CiUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	**PAU** **XUÑO 2013**	**Código: 25**

FÍSICA

Puntuación máxima: Cuestiones 4 puntos (1 cada cuestión, teórica o práctica). Problemas 6 puntos (1 cada apartado).
No se valorará la simple anotación de un ítem cómo solución a las cuestiones; han de ser razonadas.
Se puede usar calculadora siempre que no sea programable ni memorice texto. El alumno elegirá una de las dos opciones.

OPCIÓN A

C.1. Se dispone de varias cargas eléctricas puntuales. Si en un punto del espacio próximo a las cargas el potencial eléctrico es nulo: A) Puede haber campo eléctrico en ese punto. B) Las líneas del campo se cortan en ese punto. C) El campo no es conservativo.

C.2. Dos focos O_1 y O_2 emiten ondas en fase de la misma amplitud (A), frecuencia (f) y longitud de onda (λ) que se propagan a la misma velocidad, interfiriendo en un punto P que está a una distancia λ m de O_1 y 3 λ m de O_2. La amplitud resultante en P será: A) Nula. B) A. C) 2 A.

C.3. Se produce efecto fotoeléctrico cuando fotones de frecuencia f, superior a una frecuencia umbral f_0, inciden sobre ciertos metales. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?: A) Se emiten fotones de menor frecuencia. B) Se emiten electrones. C) Hay un cierto retraso temporal entre el instante de la iluminación y el de la emisión de partículas.

C.4. La constante elástica de un muelle se puede medir experimentalmente mediante el método dinámico. Explica brevemente el procedimiento seguido en el laboratorio.

P.1. Un satélite de 200 kg describe una órbita circular a 600 km sobre la superficie terrestre: a) Deduce la expresión de la velocidad orbital. b) Calcula el período de giro. c) Calcula la energía mecánica.
(Datos: R_T = 6400 km; g_0 = 9,81 m/s²).

P.2. Un rayo de luz pasa del agua (índice de refracción n = 4/3) al aire (n = 1). Calcula: a) El ángulo de incidencia si los rayos reflejado y refractado son perpendiculares entre sí. b) El ángulo límite. c) ¿Hay ángulo límite si la luz incide del aire al agua?

OPCIÓN B

C.1. Un planeta describe una órbita plana y elíptica en torno al Sol. ¿Cuál de las siguientes magnitudes es constante? A) El momento lineal. B) La velocidad areolar. C) La energía cinética.

C.2. Si se desea obtener una imagen virtual, derecha y menor que el objeto, se usa: A) Un espejo convexo. B) Una lente convergente. C) Un espejo cóncavo.

C.3. En la reacción $^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{141}_{56}Ba + ^{A}_{Z}X + 3\,^{1}_{0}n$ se cumple que: A) Es una fusión nuclear. B) Se libera energía correspondiente al defecto de masa. C) El elemento X es $^{92}_{35}X$.

C.4. En la medida experimental de la aceleración de la gravedad g con un péndulo simple, ¿qué precauciones se deben tomar con respecto a la amplitud de las oscilaciones y con respecto a la medida del periodo de oscilación?

P.1. Un protón con velocidad $\overline{\boldsymbol{v}} = 5\cdot10^6\ \overline{\mathbf{i}}$ m/s penetra en una zona donde hay un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}} = 1\ \overline{\mathbf{j}}$ T. A) Dibuja la fuerza que actúa sobre el protón y deduce la ecuación para calcular el radio de la órbita. B) Calcula el número de vueltas en un segundo. C) ¿Varía la energía cinética del protón al entrar en esa zona? (Datos: m(protón) = $1{,}67\cdot10^{-27}$ kg; q(protón) = $1{,}6\cdot10^{-19}$ C).

P.2. Una partícula de masa m = 0,1 kg, sujeta en el extremo de un resorte, oscila en un plano horizontal con un M.A.S., siendo la amplitud A = 0,20 m y la frecuencia f = 5 s⁻¹. En el instante inicial la posición es $x = A$. Calcula para $t = T/8$ s: a) La velocidad y aceleración. b) La energía mecánica. c) La frecuencia con que oscilaría si se duplica la masa.

Soluciones

OPCIÓN A

C.1. Se dispone de varias cargas eléctricas puntuales. Si en un punto del espacio próximo a las cargas el potencial eléctrico es nulo:
A) Puede haber campo eléctrico en ese punto.
B) Las líneas del campo se cortan en ese punto.
C) El campo no es conservativo.

(P.A.U. Jun. 13)

Solución: A

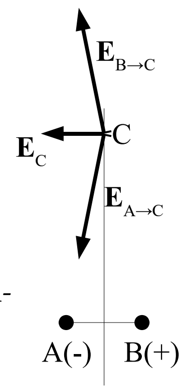
Por ejemplo, en cualquier punto equidistante de dos cargas del mismo valor y distinto signo (dipolo eléctrico).
El potencial electrostático creado por una carga puntual Q en un punto que está a una distancia r de la carga es:

$$V=K\frac{Q}{r}$$

Donde K es la constante electrostática del medio.
Cualquier punto que se encuentre a la mismo distancia de ambas cargas, tendrá un potencial nulo, ya que el potencial en ese punto será la suma de los potenciales creados por cada una de las cargas:

$$V=K\frac{Q}{r}+K\frac{-Q}{r}=0$$

Las cargas son opuestas y las distancias iguales.
Pero el campo electrostático en el punto no es nulo, pues es la suma vectorial de los vectores campo creados por cada una de las dos cargas que produce una resultante que no es nula, como se puede ver en la figura.



Las otras opciones:
B. Falsa. Una de las propiedades de las líneas de campo es que no se cortan en ningún punto, ya que el campo en cada punto es único en valor y dirección. Las líneas de campo se dibujan de forma que el vector campo es tangente a ellas en cada punto. Si dos líneas se cortasen, existirían dos vectores campo tangentes a cada línea en ese punto, lo que contradice la definición.

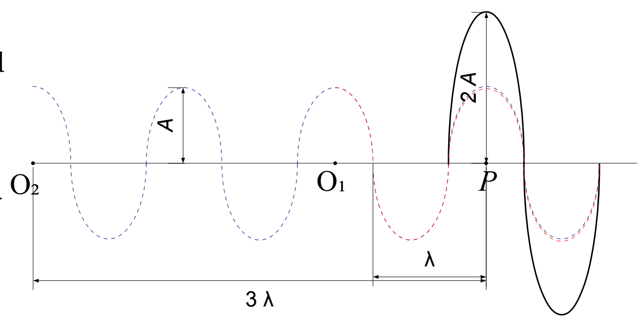
C. Falsa. El campo electrostático es un campo conservativo. El trabajo de la fuerza del campo cuando una carga de prueba se mueve entre dos puntos es independiente del camino. (También se podría decir que la circulación del vector campo a lo largo de una línea cerrada es nula).

C.2. Dos focos O_1 y O_2 emiten ondas en fase de la misma amplitud (A), frecuencia (f) y longitud de onda (λ) que se propagan a la misma velocidad, interfiriendo en un punto P que está a una distancia λ m de O_1 y 3 λ m de O_2. La amplitud resultante en P será:
A) Nula.
B) A.
C) 2 A.

(P.A.U. Jun. 13)

Solución: C

Representamos dos ondas que se propagan de izquierda a derecha desde dos puntos O_1 y O_2 de forma que el punto P se encuentre a una distancia λ de O_1 y a una distancia 3 λ de O_2.
Como la diferencia de caminos es un número entero de longitudes de onda los máximos coinciden y se amplifican y la interferencia es constructiva.



Como la frecuencia, la fase y amplitud son la misma, la onda resultante será:

$$y = y_1 + y_2 = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x_1) + A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x_2)$$

$$y = 2\,A \cdot \text{sen}\left(\omega \cdot t - k\frac{(x_1 + x_2)}{2}\right)\cos\left(k\frac{(x_1 - x_2)}{2}\right)$$

Como $x_1 - x_2 = 2\,\lambda$ y $k = 2\,\pi\,/\,\lambda$, queda una onda de la misma frecuencia, en fase con las iniciales y cuya amplitud es el doble:

$$y = 2\,A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - 4\,\pi) \cdot \cos\,(2\,\pi) = 2\,A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

C.3. Se produce efecto fotoeléctrico cuando fotones de frecuencia f, superior a una frecuencia umbral f_0, inciden sobre ciertos metales. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?:
A) Se emiten fotones de menor frecuencia.
B) Se emiten electrones.
C) Hay un cierto retraso temporal entre el instante de la iluminación y el de la emisión de partículas.
(P.A.U. Jun. 13)

Solución: B

Interpretación de Einstein del efecto fotoeléctrico.

Cuando la luz interacciona con el metal de la célula fotoeléctrica lo hace como si fuese un chorro de partículas llamadas fotones (paquetes de energía).
Cada fotón choca con un electrón y le transmite toda su energía.
Para que ocurra efecto fotoeléctrico, los electrones emitidos deben tener energía suficiente para llegar al anticátodo, lo que ocurre cuando la energía del fotón es mayor que el trabajo de extracción, que es una característica del metal.
La ecuación de Einstein del efecto fotoeléctrico puede escribirse:

$$E_f = W_e + E_c$$

En la ecuación, E_f representa la energía del fotón incidente, W_e el trabajo de extracción del metal y E_c la energía cinética máxima de los electrones (fotoelectrones) emitidos.
La energía que lleva un fotón de frecuencia f es:

$$E_f = h \cdot f$$

En esta ecuación, h es la constante de Planck y tiene un valor muy pequeño: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J·s

Las otras opciones:
A. Falsa. El fenómeno por el que algunas sustancias emiten radiación de menor frecuencia al ser iluminadas se conoce como fluorescencia, pero no tiene nada que ver con el efecto fotoeléctrico.
C. Falsa. Una de las leyes experimentales del efecto fotoeléctrico dice que la emisión de electrones por el metal es instantánea al ser iluminado con la frecuencia adecuada. No existe ningún retraso.

C.4. La constante elástica de un muelle se puede medir experimentalmente mediante el método dinámico. Explica brevemente el procedimiento seguido en el laboratorio.
(P.A.U. Jun. 13)

Solución:

En la medida de la constante elástica de un resorte por el método dinámico se tira hacia abajo de una masa de valor conocido que cuelga de un resorte y se deja oscilar, midiendo el tiempo de varias oscilaciones (10, por ejemplo). Se calcula el período dividiendo el tiempo entre el número de oscilaciones.
Se repite el procedimiento para otras masas conocidas.
La ecuación del período del resorte,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Puede escribirse como:

$$T^2=\frac{4\pi^2\cdot m}{k}$$

A partir de ella se determina el valor de constante.
En el método gráfico se representan los cuadrados de los períodos en el eje de ordenadas frente a las masas en el de abscisas. La gráfica debería dar una línea recta de pendiente:

$$\text{pendiente estudio dinámico} = p_d = \frac{\Delta T^2}{\Delta m}=\frac{4\pi^2}{k}$$

Determinando la pendiente, se puede calcular el valor de constante:

$$k=\frac{4\pi^2}{p_d}$$

En el método analítico se calcula la constante del resorte k para cada masa y se halla el valor medio. Este método tiene el problema de que si la masa del resorte no es despreciable frente a la masa colgada, los resultados llevan un error sistemático.

P.1. Un satélite de 200 kg describe una órbita circular a 600 km sobre la superficie terrestre:
a) Deduce la expresión de la velocidad orbital.
b) Calcula el período de giro.
c) Calcula la energía mecánica.
Datos: R_T = 6400 km; g_0 = 9,81 m/s². *(P.A.U. Jun. 13)*

Rta.: a) $v=\sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r_{\text{órb}}}}$; b) T = 1 h 37 min; b) E = −5,74·10⁹ J.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa del satélite	m = 200 kg
Altura de la órbita	h = 600 km = 6,00·10⁵ m
Radio de la Tierra	R = 6400 km = 6,40·10⁶ m
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra	g_0 = 9,81 m/s²
Incógnitas	
Velocidad del satélite en su órbita alrededor de la Tierra	v
Período orbital del satélite	T
Energía mecánica del satélite en órbita	E
Otros símbolos	
Masa de la Tierra	M
Constante de la gravitación universal	G
Ecuaciones	
Velocidad de un satélite a una distancia r del centro de un astro de masa M	$v=\sqrt{\frac{G\cdot M}{r}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio r y período T	$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}$
Ley de Newton de la gravitación universal (fuerza que ejerce un planeta esférico sobre un cuerpo puntual)	$F_G=G\frac{M\,m}{r^2}$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio r)	$a_N=\frac{v^2}{r}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$
Peso	$P = m\cdot g$
Energía cinética	$E_c = ½\, m\cdot v^2$
Energía potencial gravitatoria (referida al infinito)	$E_p=-G\frac{M\cdot m}{r}$
Energía mecánica	$E = E_c + E_p$

Solución:

a) El satélite describe una trayectoria aproximadamente circular de radio

$$r = R + h = 6{,}40 \cdot 10^6 \text{ [m]} + 6{,}00 \cdot 10^5 \text{ [m]} = 7{,}00 \cdot 10^6 \text{ m}$$

La fuerza gravitatoria $\overline{\boldsymbol{F}}_G$ que ejerce el astro de masa M sobre un satélite de masa m que gira a su alrededor en una órbita de radio r está dirigida hacia el astro, es una fuerza central, y se rige por la ley de Newton de la gravitación universal:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_G = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{\boldsymbol{u}}_r$$

En muchos casos la trayectoria del satélite es prácticamente circular alrededor del centro del astro. Como la fuerza gravitatoria es una fuerza central, la aceleración solo tiene componente normal. Al no tener aceleración tangencial, el módulo de la velocidad es constante y el movimiento es circular uniforme.
El valor de la aceleración normal en un movimiento circular uniforme se obtiene de la expresión

$$a_N = \frac{v^2}{r}$$

La 2ª ley de Newton dice que la fuerza resultante sobre un objeto produce una aceleración directamente proporcional a la fuerza.

$$\Sigma \overline{\boldsymbol{F}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{a}}$$

Como la fuerza gravitatoria que ejerce el astro sobre el satélite es mucho mayor que cualquier otra se puede considerar que es la única fuerza que actúa. La 2ª ley de Newton, expresada para los módulos, queda

$$\left|\sum \vec{\boldsymbol{F}}\right| = |\vec{\boldsymbol{F}}_G| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}| = m \cdot |\vec{\boldsymbol{a}}_N| = m \frac{v^2}{r}$$

La expresión del módulo $|\overline{\boldsymbol{F}}_G|$ de la fuerza gravitatoria, queda

$$G \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v^2}{\cancel{r}}$$

Despejando la velocidad orbital del satélite, queda

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

Como no se tienen los datos de la masa de la Tierra ni de la constante de la gravitación universal, se necesita encontrar una relación entre ellas y el radio de la Tierra. Esta relación se obtiene igualando el peso de un objeto con la fuerza gravitatoria sobre él en la superficie de la Tierra.

$$\cancel{m} g_0 = G \frac{M \cdot \cancel{m}}{R^2}$$

$$G \cdot M = g_0 \cdot R^2$$

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R^2}{r}} = \sqrt{\frac{9{,}81 \text{ [m/s}^2] \cdot (6{,}40 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2}{7{,}00 \cdot 10^6 \text{ [m]}}} = 7{,}58 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 7{,}58 \text{ km/s}$$

Análisis: Se espera que un satélite en órbita alrededor de la Tierra tenga una velocidad de algunos km/s. El resultado está está de acuerdo con esta suposición.
Específicamente el enunciado del problema no pide que se calcule la velocidad, pero mejor es calcularla por si acaso. Además, se va a necesitar en el cálculo del período orbital.

b) El período se calcula a partir de la expresión de la velocidad en el movimiento circular uniforme:

$$T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 7{,}00 \cdot 10^6 \text{ [m]}}{7{,}58 \cdot 10^3 \text{ [m/s]}} = 5{,}81 \cdot 10^3 \text{ s} = 1 \text{ h } 37 \text{ min}$$

c) Energía potencial:

$$E_p = -\frac{g_0 \cdot R^2 \cdot m}{r} = -\frac{9{,}81 \text{ [m/s}^2] \cdot (6{,}40 \cdot 10^6 \text{ [m]})^2 \cdot 200 \text{ [kg]}}{7{,}00 \cdot 10^6 \text{ [m]}} = -1{,}15 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

Energía cinética:

$$E_c = m \cdot v^2 / 2 = 200 \text{ [kg] } (7{,}58 \cdot 10^3 \text{ [m/s]})^2 = 5{,}74 \cdot 10^9 \text{ J}$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E = E_c + E_p = 5{,}74 \cdot 10^9 \text{ [J]} - 1{,}15 \cdot 10^{10} \text{ [J]} = -5{,}8 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Análisis: Se puede demostrar que la energía mecánica tiene el valor opuesto al de la energía cinética sustituyendo $G \cdot M / r$ por v^2 en la expresión de la energía mecánica:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - G \frac{M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - m \cdot v^2 = -\frac{1}{2} m \cdot v^2 = -E_c$$

Sabiendo esto se puede escribir el valor de la energía mecánica con tres cifras significativas, en vez de las dos cifras del resultado anterior obtenido siguiendo [las reglas de operaciones con cifras significativas↗]:

$$E = -5{,}74 \cdot 10^9 \text{ J}$$

P.2. Un rayo de luz pasa del agua (índice de refracción $n = 4/3$) al aire ($n = 1$). Calcula:

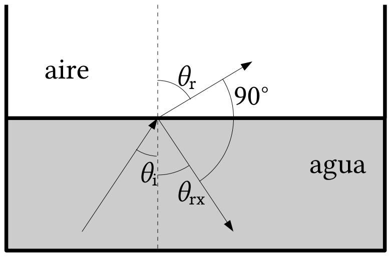
a) El ángulo de incidencia si los rayos reflejado y refractado son perpendiculares entre sí.
b) El ángulo límite.
c) ¿Hay ángulo límite si la luz incide del aire al agua?

(P.A.U. Jun. 13)

Rta.: a) $\theta_i = 36{,}9°$; b) $\lambda = 48{,}6°$.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Índice de refracción del aire	$n = 1{,}00$
Índice de refracción del agua	$n_a = 4 / 3 = 1{,}33$
Ángulo entre el rayo refractado y el reflejado	$\theta_i = 90{,}0°$
Incógnitas	
Ángulo de incidencia	θ_i
Ángulo límite	λ
Ecuaciones	
Ley de Snell de la refracción	$n_i \cdot \text{sen } \theta_i = n_r \cdot \text{sen } \theta_r$

Solución:



a) Aplicando la ley de Snell de la refracción:

$$1{,}33 \cdot \text{sen } \theta_i = 1{,}00 \cdot \text{sen } \theta_r$$

A la vista del dibujo debe cumplirse que

$$\theta_r + 90° + \theta_{rx} = 180°$$

Como el ángulo de reflexión θ_{rx} es igual al ángulo de incidencia θ_i, la ecuación anterior se convierte en:

$$\theta_i + \theta_r = 90°$$

Es decir, que el ángulo de incidencia θ_i y el de refracción θ_r son complementarios.
El seno de un ángulo es igual al coseno de su complementario. Entonces la primera ecuación queda:

$$1{,}33 \cdot \text{sen } \theta_i = \text{sen } \theta_r = \cos \theta_i$$

$$\tan \theta_i = \frac{1}{1{,}33} = 0{,}75$$

$$\theta_i = \arctan 0{,}75 = 36{,}9°$$

b) Ángulo límite λ es el ángulo de incidencia tal que el de refracción vale 90°

$$1{,}33 \cdot \text{sen } \lambda = 1{,}00 \cdot \text{sen } 90{,}0°$$

$$\text{sen } \lambda = 1{,}00 / 1{,}33 = 0{,}75$$

$$\lambda = \text{arcsen } 0{,}75 = 48{,}6°$$

c) No. Cuando la luz pasa del aire al agua, el ángulo de refracción es menor que el de incidencia. Para conseguir un ángulo de refracción de 90° el ángulo de incidencia tendría que ser mayor que 90° y no estaría en el aire.
También puede deducirse de la ley de Snell.

$$1{,}00 \cdot \text{sen } \lambda_1 = 1{,}33 \cdot \text{sen } 90°$$

$$\text{sen } \lambda_1 = 1{,}33 \ / \ 1{,}00 > 1$$

Es imposible. El seno de un ángulo no puede ser mayor que uno.

OPCIÓN B

C.1. Un planeta describe una órbita plana y elíptica en torno al Sol. ¿Cuál de las siguientes magnitudes es constante?
A) El momento lineal.
B) La velocidad areolar.
C) La energía cinética.

(P.A.U. Jun. 13)

Solución: B

La velocidad areolar de un planeta es el área que barre el radiovector que une el Sol con el planeta en la unidad de tiempo.
La segunda ley de Kepler puede enunciarse así:
El radiovector que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales
O sea, que la velocidad areolar es constante.

En un sistema de referencia con el Sol en el origen de coordenadas, la velocidad areolar será la derivada del área barrida por el vector de posición del planeta en la unidad de tiempo:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_A = \frac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{A}}}{\mathrm{d}\,t}$$

El área barrida en un tiempo muy pequeño dt, es la mitad del producto vectorial del vector de posición $\overline{\boldsymbol{r}}$ del planeta por su vector desplazamiento d$\overline{\boldsymbol{r}}$.

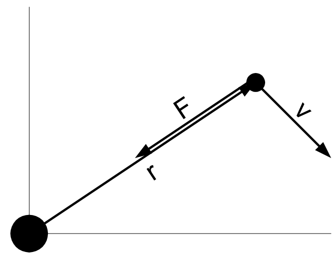
$$\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{2}(\vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{r}})$$

La velocidad areolar puede expresarse así:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_A = \frac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{A}}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{1}{2}\frac{\vec{\boldsymbol{r}} \times \mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{r}} \times \frac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}}$$

Siendo $\overline{\boldsymbol{v}}$ el vector velocidad del planeta.
Si derivamos $\overline{\boldsymbol{v}}_A$ respecto al tiempo,

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{v}}_A}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}}\right)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}\,t} \times \vec{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{r}} \times \frac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{v}}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{v}} + \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{0}} + \vec{\boldsymbol{0}} = \vec{\boldsymbol{0}}$$



El resultado es el vector $\overline{\boldsymbol{0}}$ (cero) ya que el producto vectorial de un vector $\overline{\boldsymbol{v}}$ por sí mismo es cero y el vector de posición r y el vector fuerza $\overline{\boldsymbol{a}}$ son paralelos, ya que la aceleración tiene la misma dirección que la fuerza de atracción entre el Sol y el planeta.

Las otras opciones:
A. Falsa.
El momento lineal $\overline{\boldsymbol{p}}$ de un objeto de masa m que se mueve a una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ vale:

$$\overline{\boldsymbol{p}} = m \cdot \overline{\boldsymbol{v}}$$

La dirección cambia a medida que el planeta se desplaza alrededor del Sol.

C. Falsa. En una órbita elíptica, con el Sol situado en un de los focos, la distancia del planeta al Sol no es constante.
La energía potencial gravitatoria, tomando como origen de energía el infinito, viene dada por la expresión:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \left(-G \frac{M \cdot m}{r} \right)$$

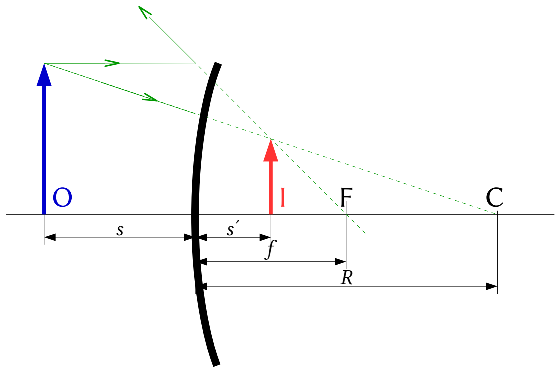
Siendo M la masa que origina el campo gravitatorio, (en este caso la del Sol), m es la masa del objeto situado en él (el planeta), r la distancia entre ambas masas y G la constante de la gravitación universal.
La energía potencial es negativa y será tanto mayor cuanto mayor sea la distancia r.
Como la energía mecánica se conserva, pero la energía potencial gravitatoria depende de la distancia, la energía cinética varía con la distancia y no se mantiene constante.

C.2. Si se desea obtener una imagen virtual, derecha y menor que el objeto, se usa:
A) Un espejo convexo.
B) Una lente convergente.
C) Un espejo cóncavo.

(P.A.U. Jun. 13)

Solución: A

Véase la marcha de los rayos.
La imagen se forma detrás del espejo, por lo que es virtual.
El tipo de imagen es independiente de la distancia del objeto al espejo.



C.3. En la reacción $^{235}_{92}\text{U} + ^{1}_{0}\text{n} \rightarrow ^{141}_{56}\text{Ba} + ^{A}_{Z}\text{X} + 3\,^{1}_{0}\text{n}$ se cumple que:
A) Es una fusión nuclear.
B) Se libera energía correspondiente al defecto de masa.
C) El elemento X es $^{92}_{35}\text{X}$.

(P.A.U. Jun. 13)

Solución: B

En las reacciones nucleares se libera energía. Esta energía proviene de la transformación de masa en energía que sigue la ley de Einstein.

$$E = \Delta m \cdot c^2$$

Siendo Δm el defecto de masa y c la velocidad de la luz en el vacío.

Las otras opciones:
A: Falsa. El proceso de fusión nuclear consiste en la reacción entre núcleos ligeros para producir otros más pesados. Esta reacción nuclear consiste en romper un núcleo pesado en otros más ligeros: es una fisión.
C: Cumple el principio de conservación del número bariónico (n.º nucleones = n.º de protones + n.º neutrones)

$$235 + 1 = 141 + A + 3 \cdot 1$$

$$A = 92$$

Pero no el de conservación de la carga eléctrica:

$$92 + 0 = 56 + Z + 3 \cdot 0$$

$$Z = 36 \neq 35$$

C.4. En la medida experimental de la aceleración de la gravedad g con un péndulo simple, ¿qué precauciones se deben tomar con respecto a la amplitud de las oscilaciones y con respecto a la medida del periodo de oscilación?

(P.A.U. Jun. 13)

Solución:

La amplitud de las oscilaciones debe ser pequeña. En teoría una aproximación aceptable es que sean menores de 15°. Como no usamos un transportador de ángulos, separaremos lo menos posible el hilo de la vertical, especialmente cuando la longitud del péndulo sea pequeña.

Se suelen medir 10 o 20 oscilaciones para aumentar la precisión del período, y disminuir el error relativo que daría la medida de una sola oscilación.
Un número demasiado grande de oscilaciones puede dar lugar a que cometamos errores al contarlas.

P.1. Un protón con velocidad $\overline{\boldsymbol{v}} = 5\cdot10^6\ \overline{\mathbf{i}}$ m/s penetra en una zona donde hay un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}} = 1\ \overline{\mathbf{j}}$ T.
a) Dibuja la fuerza que actúa sobre el protón y deduce la ecuación para calcular el radio de la órbita.
b) Calcula el número de vueltas en un segundo.
c) ¿Varía la energía cinética del protón al entrar en esa zona?
Datos: m(protón) = 1,67·10⁻²⁷ kg; q(protón) = 1,6·10⁻¹⁹ C. *(P.A.U. Jun. 13)*

Rta.: a) $R=\frac{m\,\mathrm{v}}{q\,B \operatorname{sen}\varphi}$; b) Media vuelta en 3,28·10⁻⁸ s.

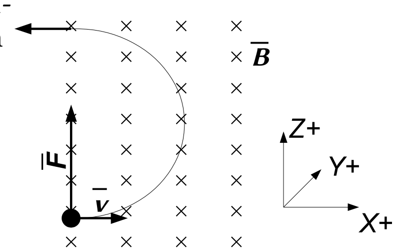
Datos	***Cifras significativas: 3***
Velocidad del protón	$\overline{\boldsymbol{v}} = 5{,}00\cdot10^6\ \overline{\mathbf{i}}$ m·s⁻¹
Intensidad del campo magnético	$\overline{\boldsymbol{B}} = 1{,}00\ \overline{\mathbf{j}}$ T
Carga del protón	$q = 1{,}60\cdot10^{-19}$ C
Masa del protón	$m = 1{,}67\cdot10^{-27}$ kg
Incógnitas	
Fuerza magnética sobre el protón	$\overline{\boldsymbol{F}}_B$
Radio de la trayectoria circular	R
Número de vueltas en un segundo	N
Ecuaciones	
Ley de Lorentz: fuerza magnética sobre una carga q que se desplaza en el interior de un campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ con una velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$	$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}})$
Aceleración normal (en un movimiento circular de radio R)	$a_N=\frac{v^2}{R}$
2ª ley de Newton de la Dinámica	$\Sigma\overline{\boldsymbol{F}} = m\cdot\overline{\boldsymbol{a}}$
Velocidad en un movimiento circular uniforme de radio R	$v=\frac{2\pi\cdot R}{T}$

Solución:

a) La fuerza magnética $\overline{\boldsymbol{F}}_B$ ejercida por el campo magnético $\overline{\boldsymbol{B}}$ sobre la carga q del protón que se desplaza a la velocidad $\overline{\boldsymbol{v}}$ es:

$$\overline{\boldsymbol{F}}_B = q\,(\overline{\boldsymbol{v}} \times \overline{\boldsymbol{B}}) = 1{,}60\cdot10^{-19}\ [\mathrm{C}]\ (5{,}00\cdot10^6\ \overline{\mathbf{i}}\ [\mathrm{m/s}] \times 1{,}00\ \overline{\mathbf{j}}\ [\mathrm{T}]) = 8{,}00\cdot10^{-13}\ \overline{\mathbf{k}}\ \mathrm{N}$$

Es perpendicular a la dirección del campo magnético y también a la velocidad, y el sentido viene dado por la regla de la mano izquierda, teniendo en cuenta que la carga es negativa. En la figura, las cruces × indican un campo magnético que entra en el papel.
Como solo actúa la fuerza magnética, el protón describe una trayectoria circular con velocidad de valor constante, por lo que la aceleración solo tiene componente normal a_N,



$$F_B=m\cdot a=m\cdot a_N=m\frac{v^2}{R}$$

Usando la expresión de la ley de Lorentz (en módulos) para la fuerza magnética

$$|q| \cdot B \cdot v \cdot \text{sen}\,\varphi = m\frac{v^2}{R}$$

Despejando el radio R

$$R = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B \cdot \text{sen}\,\varphi} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\,[\text{kg}] \cdot 5{,}00 \cdot 10^{6}\,[\text{m/s}]}{1{,}60 \cdot 10^{-19}\,[\text{C}] \cdot 1{,}00\,[\text{T}] \cdot \text{sen}\,90°} = 5{,}22 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 5{,}22\ \text{cm}$$

Análisis: el radio tiene un valor aceptable, unos centímetros.

b) Despejando el período de la ecuación de la velocidad:

$$T = \frac{2\pi \cdot R}{v} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 5{,}22 \cdot 10^{-2}\,[\text{m}]}{5{,}00 \cdot 10^{6}\,[\text{m/s}]} = 6{,}56 \cdot 10^{-8}\ \text{s}$$

El número de vueltas en 1 s sería:

$$N = 1{,}00\,[\text{s}] \cdot \frac{1\ \text{vuelta}}{6{,}56 \cdot 10^{-8}\,[\text{s}]} = 1{,}52 \cdot 10^{7}\ \text{vueltas}$$

Análisis: Si el protón entra en un campo magnético, saldrá de él después de describir media circunferencia, por lo que en realidad solo daría media vuelta en un tiempo de $T / 2 = 3{,}28 \cdot 10^{-8}$ s *y saldría a una distancia de* $2\ R = 10{,}4$ cm *del punto de entrada en el campo.*

c) No. La fuerza magnética es perpendicular a la trayectoria en todos los puntos y, por tanto, no realiza trabajo. Si el trabajo de la fuerza resultante es nulo, no hay variación de la energía cinética.

P.2. Una partícula de masa m = 0,1 kg, sujeta en el extremo de un resorte, oscila en un plano horizontal con un M.A.S., siendo la amplitud A = 0,20 m y la frecuencia f = 5 s^{-1}. En el instante inicial la posición es $x = A$. Calcula para $t = T/8$ s:

a) La velocidad y aceleración.
b) La energía mecánica.
c) La frecuencia con que oscilaría si se duplica la masa.

(P.A.U. Jun. 13)

Rta.: a) v = - 4,44 m/s; a = −140 m/s² ; b) E = 1,97 J; c) f = 3,54 Hz.

Datos	***Cifras significativas: 3***
Masa que realiza el M.A.S.	m = 0,100 kg
Amplitud	A = 0,200 m
Frecuencia	f = 5,00 s^{-1}
Posición inicial	$x_0 = A$ = 0,200 m
Incógnitas	
Velocidad para $t = T / 8$	v
Aceleración para $t = T / 8$	a
Energía mecánica	E
Frecuencia si se duplica la masa	f_2
Otros símbolos	
Constante elástica del resorte	k
Período	T
Pulsación (frecuencia angular)	ω
Fase inicial	φ_0
Fuerza recuperadora elástica	F
Ecuaciones	
Ecuación de movimiento en el M.A.S.	$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$
Relación entre la frecuencia angular y la constante elástica	$k = m \cdot \omega^2$
Relación entre la frecuencia angular y la frecuencia	$\omega = 2\pi \cdot f$
Relación entre frecuencia y el período	$f = 1 / T$
Energía potencial elástica	$E_p = ½\ k \cdot x^2$
Energía cinética	$E_c = ½\ m \cdot v^2$
Energía mecánica	$E = (E_c + E_p) = ½\ k \cdot A^2$

Solución:

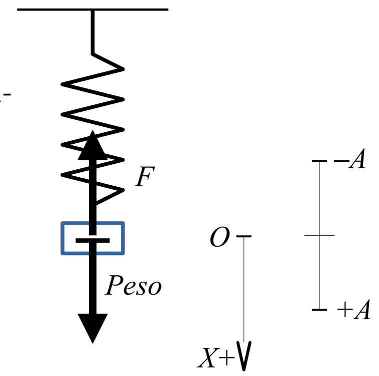
a) La ecuación de movimiento de un M.A.S. puede escribirse

$$x = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

(En «M.A.S.: obtener la ecuación de movimiento» se expone el fundamento teórico)
La amplitud es un dato: A = 0,200 m
La frecuencia angular se calcula a partir de la frecuencia:

$$\omega = 2\ \pi \cdot f = 2\ \pi\ [\text{rad}] \cdot 5{,}00\ [\text{Hz}] = 10\ \pi\ [\text{rad/s}] = 31{,}4\ \text{rad/s}$$

Para calcular la fase inicial se elige un sistema de referencia con origen O en la posición de equilibrio y el eje X+ vertical en el sentido del alargamiento (hacia abajo) y se sustituyen en la ecuación de movimiento los datos y los valores de la posición inicial:



$$A = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot 0 + \varphi_0)$$

$$\text{sen}(\varphi_0) = 1$$

$$\varphi_0 = \text{arcsen}(1) = \pi / 2\ [\text{rad}] = 1{,}57\ \text{rad}$$

La ecuación de movimiento queda:

$$x = 0{,}200 \cdot \text{sen}(10\ \pi \cdot t + \pi / 2)\ [\text{m}]$$

Como sen(φ + π /2) = cos φ, la ecuación puede escribirse más brevemente:

$$x = 0{,}200 \cdot \cos(10\ \pi \cdot t)\ [\text{m}]$$

Se obtiene la expresión de la velocidad derivando la ecuación de movimiento:

$$v = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\{0{,}200 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t)\}}{\mathrm{d}\,t} = -0{,}200 \cdot 31{,}4 \cdot \text{sen}(31{,}4 \cdot t) = -6{,}28 \cdot \text{sen}(31{,}4 \cdot t)\ [\text{m/s}]$$

Se necesita calcular el período:

$$T = 1 / f = 1 / (5{,}00\ [\text{s}^{-1}]) = 0{,}200\ \text{s}$$

El tiempo es

$$t = T / 8 = 0{,}200\ [\text{s}] / 8 = 0{,}0250\ \text{s}$$

Se sustituye para calcular la velocidad en ese instante:

$$v = -6{,}28 \cdot \text{sen}(10\ \pi\ [\text{rad/s}] \cdot 0{,}0250\ [\text{s}])\ [\text{m/s}] = -6{,}28 \cdot \text{sen}(\pi / 4)\ [\text{m/s}] = -4{,}44\ \text{m/s}$$

Se obtiene la expresión de la aceleración derivando la ecuación de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\{-6{,}28 \cdot \text{sen}(31{,}4 \cdot t)\}}{\mathrm{d}\,t} = -6{,}28 \cdot 31{,}4 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t) = -197 \cdot \cos(31{,}4 \cdot t)\ [\text{m/s}^2]$$

Sustituyendo el valor del tiempo se obtiene la aceleración para $t = T / 8$:

$$a = -197 \cdot \cos(10\ \pi\ [\text{rad/s}] \cdot 0{,}0250\ [\text{s}])\ [\text{m/s}^2] = -197 \cdot \cos(\pi / 4)\ [\text{m/s}^2] = -140\ \text{m/s}^2$$

b) La energía mecánica puede calcularse como la energía potencial máxima, la energía cinética máxima o la suma de las energías cinética y potencial en cualquier instante:

$$E = (E_c + E_p) = ½\ k \cdot A^2 = ½\ m \cdot v^2_m = ½\ m \cdot v^2 + ½\ k \cdot x^2$$

Si se opta por la primera, hay que calcular el valor de la constante elástica.

$$k = m \cdot \omega^2 = 0{,}100\ [\text{kg}] \cdot (31{,}4\ [\text{rad/s}])^2 = 98{,}7\ \text{N/m}$$

Energía mecánica:

$$E = E_{p\ m} = k \cdot A^2 / 2 = 98{,}7\ [\text{N/m}]\ (0{,}200\ [\text{m}])^2 / 2 = 1{,}97\ \text{J}$$

Se podría haber calculado la energía mecánica como la energía cinética máxima.
La velocidad tiene un valor máximo cuando el seno de la fase vale −1.

$$v_m = -6{,}28\ \text{sen}(10\ \pi \cdot t)\ [\text{m/s}] = 6{,}28\ \text{m/s}$$

$$E_{c\ m} = m \cdot v^2_m / 2 = 0{,}100\ [\text{kg}] \cdot (6{,}28\ [\text{m/s}])^2 / 2 = 1{,}97\ \text{J}$$

También se podría haber calculado la energía mecánica como la suma de las energías cinética y potencial, pero sería un proceso más largo ya que habría que calcular el valor de la constante elástica y el de la posición. (Solo se tenía calculada la velocidad)

c) De la ecuación que relaciona la constante elástica con la frecuencia angular

$$k = m \cdot \omega^2 = m\,(2\,\pi \cdot f)^2 = 4\,\pi^2 \cdot f^2 \cdot m$$

Se puede despejar la frecuencia

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow f_2 = \frac{1}{2 \cdot 3{,}14}\sqrt{\frac{98{,}7\ [\text{N/m}]}{0{,}2\ [\text{kg}]}} = 3{,}54\ \text{s}^{-1}$$

La frecuencia es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la masa. Si la masa se duplica, la frecuencia disminuye en un factor $\sqrt{2}$.

Cuestiones y problemas de las Pruebas de acceso a la Universidad (P.A.U.) en Galicia.
Respuestas y composición de Alfonso J. Barbadillo Marán.
Algunos cálculos se hicieron con una hoja de cálculo de LibreOffice u OpenOffice del mismo autor.
Algunas ecuaciones y las fórmulas orgánicas se construyeron con la extensión CLC09 de Charles Lalanne-Cassou.
La traducción al/desde el gallego se realizó con la ayuda de *traducindote*, de Óscar Hermida López.
Se procuró seguir las recomendaciones del Centro Español de Metrología (CEM)

Actualizado: 11/02/22