PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE MADRID

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

OPCIÓN A

1º) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+my=1 \\ -2x-(m+1)y+z=-1 \\ x+(2m-1)y+(m+2)z=2+2m \end{cases}$, se pide:

a) Discutir el sistema en función del parámetro m.

b) Resolver el sistema cuando $m=0$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -m-1 & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 1 & m & 0 & 1 \\ -2 & -m-1 & 1 & -1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 & 2+2m \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ -2 & -m-1 & 1 \\ 1 & 2m-1 & m+2 \end{vmatrix}=$$

$$=(-m-1)(m+2)+m-(2m-1)+2m(m+2)=$$

$$=-m^2-2m-m-2+m-2m+1+2m^2+4m=m^2-1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1=-1, a_2=-1.$$

$$\underline{Para\ \left.\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

Para $m = -1 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 6 + 1 - 3 = 4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A' = 3.$

$$\underline{Para\, m = -1 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Para $m = 1 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 - 1 + 3 = 0 \Rightarrow Rang\ A' = 2.$

$$\underline{Para\, m = 1 \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Para $m = 0$ el sistema resulta $\begin{cases} x = 1 \\ -2x - y + z = -1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$, que es compatible determinado.

Sustituyendo el valor de $x = 1$ en las otras ecuaciones:

$\left.\begin{matrix} -2 - y + z = -1 \\ 1 - y + 2z = 2 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} -y + z = 1 \\ -y + 2z = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z = 0;\ \ y = -1.$

$$\underline{Solución: x = 1, y = -1, z = 0.}$$

****

2º) $a)$ En un experimento en un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los resultados siguientes: $m_1 = 0{,}92,\ m_2 = 0{,}94,\ m_3 = 0{,}89,$ $m_4 = 0{,}90\ y\ m_5 = 0{,}91$. Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función: $E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + \cdots + (x - m_5)^2$ alcanza el mínimo. Calcule dicho valor x.

$b)$ Aplique el método de integración por partes para calcular la siguiente integral: $I = \int_1^2 x^2 \cdot Lx \cdot dx$, donde L significa logaritmo neperiano.

$a)$

$$E(x) = (x - 0{,}92)^2 + (x - 0{,}94)^2 + (x - 0{,}89)^2 + (x - 0{,}9)^2 + (x - 0{,}91)^2 =$$

$$= (x^2 - 1{,}84x + 0{,}8464) + (x^2 - 1{,}88x + 0{,}8836) + (x^2 - 1{,}78x + 0{,}7921) +$$

$$+(x^2 - 1{,}8x + 0{,}8100) + (x^2 - 1{,}82x + 0{,}8281) =$$

$$= 5x^2 - 9{,}12x + 4{,}1602.$$

Otra forma de obtener la función de forma muy aproximada es la siguiente:

$$\overline{m} = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5}{N} = \frac{0{,}92+0{,}94+0{,}89+0{,}90+0{,}91}{5} = \frac{4{,}56}{5} = 0{,}912.$$

$$E(x) = (x - m_1)^2 + (x - m_2)^2 + \cdots + (x - m_5)^2 = \sum_{1=1}^{i=m} (x - m_i)^2 =$$

$$= N \cdot (x - \overline{m})^2 = 5 \cdot (x - 0{,}912)^2.$$

La condición necesaria para que una función tenga un mínimo relativo es que se anule su primera derivad y sea positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera derivada.

$$E'(x) = 10 \cdot (x - 0{,}912). \qquad E''(x) = 10 > 0 \Rightarrow Mínimo.$$

$$E'(x) = 0 \Rightarrow 10 \cdot (x - 0{,}912) = 0 \Rightarrow x = 0{,}912.$$

$\underline{La\ suma\ de\ los\ cuadrados\ de\ los\ errores\ es\ mínima\ para\ x = 0{,}912}.$

$b)$

En primer lugar resolvemos la integral indefinida:

$$A = \int x^2 \cdot Lx \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = Lx \to du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dv = x^2 \cdot dx \to v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow Lx \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot Lx - \frac{1}{3} \cdot \int x^2 \cdot dx = \frac{x^3}{3} \cdot Lx - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{x^3}{9} \cdot (3Lx - 1) + C = A.$$

$$I = \int_1^2 x^2 Lx \cdot dx = \left[\frac{x^3}{9} \cdot (3Lx - 1)\right]_1^2 = \left[\frac{2^3}{9} \cdot (3L2 - 1)\right] - \left[\frac{1^3}{9} \cdot (3L1 - 1)\right] =$$

$$= \frac{8}{9} \cdot (3L2 - 1) - \frac{1}{9} \cdot (3L1 - 1) = \frac{8}{3} L2 - \frac{8}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{3} L2 - \frac{7}{9}.$$

$$\underline{I = \int_1^2 x^2 Lx \cdot dx = \frac{8}{3} L2 - \frac{7}{9}.}$$

****

3º) Dados los planos $\pi_1 \equiv 4x+6y-12z+1=0$ y $\pi_2 \equiv -2x-3y+6z-5=0$, se pide:

a) Calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.

b) Para el cuadrado de vértices consecutivos ABCD, con $A(2,1,3)$ y $B(1,2,3)$, calcular los vértices C y D, sabiendo que C pertenece a los planos π_2 y $\pi_3 \equiv x-y+z=2$.

----

a)

El lado del cubo es igual que la distancia entre los planos paralelos π_1 y π_2.

La distancia entre los planos α_1 y α_2 paralelos dados por sus ecuaciones generales $\alpha_1 \equiv Ax+By+Cz+D_1=0$ y $\alpha_2 \equiv Ax+By+Cz+D_2=0$ viene dada por la fórmula $d=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$:

$$\pi_1 \equiv 4x+6y-12z+1=0 \ y \ \pi_2 \equiv 4x+6y-12z+10=0$$

$$\ell = d(\pi_1,\pi_2)=\frac{|10-1|}{\sqrt{4^2+6^2+12^2}}=\frac{|9|}{\sqrt{16+36+144}}=\frac{9}{\sqrt{196}}=\frac{9}{14}.$$

$$V=\ell^3=\left(\frac{9}{14}\right)^3=\frac{9^3}{14^3}=\frac{729}{2.744}=0{,}2657.$$

$\underline{El\ volumen\ del\ cubo\ es\ de\ 0{,}2657\ unidades\ cúbicas}$.

b)

Los plano $\pi_2 \equiv -2x-3y+6z-5=0$ y $\pi_3 \equiv x-y+z=2$ determinan la recta $s \equiv \begin{cases} 2x+3y-6z+5=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$.

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} 2x+3y-6z+5=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=-5+6\lambda \\ x-y=2-\lambda \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+3y=-5+6\lambda \\ 3x-3y=6-3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 5x=1+3\lambda; \ \ x=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\lambda. \ \ \frac{1}{5}+\frac{3}{5}\lambda-y=2-\lambda;$$

$$y=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\lambda-2+\lambda=-\frac{9}{5}+\frac{8}{5}\lambda \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\lambda \\ y=-\frac{9}{5}+\frac{8}{5}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}.$$

Los puntos $A(2,1,3)$ y $B(1,2,3)$ determinan el vector: $\overrightarrow{BA}=(1,-1,0)$.

La recta que contiene a los puntos A y B es $t \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 3 \end{cases}$.

El haz de planos β perpendiculares a la recta t es $\beta \equiv x - y + K = 0$.

De los infinitos planos de haz β, el plano α que contiene al punto B es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv x - y + K = 0 \\ B(1,2,3) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - 2 + K = 0 \Rightarrow K = 1 \Rightarrow \alpha \equiv x - y + 1 = 0.$$

El punto C es la intersección del plano α y la recta s:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \equiv x - y + 1 = 0 \\ s \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\lambda \\ y = -\frac{9}{5} + \frac{8}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\lambda + \frac{9}{5} - \frac{8}{5}\lambda + 1 = 0;\;\; 2 - \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 3.$$

El punto C es: $s \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\lambda \\ y = -\frac{9}{5} + \frac{8}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 3 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 3 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{C(2,3,3)}$.

Hay diversas formas de obtener el punto D; una de ellas es la siguiente:

El centro del cuadrado M es el punto medio del segmento de extremos $A(2,1,3)$ y $C(2,3,3) \Rightarrow M(2,2,3)$.

El centro del cuadrado M también es el punto medio del segmento de extremos $B(1,2,3)$ y $D(x,y,z)$.

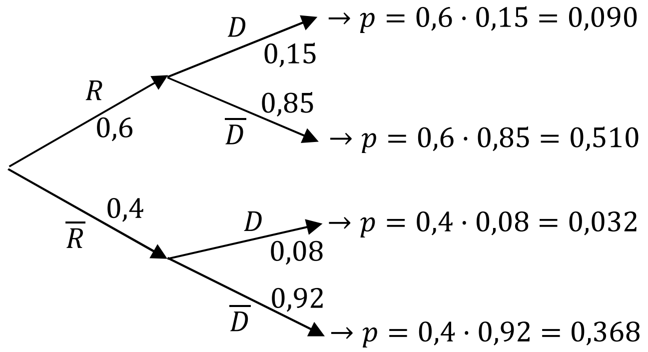
$$\frac{1+x}{2} = 2 \Rightarrow x = 3;\;\; \frac{2+y}{2} = 2 \Rightarrow y = 2;\;\; \frac{3+z}{2} = 3 \Rightarrow z = 3 \;\Rightarrow\; \underline{D(3,2,3)}.$$

****

4º) El 60 % de las ventas de unos grandes almacenes corresponden a artículos con precios rebajados. Los clientes devuelven el 15 % de los artículos que compran rebajados, porcentaje que disminuye al 8 % si los artículos han sido adquiridos sin rebajas.

a) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.

b) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?



a)

$$P = P(D) = P(R) \cdot P(D/R) + P(\overline{R}) \cdot P(\overline{R}/D) = 0{,}6 \cdot 0{,}15 + 0{,}4 \cdot 0{,}08 =$$

$$= 0{,}090 + 0{,}032 = \underline{0{,}122}.$$

b)

$$P = P(D/R) = \frac{P(R \cap D)}{P(R)} = \frac{P(R) \cdot P(D/R)}{P(R) \cdot P(D/R) + P(\overline{R}) \cdot P(\overline{R}/D)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}15}{0{,}6 \cdot 0{,}15 + 0{,}4 \cdot 0{,}08} =$$

$$= \frac{0{,}090}{0{,}090 + 0{,}032} = \frac{0{,}090}{0{,}122} = \frac{90}{122} = \underline{\frac{45}{61} = 0{,}7377}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

$a)$ Obtener los valores del parámetro m para los que la matriz A admite inversa.

$b)$ Para $m=0$, calcular $A \cdot B$ y $A^{-1} \cdot B$.

$c)$ Calcular $B \cdot B^t$ y $B^t \cdot B$, donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

$a)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 0 & 2 \\ -2 & 4 & m \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-4m-4-m^2=0;\;\; m^2+4m+4=0;$$

$(m+2)^2=0 \Rightarrow m=-2.$

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall m \in R-\{-2\}}.$$

$b)$

Para $m=0 \Rightarrow A \cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}.$

Para $m=0 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow -\tfrac{1}{2}F_1\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_1 \rightarrow F_1+2F_2 \\ F_3 \rightarrow \frac{1}{2}F_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 + 2F_3 \\ F_2 \to F_2 + F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para $m = 0 \Rightarrow A^{-1} \cdot B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}.$

$c)$

$B \cdot B^t = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$

$B^t \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{(4)}.$ (matriz de una fila y una columna)

****

2º) Dada la función $f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$, se pide:

a) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)$.

b) Calcular $f'(4)$.

c) Hallar el área del recinto limitado por la curva $y=f(x)$, el eje OX y las rectas $x=-1\ \ y\ \ x=1$.

La función $f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$ puede redefinirse como $f(x)=\begin{cases}\frac{-x}{\sqrt{x^2+9}} & si\ x<0\\ \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} & si\ x\geq 0\end{cases}$.

Las asíntotas horizontales de una función son los valores finitos que alcanza la función cuando x tiende a más infinito o menos infinito.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{\frac{x^2+9}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}=\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{9}{\infty}}}=$$
$$=\frac{-1}{\sqrt{1+0}}=\frac{-1}{1}=-1.$$

<u>$La\ recta\ y=-1\ es\ asíntota\ horizontal\ en\ (-\infty,0).$</u>

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+9}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+9}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{\infty}}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=\frac{1}{1}=1.$$

<u>$La\ recta\ y=1\ es\ asíntota\ horizontal\ en\ (0,+\infty).$</u>

$$g(x)=\frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}\Rightarrow g'(x)=\frac{-1\cdot\sqrt{x^2+9}+x\cdot\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+9}}}{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2}=-\frac{\sqrt{x^2+9}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9}=-\frac{\frac{x^2+9-x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9}=$$
$$=\frac{-9}{(x^2+9)\cdot\sqrt{x^2+9}}.$$

$$h(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\Rightarrow h'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x^2+9}-x\cdot\frac{2x}{2\cdot\sqrt{x^2+9}}}{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2+9}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9}=\frac{\frac{x^2+9-x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9}=$$
$$=\frac{9}{(x^2+9)\cdot\sqrt{x^2+9}}.$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{-9}{(x^2+9)\cdot\sqrt{x^2+9}} & si\ x<0\\ \frac{9}{(x^2+9)\cdot\sqrt{x^2+9}} & si\ x\geq 0\end{cases}.$$

$$\underline{f'(4) = \frac{9}{(4^2+9)\cdot\sqrt{4^2+9}} = \frac{9}{25\cdot\sqrt{25}} = \frac{9}{125}.}$$

$c)$

La función $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}} = \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}} & si\ x < 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} & si\ x \geq 0 \end{cases}$ tiene ordenadas positivas en el intervalo $(-1, 1)$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot dx = \int_{-1}^{0} f(x) \cdot dx + \int_{0}^{1} f(x) \cdot dx = \int_{-1}^{0} \frac{-x\cdot dx}{\sqrt{x^2+9}} + \int_{0}^{1} \frac{x\cdot dx}{\sqrt{x^2+9}} =$$

$= A + B.$ (*)

Resolvemos en primer lugar la integral indefinida:

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \cdot dx \Rightarrow \begin{Bmatrix} x^2 + 9 = t \\ 2x \cdot dx = dt \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{Bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \cdot \int t^{-\frac{1}{2}} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$$

$$= \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2 + 9} + C.$$

Sustituyendo el valor obtenido en las expresiones de A y B:

$$A = \int_{-1}^{0} \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}} \cdot dx = \int_{0}^{-1} \frac{x\cdot dx}{\sqrt{x^2+9}} = \left[\sqrt{x^2 + 9}\right]_0^{-1} = \sqrt{(-1)^2 + 9} - \sqrt{0^2 + 9} =$$

$$= \sqrt{1 + 9} - 3 = \sqrt{10} - 3.$$

$$B = \int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \cdot dx = \left[\sqrt{x^2 + 9}\right]_0^{11} = \sqrt{1^2 + 9} - \sqrt{0^2 + 9} = \sqrt{10} - 3.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A y B:

$$S = \sqrt{10} - 3 + \sqrt{10} - 3 = 2\sqrt{10} - 6.$$

$$\underline{S = \left(2\sqrt{10} - 6\right) u^2 \cong 0{,}32\ u^2.}$$

****

3º) Dados el punto $P(1,1,1)$ y las rectas $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 5x + z = 6 \end{cases}$, $s \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1/3}$, se pide:

a) Hallar la distancia del punto P a la recta r.

b) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s.

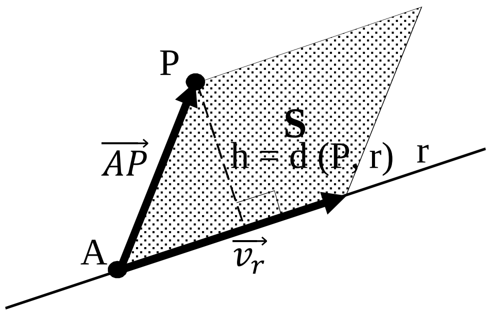
c) Hallar el plano perpendicular a la recta s y que pase por el punto P.

----

a)

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un esquema de la situación.



$$\left.\begin{matrix} S = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right| \\ S = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{h = d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}}.$$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 5x + z = 6 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda \Rightarrow y = -2 + 2\lambda;\ z = 6 - 5\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 6 - 5\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $A(0,-2,6)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1,2,-5)$.

$\overrightarrow{AP} = [P - A] = [(1,1,1) - (0,-2,6)] = (1,3,-5)$.

Aplicando la fórmula al punto P y a la recta r:

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -5 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{1^2+2^2+(-5)^2}} = \frac{|-10i-5j+3k-2k+15i+5j|}{\sqrt{1+4+25}} = \frac{|5i+k|}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{5^2+1^2}}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{25+1}}{\sqrt{30}} =$$

$$= \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{13}{15}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{13 \cdot 15}}{15} = \underline{\frac{\sqrt{195}}{15}\ u = d(P,r)}.$$

Otra forma de resolver este ejercicio es la siguiente:

El haz de planos perpendiculares a la recta r tiene la siguiente ecuación general:

$\alpha \equiv x + 2y - 5z + D = 0.$

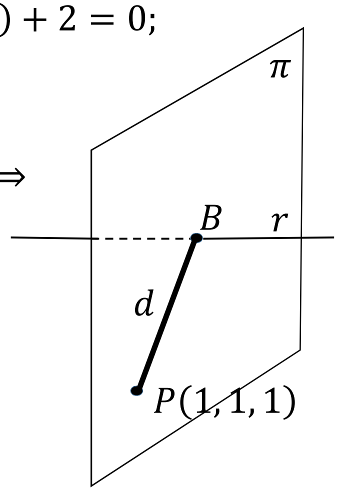
De los infinitos planos del haz α, el plano π que contiene al punto $P(1,1,1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \equiv x + 2y - 5z + D = 0 \\ P(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + 2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + D = 0 \Rightarrow D = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ \pi \equiv x + 2y - 5z + 2 = 0.$

El punto B, intersección de la recta r con el plano π es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x + 2y - 5z + 2 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 6 - 5\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda + 2(-2 + 2\lambda) - 5(6 - 5\lambda) + 2 = 0;$$



$\lambda - 4 + 4\lambda - 30 + 25\lambda + 2 = 0;\ \ 30\lambda - 32 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{16}{15} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{16}{15} \\ y = -2 + \frac{32}{15} = \frac{2}{15} \\ z = 6 - \frac{16}{3} = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow B\left(\frac{16}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{3}\right).$$

La distancia pedida del punto P a la recta r es equivalente a la distancia entre los puntos B y P, o sea el módulo de $\left|\overrightarrow{BP}\right|$:

$$d(P,r) = \left|\overrightarrow{BP}\right| = \sqrt{\left(1 - \frac{16}{15}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{15}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{15}\right)^2 + \left(\frac{13}{15}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{225} + \frac{169}{225} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1+169+25}{225}} = \frac{\sqrt{195}}{15}.$$

$$\underline{d(P,r) = \frac{\sqrt{195}}{15}\ unidades.}$$

$b)$

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: $A(0,-2,6)\ y\ \overrightarrow{v_r} = (1,2,-5)$. Recta s: $B(2,-1,1)\ y\ \overrightarrow{v_s} = (-3,3,1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = [B - A] = [(2, -1, 1) - (0, -2, 6)] = (2, 1, -5)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 15 + 4 + 30 - 1 - 30 =$$

$$= 3 \neq 0 \Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 3\ \Rightarrow \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan}.$$

$c)$

El haz de planos β perpendiculares a la recta s tiene la siguiente ecuación general: $\beta \equiv 3x - 3y - z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano γ que contiene al punto $P(1, 1, 1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv 3x - 3y - z + D = 0 \\ P(1, 1, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow$$

$$\underline{\gamma \equiv 3x - 3y - z + 1 = 0}.$$

****

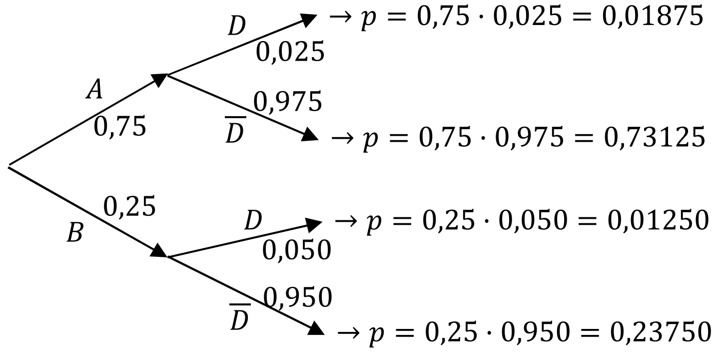
4º) En una fábrica se elaboran dos tipos de productos: A y B. El 75 % de los productos fabricados son de tipo A y el 25 % de tipo B. Los productos de tipo B salen defectuosos un 5 % de las veces, mientras que los de tipo A salen defectuosos un 2,5 % de las veces.

a) Si se fabrican 5.000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?

b) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6.000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.

----

a)



$$P = P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(B/D) =$$

$$= 0{,}75 \cdot 0{,}025 + 0{,}25 \cdot 0{,}050 = 0{,}01875 + 0{,}01250 = 0{,}03125.$$

$$5.000 \cdot 0{,}03125 = 156{,}25.$$

$$\underline{Se\ espera\ que\ sean\ defectuosos\ 157\ productos.}$$

b)

La probabilidad de que un producto sea defectuoso es $p = 0{,}025$.

$q = 1 - p = 1 - 0{,}025 = 0{,}975.$

$Media = \mu = n \cdot p = 6.000 \cdot 0{,}025 = 150.$

$Desviación\ típica = \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{6.000 \cdot 0{,}025 \cdot 0{,}975} = \sqrt{146{,}25} =$

$= 12{,}1.$

$Datos: n = 6.000;\ \ \mu = 150;\ \ \sigma = 12{,}1.$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-150}{12{,}1}.$

$$P = P(X > 160) = P\left(Z > \frac{160-150}{12,1}\right) = P\left(Z > \frac{10}{12,1}\right) = P(Z > 0,83) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0,83) = 1 - 0,7967 = \underline{0,2033}.$$

$$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ haya\ más\ de\ 160\ defectuosos\ es\ 0,2033}.$$

****