}949\,\vec{\mathbf{i}}-0{,}316\,\vec{\mathbf{j}}$$

La intensidad de campo electrostático en el punto C debido a la carga de +2 μC situada en A es:

$$\vec{E}_{A\to C}=9{,}00\cdot10^9\ [\mathrm{N{\cdot}m^2\cdot C^{-2}}]\frac{2\cdot10^{-6}\,[\mathrm{C}]}{(3{,}16\,[\mathrm{m}])^2}(-0{,}949\,\vec{\mathbf{i}}-0{,}343\,\vec{\mathbf{j}})=(-1{,}71\cdot10^3\,\vec{\mathbf{i}}-5{,}69\cdot10^2\,\vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

Por simetría,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_{B\to C} = (-1{,}71\cdot10^3\ \overline{\mathbf{i}} + 5{,}69\cdot10^2\ \overline{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

Aplicando el principio de superposición,

$$\overline{\boldsymbol{E}}_C = \overline{\boldsymbol{E}}_{A\to C} + \overline{\boldsymbol{E}}_{B\to C} = (-1{,}71\cdot10^3\ \overline{\mathbf{i}} - 5{,}69\cdot10^2\ \overline{\mathbf{j}}\ [\mathrm{N}] + (-1{,}71\cdot10^3\ \overline{\mathbf{i}} + 5{,}69\cdot10^2\ \overline{\mathbf{j}})\ [\mathrm{N}] = -3{,}42\cdot10^3\ \overline{\mathbf{i}}\ \mathrm{N/C}$$

Análisis: El campo resultante del cálculo es horizontal hacia la izquierda, coherente con el dibujo que se había hecho.

El potencial en el punto C debido a cada carga vale lo mismo, porque la distancia es la misma (están situadas simétricamente) y el valor de la carga también es el mismo.

$$V_C = V_{A \to C} + V_{B \to C} = 2 \cdot V_{A \to C} = 2 \cdot 9{,}00 \cdot 10^9 \, [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}] \frac{2{,}00 \cdot 10^{-6} \, [\mathrm{C}]}{(3{,}16 \, [\mathrm{m}])} = 1{,}14 \cdot 10^4 \ \mathrm{V}$$

b) El trabajo realizado por las fuerzas del campo electrostático cuando se mueve una carga q_1 = +3 µC desde el infinito hasta el punto C es la disminución de la energía potencial entre los puntos ∞ y C. Como se toma el infinito como origen de potencial, $V_\infty = 0$,

$$W_{\infty \to C} = q_1 \cdot (V_\infty - V_C) = 3{,}00 \cdot 10^{-6} \, [\mathrm{C}] \cdot (0 - 1{,}14 \cdot 10^4) \, [\mathrm{V}] = -0{,}0342 \ \mathrm{J}$$

El trabajo necesario para mover una carga q = +3 µC desde el infinito hasta el punto C, suponiendo que llegue a C con la misma velocidad que tenía en el infinito, es:

$$W(\text{exterior}) = -W(\text{campo}) = 0{,}0342 \ \mathrm{J}$$

c) Como la fuerza electrostática es una fuerza conservativa la energía mecánica se conserva.

$$(E_c + E_p)_C = (E_c + E_p)_D$$

$$½ \, m \, v_C^2 + q \cdot V_C = ½ \, m \, v_D^2 + q \cdot V_D$$

El potencial en el punto D debido a cada carga vale lo mismo, porque la distancia es la misma (están situadas simétricamente) y el valor de la carga también es el mismo.

$$V_D = 2 \cdot V_{A \to D} = 2 \cdot 9{,}00 \cdot 10^9 \, [\mathrm{N \cdot m^2 \cdot C^{-2}}] \frac{2{,}00 \cdot 10^{-6} \, [\mathrm{C}]}{(1{,}00 \, [\mathrm{m}])} = 3{,}60 \cdot 10^4 \ \mathrm{V}$$

Aplicando el principio de conservación de la energía

$$-2{,}00 \cdot 10^{-6} \, [\mathrm{C}] \cdot (-1{,}14 \cdot 10^4 \, [\mathrm{V}]) = (1{,}00 \cdot 10^{-3} \, [\mathrm{kg}] \cdot v_D^2) / 2 + (-2{,}00 \cdot 10^{-6} \, [\mathrm{C}]) \cdot (3{,}60 \cdot 10^4 \, [\mathrm{V}])$$

$$v_D = 9{,}92 \ \mathrm{m/s}$$

Como la velocidad es un vector, hay que deducir la dirección y sentido.
Aunque el valor de la intensidad de campo electrostático resultante y la aceleración en el origen es cero, por el valor de la intensidad de campo calculado en el punto C (-3, 0) [m] y el hecho de que pase por el origen, se puede deducir que la aceleración tiene la dirección del eje X en sentido positivo. Si un móvil parte del reposo, y la aceleración tiene dirección constante, el movimiento será rectilíneo en la línea de la aceleración. Por lo tanto la dirección de la velocidad es la del eje X en sentido positivo

$$\bar{\boldsymbol{v}}_D = 9{,}92 \ \bar{\mathbf{i}} \ \mathrm{m/s}$$

Cuestiones y problemas de las Pruebas de acceso a la Universidad (P.A.U.) en Galicia.
Respuestas y composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.
Algunos cálculos se hicieron con una hoja de cálculo de LibreOffice u OpenOffice del mismo autor.
Algunas ecuaciones y las fórmulas orgánicas se construyeron con la extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou.
La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de *traducindote*, de Óscar Hermida López.
Se procuró seguir las recomendaciones del Centro Español de Metrología (CEM)

Actualizado: 11/02/22