PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2021

(Resueltos por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

INSTRUCCIONES GENERALES: Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen.

1º) Tres hermanos quieren repartirse de forma equitativa un total de 540 acciones valoradas en 1.560 euros, que corresponden a tres empresas, A, B y C. Sabiendo que el valor actual de la acción A es el triple que el de B y la mitad que el de C, que el número de acciones de C es la mitad que el de B y que el actual valor en bolsa de la acción B es 1 euro, encuentre el número de cada tipo de acciones que le corresponde a cada hermano.

Sean x, y, z las acciones de las empresas A, B y C, respectivamente.

Sabiendo que el valor actual de la acción y es de 1 euro, el valor de las otras acciones es, según el enunciado, $x = 3$ euros y $z = 6$ euros.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=540 \\ 3x+y+6z=1.560 \\ y=2z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=540 \\ 3x+y+6z=1.560 \\ y-2z=0 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 540 & 1 & 1 \\ 1.560 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}=\frac{-1.080+1.560-3.240+3.120}{-2+3-6+6}=\frac{4.680-4.320}{1}=360.$$

$$y=\begin{vmatrix} 1 & 540 & 1 \\ 3 & 1.560 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-3.120+3.240=120.$$

$$z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 540 \\ 3 & 1 & 1.560 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.620 - 1.560 = 60.$$

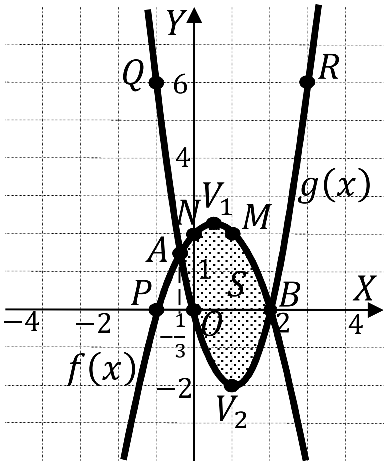
$$x \Rightarrow \frac{360}{3} = 120; \;\; y \Rightarrow \frac{120}{3} = 40; \;\; z \Rightarrow \frac{60}{3} = 20.$$

$\underline{A\ cada\ hermano\ le\ corresponden\ 120\ acciones\ de\ A, 60\ de\ B\ y\ 20\ de\ C.}$

****

2º) Calcula el área de la región limitado por las gráficas de las siguientes funciones: $f(x) = 2 + x - x^2$ y $g(x) = 2x^2 - 4x$.

Los puntos de corte de las dos funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:



$f(x) = g(x) \Rightarrow 2 + x - x^2 = 2x^2 - 4x;$

$3x^2 - 5x - 2 = 0;\ \ x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{3};\ \ x_2 = 2.$

$f\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{18-3-1}{9} = \frac{14}{9} \Rightarrow A\left(-\frac{1}{3}, \frac{14}{9}\right).$

$f(2) = 2 + 2 - 4 = 0 \Rightarrow B(2, 0).$

La función $f(x) = 2 + x - x^2$ es una parábola cóncava ($\cap$) cuyo vértice es el siguiente:

$$f'(x) = 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{8+2-1}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow V_1\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right).$$

Otros puntos de la parábola son $M(1, 2), N(0, 2),\ B(2, 0)$ y $P(-1, 0)$.

La función $g(x) = 2x^2 - 4x$ es una parábola convexa ($\cup$) cuyo vértice es el siguiente:

$$g'(x) = 4x - 4 = 4(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow V_2(1, -2).$$

Otros puntos de la parábola son $O(0, 0), B(2, 0), Q(-1, 6)$ y $R(3, 6)$.

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

Para el cálculo del área pedida se tiene en cuenta que en el intervalo correspondiente a la superficie a calcular todas las ordenadas de $f(x)$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de $g(x)$, por lo cual la superficie es la siguiente:

$$S = \int_{-\frac{1}{3}}^{2} [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{2} [(2 + x - x^2) - (2x^2 - 4x)] \cdot dx =$$

$$= \int_{-\frac{1}{3}}^{2} (-3x^2 + 5x + 2) \cdot dx = \left[-\frac{3x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 2x\right]_{-\frac{1}{3}}^{2} = \left[-x^3 + \frac{5x^2}{2} + 2x\right]_{-\frac{1}{3}}^{2} =$$

$$= \left(-2^3 + \frac{5\cdot 2^2}{2} + 2\cdot 2\right) - \left[-\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2}{2} + 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right] =$$

$$= -8 + 10 + 4 - \frac{1}{27} - \frac{5}{18} + \frac{2}{3} = 6 - \frac{1}{27} - \frac{5}{18} + \frac{2}{3} = \frac{324-2-15+36}{54} = \frac{360-17}{54} = \frac{343}{54}.$$

$$\underline{S = \frac{343}{54}\ u^2 \cong 6{,}35\ u^2.}$$

****

3º) Sean la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 3 = 0$. Se pide:

a) Calcular el ángulo que forman $r\ y\ \pi$.

b) Hallar el simétrico del punto de intersección de la recta r y el plano π con respecto al plano $\beta \equiv z - y = 0$.

c) Determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π.

----

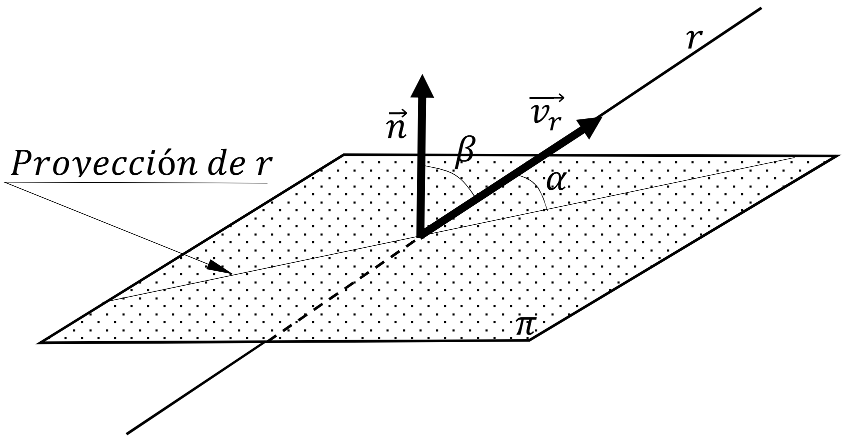
a)

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (-1, -1, 1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (2, 3, 1)$.

$$\overrightarrow{v_r'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = i + 2j - 3k + 2k - 3i - j = -2i + j - k \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (2, -1, 1)$.

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (2, 1, -1)$.



Por definición de producto escalar: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{v_r}| \cdot \cos\beta$.

$\cos\beta = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{v_r}|}$. Por ser $\alpha\ y\ \beta$ complementarios: $sen\ \alpha = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{v_r}|}$.

$$sen\ \alpha = \frac{(2,1,-1)\cdot(2,-1,1)}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{4-1-1}{\sqrt{4+1+1}\cdot\sqrt{4+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} =$$

$= 0{,}3333 \Rightarrow \alpha = arc\ sen\ 0{,}3333 = 19°\ \ 28'\ 16''$.

$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ forman\ un\ ángulo\ de\ 19°\ \ 28'\ 16''.}$

$b)$

El punto P intersección de la recta r y el plano π es la solución del sistema que forman sus expresiones:

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv \begin{cases} -x-y+z=0 \\ 2x+3y-z+1=0 \end{cases} \\ \pi \equiv 2x+y-z+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ 2x+3y-z=-1 \\ 2x+y-z=-3 \end{array}\right\}.$$

Restando la primera ecuación a las otras dos:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=-1 \\ x=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow -3+2y=-1;\ \ y=1;\ -3+1-z=0 \Rightarrow z=-2.$$

El punto de corte es $P(-3,1,-2)$.

La recta t que pasa por $P(-3,1,-2)$ y es perpendicular al plano $\beta \equiv y-z=0$ tiene como vector director al vector normal del plano: $\overrightarrow{n_\beta}=(0,1,-1)$.

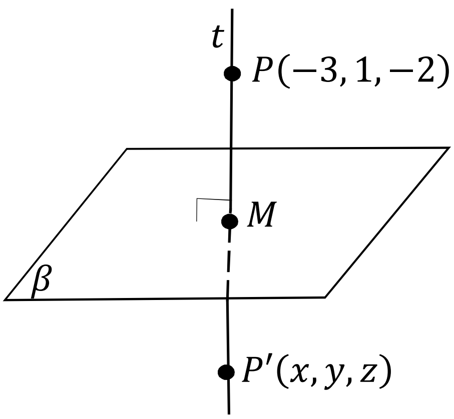
La expresión de t dada por unas ecuaciones paramétricas es $t \equiv \begin{cases} x=-3 \\ y=1+\lambda \\ z=-2-\lambda \end{cases}$.

El punto M, intersección del plano β con la recta t es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv y-z=0 \\ t \equiv \begin{cases} x=-3 \\ y=1+\lambda \\ z=-2-\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 1+\lambda-(-2-\lambda)=0;$$

$$1+\lambda+2+\lambda=0;\ \ 2\lambda=-3 \Rightarrow \lambda=-\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2} \\ z=-2+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-3,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).$$



Tiene que cumplirse que $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MP'}$.

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}=\left[\left(-3,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)-(-3,1,-2)\right]=\left(0,-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{MP'}=\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OM}=\left[(x,y,z)-\left(-3,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).\right]=\left(x+3,y+\frac{1}{2},z+\frac{1}{2}\right).$$

$$\left(0,-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\left(x+3,y+\frac{1}{2},z+\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+3=0 \to x=-3 \\ y+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2} \to y=-2 \\ z+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \to z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{P'(-3,-2,1)}.$$

$c)$

Existen varios procedimientos para determinar la proyección ortogonal de la recta r sobre el plano π; se va a emplear la siguiente.

La proyección ortogonal de una recta con respecto a un plano es la recta que pasa por dos puntos del plano que son proyecciones de dos puntos de la recta.

Uno de los puntos a considerar es el punto $P(-3, 1, -2)$, intersección de la recta r y el plano π.

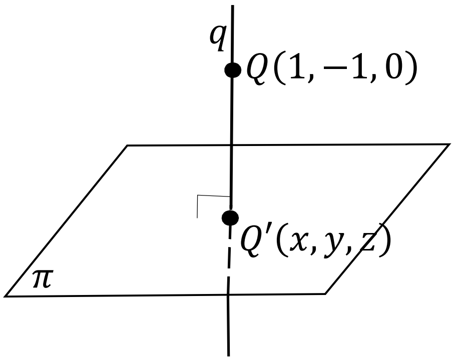
Para obtener otro punto de la recta $r \equiv \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ se expresa por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \left.\begin{array}{r} -x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x + y = \lambda \\ 2x + 3y = -1 + \lambda \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{r} -2x - 2y = -2\lambda \\ 2x + 3y = -1 + \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow y = -1 - \lambda: \; x - 1 - \lambda = \lambda; \; x = 1 + 2\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}. \qquad \text{Por ejemplo, para } \lambda = 0 \Rightarrow Q(1, -1, 0).$$

La recta q tiene por vector director al normal del plano π, que es $\vec{n} = (2, 1, -1)$; su expresión es la siguiente: $q \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = -1 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$.



El punto Q' es la intersección de q y π:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x + y - z = -3 \\ q \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \mu \\ z = -\mu \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 - 1 + \mu - (-\mu) = -3; \; 1 + 2\mu = -3; \; 2\mu = -4;$$

$$\mu = -2 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - 2 = -3 \\ z = 2 \end{cases}\right\} \Rightarrow Q'(1, -3, 2).$$

La recta r' pedida, proyección ortogonal de r sobre π es la que pasa por los puntos $P(-3, 1, -2)$ y $Q'(1, -3, 2)$.

Sabiendo que la recta que pasa por dos puntos viene dada por la expresión $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$:

$$r' \equiv \frac{x+3}{1+3} = \frac{y-1}{-3-1} = \frac{z+2}{2+2};\ \ \frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+2}{4} \Rightarrow \underline{r' \equiv \frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}}.$$

****

4º) El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal de madia 8,8 meses y una desviación típica de 3 meses.

a) ¿Qué porcentaje de individuos de esta espacie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?

b) Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que el menos uno no supere los 10 meses de vida?

c) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo $(8,8 - c, 8,8 + c)$ incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie?

----

a)

$Datos$: $\mu = 8,8$; $\sigma = 3$.

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(8,8;\ 3)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-8,8}{3}$.

$P = P(X > 10) = P\left(Z > \frac{10-8,8}{3}\right) = P\left(Z > \frac{1,2}{3}\right) = P(Z > 0,4) =$

$= 1 - P(Z \leq 0,4) = 1 - 0,6554 = \underline{0,3446 = 34,46\ \%}$.

$P = P(7 \leq X \leq 10) = P\left(\frac{7-8,8}{3} \leq Z \leq \frac{10-8,8}{3}\right) = P\left(\frac{-1,8}{3} \leq Z \leq \frac{1,2}{3}\right) =$

$= P(-0,6 \leq Z \leq 0,4) = P(Z < 0,4) - [1 - P(Z < 0,6)] =$

$= P(Z < 0,4) - 1 + P(Z < 0,6) = 0,6554 - 1 + 0,7257 = 1,3811 - 1 =$

$= \underline{0,3811 = 38,11\ \%}$.

b)

La probabilidad de que un individuo no supere los 10 meses de vida es la siguiente:

$P(X \leq 10) = 1 - P(X > 10) = 1 - 0,3446 = 0,6554.$

Como se pide la probabilidad de que “al menos uno de cuatro individuos no supere los 10 meses de vida”, hemos de recurrir a una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 4$; $p = 0,6554$; $q = 1 - p = 0,3446$; $r \geq 1$.

La fórmula de la distribución binomial es: $P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

$$P = P(r \geq 1) = 1 - P(r = 0) = 1 - \binom{4}{0} \cdot 0{,}6554^0 \cdot 0{,}3446^{4-0} =$$

$$= 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}3446^4 = 1 - 0{,}0141 = \underline{0{,}9859}.$$

$c)$

Se conoce la probabilidad, por lo tanto, tipificando la variable: $Z = \frac{X-8{,}8}{3}$.

$$P = P(8{,}8 - c \leq X \leq 8{,}8 + c) = P\left(\frac{8{,}8-c-8{,}8}{3} \leq Z \leq \frac{8{,}8+c-8{,}8}{3}\right) = 0{,}98;$$

$$P\left(\frac{-c}{3} \leq Z \leq \frac{c}{3}\right) = P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - \left[1 - P\left(Z < \frac{c}{3}\right)\right] = P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - 1 + P\left(Z < \frac{c}{3}\right) =$$

$$= 2 \cdot P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - 1 = 0{,}98;\ \ P\left(Z < \frac{c}{3}\right) = \frac{1{,}98}{2} = 0{,}9900.$$

Buscando en la tabla $N(0, 1)$ de forma inversa, a 0,9900 le corresponde, aproximadamente, el valor $2{,}33$.

$$\frac{c}{3} \cong 2{,}33 \Rightarrow \underline{c \cong 7}.$$

****

5º) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones dependientes del parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} ax - 2y + (a-1)z = 4 \\ -2x + 3y - 6z = 2 \\ -ax + y - 6z = 6 \end{array}\right\}.$$

a) Discuta el sistema según los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema para $a = 1$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & -2 & a-1 \\ -2 & 3 & -6 \\ -a & 1 & -6 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a & -2 & a-1 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -a & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & -2 & a-1 \\ -2 & 3 & -6 \\ -a & 1 & -6 \end{vmatrix} = -18a - 2(a-1) - 12a + 3a(a-1) + 6a + 24 =$$

$$= -24a - 2a + 2 + 3a^2 - 3a + 24 = 3a^2 - 29a + 26 = 0;\ \ x = \frac{29 \pm \sqrt{29^2 - 12 \cdot 26}}{2 \cdot 3} =$$

$$= \frac{29 \pm \sqrt{841 - 312}}{6} = \frac{29 \pm \sqrt{529}}{6} = \frac{29 \pm 23}{6} \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = \frac{26}{3}.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq 1 \\ a \neq 26/3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 + 2F_1 \\ F_3 \to F_3 + F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \\ 0 & -1 & -6 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ a = \frac{26}{3} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} \frac{26}{3} & -2 & \frac{23}{3} & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ -\frac{26}{3} & 1 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

A efectos de rango, las matrices $M'\ y\ M''$ son equivalentes, siendo:

$$M''=\begin{pmatrix}26 & -6 & 23 & 12\\ -6 & 9 & -18 & 6\\ -26 & 3 & -18 & 18\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M''\Rightarrow\{C_{1,}C_2,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}26 & -6 & 12\\ -6 & 9 & 6\\ -26 & 3 & 18\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}13 & -2 & 2\\ -3 & 3 & 1\\ -13 & 1 & 3\end{vmatrix}=117-6+26+78-13-18=$$

$$=117-6+26+78-13-18=221-35\neq 0\Rightarrow Rang\ M''=Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=\tfrac{26}{3}\Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$

Para $a=1$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r}x-2y=4\\ -2x+3y-6z=2\\ -x+y-6z=6\end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado, como se comprobó en el apartado anterior. Despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la segunda, resulta $\left.\begin{array}{r}x-2y=4\\ -x+y-6z=6\end{array}\right\}$. Haciendo $z=-\lambda$:

$$\left.\begin{array}{l}x-2y=4\\ -x+y=6+6\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow -y=10+6\lambda;\ \ y=-10-6\lambda.$$

$$x-2\cdot(-10-6\lambda)=4;\ \ x+20+12\lambda=4;\ \ x=-16-12\lambda.$$

$$\underline{Solución: x=-16-12\lambda;\ \ y=-10-6\lambda;\ \ z=\lambda,\forall\lambda\in R.}$$

****

6º) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} sen\, x \;\; si \;\; x < 0 \\ x \cdot e^x \;\; si \;\; x \geq 0 \end{cases}$:

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f restringida a $(-\pi, 2)$. Demuestre que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$.

c) Calcule $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x) \cdot dx$.

----

a)

La función $f(x)$ es continua y derivable en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa. Se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\; x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} sen\, x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x \cdot e^x) = 0 = f(0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow \underline{f(x)\; es\; continua\; para\; x = 0}.$$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 0$ cuya derivabilidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x \;\; si\; x < 0 \\ e^x(x+1) \;\; si \;\; x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \;\Rightarrow f'(0) = \begin{cases} 1 \;\; si \;\; x < 0 \\ 1 \;\; si \;\; x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow 1 \Rightarrow \underline{f(x)\; es\; derivable\; en\; x = 0}.$$

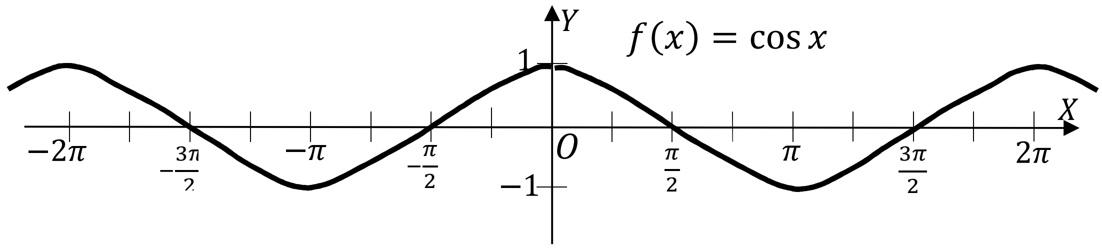
b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x \;\; si\; x < 0 \\ e^x(x+1) \;\; si \;\; x \geq 0 \end{cases}.$$

En el intervalo $(-\pi, 0)$ la función $f'(x) = \cos x$ es negativa en el intervalo $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ y es positiva en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Para una mejor comprensión del crecimiento o decrecimiento de la función coseno se hace su representación gráfica, aproximada.



En el intervalo $(-\pi, 0)$ la función $f'(x) = \cos x$ es negativa en el intervalo $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ y es positiva en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

En el intervalo $(0, 2) \Rightarrow f'(x) = e^x \cdot (x+1) > 0$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento\colon f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right).}$$

$$\underline{Crecimiento\colon f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 2\right).}$$

Para demostrar que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$ se tiene en cuenta que la función es continua en $[0, 1]$.

$f(0) = 0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0.$ $\qquad f(1) = 1 \cdot e^1 = e.$

Teniendo en cuanta el teorema de los valores intermedios o desigualdad de Darboux que dice que "si una función es continua en un intervalo $[a, b]$ toma todos los valores comprendidos entre $f(a)\ y\ f(b)$ al menos una vez", por lo cual y teniendo en cuanta que $0 < 2 < e$, queda demostrado que

$$\underline{Existe\ al\ menos\ un\ x_0 \in [0, 1]\ de\ manera\ que\ \ f(x_0) = 2.}$$

También se puede resolver este apartado de la forma siguiente:

Demostrar que existe un punto $x_0 \in [0, 1]$ de manera que $f(x_0) = 2$ es equivalente a demostrar que la función $g(x) = f(x) - 2$ tiene una raíz real en el intervalo $[0, 1]$.

En el intervalo $[0, 1]$ es $f(x) = x \cdot e^x$ y $g(x) = f(x) - 2 = x \cdot e^x - 2$.

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

A la función $g(x) = x \cdot e^x - 2$ le es aplicable el teorema de Bolzano en el intervalo [0, 1]:

$$g(0) = 0 \cdot e^0 - 2 = 0 - 2 = -2 < 0. \qquad g(1) = 1 \cdot e^1 - 2 = e - 2 > 0.$$

Lo anterior demuestra que $g(x)$ tiene al menos una raíz real en $[0, 1]$ y también que $\underline{existe\ al\ menos\ un\ x_0 \in [0, 1]\ de\ manera\ que\ \ f(x_0) = 2, c.q.d.}$

$c)$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x) \cdot dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} sen\ x \cdot dx + \int_{0}^{1} x \cdot e^x \cdot dx = A + B. \quad (*)$$

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} sen\ x \cdot dx = [-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = -\cos 0 - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 - 0 = -1.$$

$$B = \int_0^1 x \cdot e^x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x \to du = dx \\ e^x \cdot dx = dv \to v = e^x \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left[x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx \right]_0^1 =$$

$$= [x \cdot e^x - e^x]_0^1 = [e^x(x-1)]_0^1 = e^1(1-1) - e^0(0-1) = 1.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A y B:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x) \cdot dx = -1 + 1 \Rightarrow \underline{I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{1} f(x) \cdot dx = 0.}$$

****

7º) Sean los planos $\pi_1 \equiv x + y = 1$ y $\pi_2 \equiv x + z = 1$.

a) Halle los planos paralelos al plano π_1 tales que su distancia al origen de coordenadas sea 2.

b) Halle la recta que pasa por el punto $P(0, 2, 0)$ y es perpendicular al plano π_2.

c) Halle la distancia entre los puntos de intersección del plano π_1 con los ejes X e Y.

----

a)

Los planos paralelos al plano $\pi_1 \equiv x + y - 1 = 0$ tienen por expresión general $\pi \equiv x + y + D = 0$.

La distancia del origen de coordenadas al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(O, \pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi \equiv x + y + D = 0$:

$$d(O, \pi) = 2 \Rightarrow \frac{|D|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{2}} \Rightarrow |D| = 2\sqrt{2} \Rightarrow D_1 = -2\sqrt{2}, D_2 = 2\sqrt{2}.$$

Los planos pedidos son: $\underline{\pi' \equiv x + y - 2\sqrt{2} = 0 \; y \; \pi'' \equiv x + y + 2\sqrt{2} = 0}$.

b)

Un vector normal del plano π_2 es $\overrightarrow{n_2} = (1, 0, 1)$.

La recta r pedida es, dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas, la siguiente: $\underline{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{cases}}$.

c)

Los puntos de intersección del plano $\pi_1 \equiv x + y - 1 = 0$ con los ejes X e Y son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \pi_1 \equiv x + y - 1 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x - 1 = 0;\;\; x = 1 \Rightarrow A(1, 0, 0).$$

$$Eje\ X \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \pi_1 \equiv x + y - 1 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y - 1 = 0;\;\; y = 1 \Rightarrow B(0, 1, 0).$$

La distancia entre los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(0, 1, 0)$ es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,1,0) - (1,0,0)] = (-1,1,0).$$

$$d\left(\overline{AB}\right) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} \Rightarrow \underline{d\left(\overline{AB}\right) = \sqrt{2}\, unidades}.$$

****

8º) Una estación de medición de calidad del aire mide niveles de NO_2 y de partículas en suspensión. La probabilidad de que en un día se mida un nivel de NO_2 superior al permitido es 0,16. En los días en los que se supera el nivel permitido de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel permitido de partículas es 0,33. En los días en los que no se supera el nivel de NO_2, la probabilidad de que se supere el nivel de partículas es 0,08.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se superen los dos niveles permitidos?

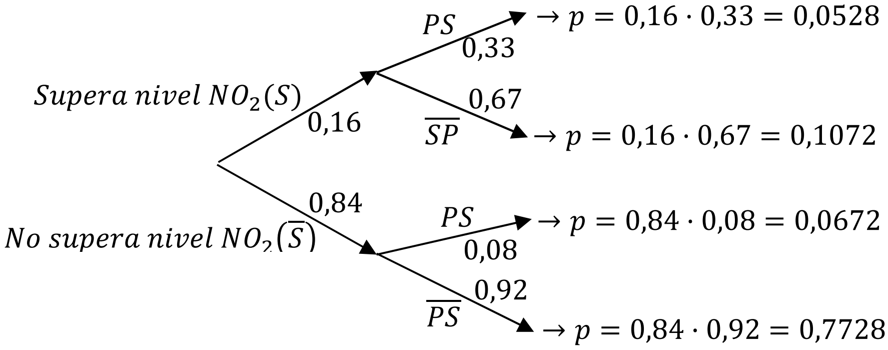
b) ¿Cuál es la probabilidad de que se supere al menos uno de los dos?

c) ¿Son independientes los sucesos "en un día se supera el nivel permitido de NO_2" y "en un día se supera el nivel permitido de partículas"?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que en un día se supere el nivel permitido de NO_2, sabiendo que no se ha superado el nivel permitido de partículas?

Probabilidad de superar el nivel de partículas en suspensión: SP.

Probabilidad de no superar el nivel de partículas en suspensión: $\overline{SP}$.



a)

$$P = P(S \cap PS) = P(S) \cdot P(PS/S) = 0{,}16 \cdot 0{,}33 = \underline{0{,}0528}.$$

b)

La probabilidad pedida es igual a la unidad menos la probabilidad de que no se supere ninguno de los dos niveles:

$$P = 1 - P(\overline{S} \cap \overline{PS}) = 1 - P(\overline{S}) \cdot P(\overline{PS}|\overline{S}) = 1 - 0{,}84 \cdot 0{,}02 = 1 - 0{,}7728 =$$

$$= \underline{0{,}2272}.$$

c)

Dos sucesos $PS\ y\ S$ son independientes cuando $P(PS \cap S) = P(PS) \cdot P(S)$:

$P(S) = 0{,}16.$

$P(PS) = P(S \cap PS) + P(\overline{S} \cap PS) = P(S) \cdot P(PS/S) + P(\overline{S}) \cdot P(PS/\overline{S}) =$

$= 0{,}16 \cdot 0{,}33 + 0{,}84 \cdot 0{,}08 = 0{,}0528 + 0{,}0672 = 0{,}1200.$

$P(PS) \cdot P(S) = 0{,}16 \cdot 0{,}12 = 0{,}0192 \neq 0{,}0528 = P(S \cap PS).$

$\underline{Por\ lo\ expuesto\ anteriormente\ los\ sucesos\ S\ y\ PS\ NO\ son\ independientes}.$

$d)$

$$P\left(S \middle| \overline{PS}\right) = \frac{P\left(S \cap \overline{PS}\right)}{P\left(\overline{PS}\right)} = \frac{P(S) \cdot P\left(\overline{PS} \middle| S\right)}{1 - P(PS)} = \frac{0{,}16 \cdot 0{,}67}{1 - 0{,}12} = \frac{0{,}1072}{0{,}88} = \underline{0{,}1218}.$$

****