PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE MADRID

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales ni almacenamiento de datos alfanuméricos. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.

OPCIÓN A

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5a \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} 2 \\ 37/2 \\ 11 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Discutir el rango de la matriz A, en función de los valores del parámetro a.

b) Para $a = 0$, calcular, si es posible, A^{-1}.

c) Resolver, si es posible, el sistema $AX = B$, en el caso de $a = 1$.

----

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5a \end{vmatrix} = 490a - 210 - 280 = 490a - 490 = 0 \Rightarrow a = 1.$$

$$\underline{Para\ a \neq 1 \Rightarrow Rang\ A = 3.}$$

Un menor de A es $\begin{vmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$, por lo cual:

$$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ A = 2.}$$

b)

Para $a = 0$ es $A = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, que es invertible. La inversa de A se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -490. \qquad A^t = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 14 & 0 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 40 & -70 \\ 15 & -30 & -70 \\ -21 & -56 & 98 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -20 & 40 & -70 \\ 15 & -30 & -70 \\ -21 & -56 & 98 \end{pmatrix}}{-490} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{490} \cdot \begin{pmatrix} 20 & -40 & 70 \\ -15 & 30 & 70 \\ 21 & 56 & -98 \end{pmatrix}}.$$

$c)$

$$AX = B \Rightarrow \{a = 1\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 14 & 0 & 10 \\ 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 37/2 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 14x + 10z = 2 \\ 7y + 5z = 18{,}5 \\ 3x + 4y + 5z = 11 \end{array} \right\}.$$

El sistema es compatible indeterminado; para su resolución se desprecia una de las incógnitas (tercera) y se parametriza una de sus incógnitas ($z = \lambda$):

$$\left. \begin{array}{r} 14x + 10z = 2 \\ 7y + 5z = 18{,}5 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{r} 7x + 5z = 1 \\ 14y + 10z = 37 \end{array} \right\} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{7} - \frac{5}{7}\lambda \\ y = \frac{37}{14} - \frac{5}{7}\lambda \end{cases}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{1}{7} - \frac{5}{7}\lambda, y = \frac{37}{14} - \frac{5}{7}\lambda, z = \lambda, \forall\lambda \in R.}$$

****

2º) Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 8e^{2x-4} & si \ \ x \leq 2 \\ \frac{x^3-4x}{x-2} & si \ \ x > 2 \end{cases}$ y se pide:

$a)$ Estudiar la continuidad de f en $x = 2$.

$b)$ Calcular las asíntotas horizontales de $f(x)$. ¿Hay alguna asíntota vertical?

$c)$ Calcular $I = \int_0^2 f(x) \cdot dx$.

$a)$

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 2$, cuya continuidad es dudosa y se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} 8e^{2x-4} = 8 = f(2) \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-4x}{x-2} = 8 \quad (*) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow \underline{f(x)\ es\ continua\ para\ x = 2}.$$

$$(*) \quad \lim_{x \to 2} \frac{x^3-4x}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x^2 + 2x) = 4 + 4 = 8.$$

$b)$

Las asíntotas horizontales son de la forma $y = k$; son los valores finitos que toma la función cuando $x \to \pm\infty$.

$$Para\ x \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} 8e^{2x-4} = 8 \cdot e^{-\infty} = \frac{8}{e^{\infty}} = \frac{8}{\infty} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 8e^{2x-4} = 8 \cdot e^{\infty} = \infty \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Para\ x \leq 2: asíntota\ horizontal\ y = 0\ (Eje\ X)}.$$

$$Para\ x > 2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3-4x}{x-2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3-4x}{x-2} = +\infty \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Para\ x > 2: no\ hay\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$\underline{Para\ x < 2\ no\ tiene\ asíntotas\ verticales}.$

Para $x > 2$ la función es $f(x) = \frac{x^3-4x}{x-2} = x(x+2)$, que no es racional.

$\underline{Para\ x > 2\ la\ función\ no\ tiene\ asíntotas\ verticales}.$

$c)$

$$I = \int_0^2 f(x) \cdot dx = \int_0^2 8e^{2x-4} \cdot dx = 8 \cdot \int_0^2 e^{2x-4} \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l|c} 2x - 4 = t & x = 2 \to t = 0 \\ dx = \frac{1}{2} \cdot dt & x = 0 \to t = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow 8 \cdot \int_{-4}^0 e^t \cdot \frac{1}{2} \cdot dt = 4 \cdot \int_{-4}^0 e^t \cdot dt =$$

$$= 4 \cdot [e^t]_{-4}^0 = 4 \cdot (e^0 - e^{-4}) = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{e^4}\right) = 4 \cdot \frac{e^4-1}{e^4}.$$

$$\underline{I = \int_0^2 f(x) \cdot dx = 4 \cdot \frac{e^4-1}{e^4}}.$$

****

3º) Se consideran los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (2, 0, -1)$ y el punto $A(-4, 4, 7)$. Se pide:

a) Determinar un vector $\overrightarrow{w_1}$ que sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, unitario y con tercera coordenada negativa.

b) Hallar un vector no nulo $\overrightarrow{w_2}$ que sea combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y ortogonal a $\vec{v}$.

c) Determinar los vértices del paralelogramo cuyos lados tienen las direcciones de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y una de sus diagonales es el segmento $\overline{OA}$.

----

a)

El vector pedido $\overrightarrow{w_1}$, por ser ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es linealmente dependiente del producto vectorial de estos vectores:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2i + 6j - 4k - j = -2i + 5j - 4k = (-2, 5, -4).$$

$$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 25 + 16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

$$\underline{\overrightarrow{w_1} = -\frac{2}{3\sqrt{5}} i + \frac{5}{3\sqrt{5}} j - \frac{4}{3\sqrt{5}} k = -\frac{2\sqrt{5}}{15} i + \frac{\sqrt{5}}{3} j - \frac{4\sqrt{5}}{15} k.}$$

b)

Un vector combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es, por ejemplo:

$$\vec{z} = m\vec{u} + n\vec{v} = m \cdot (-1, 2, 3) + n \cdot (2, 0, -1) = (-m + 2n, 2m, 3m - n).$$

Como el vector pedido, $\overrightarrow{w_2}$, es ortogonal a $\vec{v}$, tiene que ser $\vec{z} \cdot \vec{v} = 0$.

$$\vec{z} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (-m + 2n, 2m, 3m - n)(2, 0, -1) = 0;$$

$$-2m + 4n - 3m + n = 0;\ -5m + 5n = 0;\ \ m - n = 0 \Rightarrow m = n.$$

Haciendo, por ejemplo, $m = n = 1$:

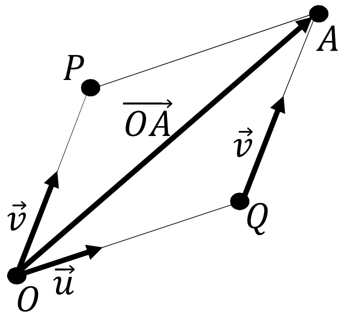
$$\underline{\overrightarrow{w_2} = i + 2j + 2k.}$$

c)

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QA} = m \cdot \vec{u} + n \cdot \vec{v} \Rightarrow (-4, 4, 7) = m \cdot (-1, 2, 3) + n \cdot (2, 0, -1);$$

$$(-4, 4, 7) = (-m, 2m, 3m) + (2n, 0, -n) \Rightarrow \left.\begin{aligned} -m + 2n &= -4 \\ 2m &= 4 \\ 3m - n &= 7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow m = 2, n = -1.$$

$\overrightarrow{OQ} = (-m, 2m, 3m) \Rightarrow m = 2 \Rightarrow \underline{Q(-2, 4, 6)}$.



$\overrightarrow{QA} = (2n, 0, -n) \Rightarrow n = -1 \Rightarrow \overrightarrow{QA} = (-2, 0, 1)$.

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{QA} \Rightarrow (x, y, z) = (-2, 0, 1) \Rightarrow \underline{P(-2, 0, 1)}$.

****

4º) Según los datos de la Fundación para la Diabetes, el 13,8 % de los españoles mayores de 18 años tiene diabetes, aunque el 43 % de ellos no sabe que la tiene. Se elige al azar un español mayor de 18 años:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa?, ¿cuál la de que no sea diabético o no sepa que lo es?

b) Cierto test diagnostica correctamente el 96 % de los casos positivos de diabetes, pero da un 2 % de falsos positivos. Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?

----

a)

$$Datos: P(D) = 0{,}138;\ \ P(\overline{D}) = 0{,}862;\ \ P(No/D) = 0{,}43;\ \ P(Si/D) = 0{,}57.$$

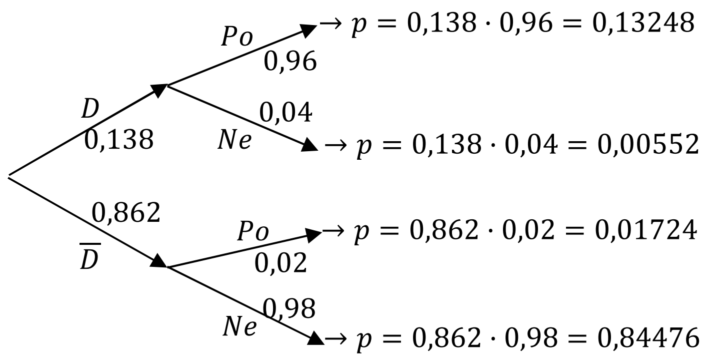
$$P(Si/D) = \frac{P(D \cap Si)}{P(D)} \Rightarrow 0{,}57 = \frac{P(D \cap Si)}{0{,}138} \Rightarrow P(D \cap Si) = 0{,}57 \cdot 0{,}138 = 0{,}07866.$$

$$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ sea\ diabético\ y\ lo\ sepa\ es\ del\ 7{,}87\ \%.}$$

$$P = P(\overline{D} \cup No) = P(\overline{D \cap Si}) = 1 - P(D \cap Si) = 1 - 0{,}07866 = 0{,}92134.$$

$$\underline{La\ probabilidad\ de\ que\ no\ sea\ diabético\ y\ no\ lo\ sepa\ es\ del\ 92{,}13\ \%.}$$

b)



$$P = P(D/Po) = \frac{P(D \cap Po)}{P(Po)} = \frac{P(D) \cdot P(Po/D)}{P(D) \cdot P(Po/D) + P(\overline{D}) \cdot P(Po/\overline{D})} = \frac{0{,}138 \cdot 0{,}96}{0{,}138 \cdot 0{,}96 + 0{,}862 \cdot 0{,}02} =$$

$$= \frac{0{,}13248}{0{,}13248 + ,01724} = \frac{0{,}13248}{0{,}14972} = \underline{0{,}88485}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Un grupo de estudiantes ha realizado un viaje por tres países (Francia, Alemania y Suiza). En los hoteles cada estudiante ha pagado: 20 euros diarios en Francia, 25 euros diarios en Alemania y 30 euros diarios en Suiza. En comidas cada uno ha gastado: 20 euros diarios en Francia, 15 euros diarios en Alemania y 25 euros diarios en Suiza. Además, el transportista les ha cobrado 8 euros diarios a cada uno. Sabiendo que el gasto total del viaje ha sido 765 euros por persona, que ha durado 15 días y que han estado en Francia el doble de días que en Suiza, obtenga el número de días que han estado en cada uno de los tres países.

Sean x, y, z los días que han pasado en Francia, Alemania y Suiza, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=15 \\ (20+20+8)x+(25+15+8)y+(30+25+8)z=765 \\ x=2z \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=15 \\ 48x+48y+63z=765 \\ x=2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2z+y+z=15 \\ 96z+48y+63z=765 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} y+3z=15 \\ 48y+159z=765 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

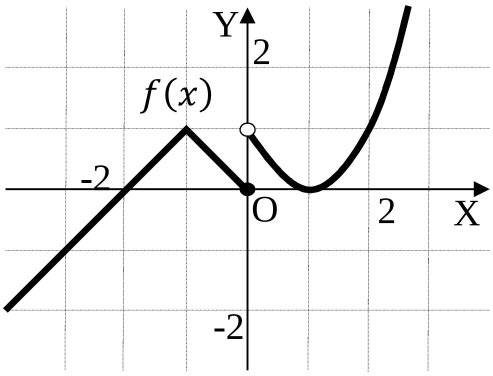
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=15-3z \\ y=\frac{765-159z}{48} \end{array}\right\} \Rightarrow 15-3z=\frac{765-159z}{48};\ 720-144z=765-159z;\ 15z=45 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=3;\ \ y=15-9=6;\ \ x=6.$$

$$\underline{Han\ estado\ 6\ días\ en\ Francia, 6\ en\ Alemania\ y\ 3\ en\ Suiza.}$$

****

2º) El dibujo adjunto muestra la gráfica de una función $f(x)$. Usando la información de la figura, se pide:



a) Indicar los valores de $f(-1)$ y $f'(1)$.

b) Justificar, usando límites laterales, si f es continua en los puntos $x=-1$ y $x=0$.

c) Indicar razonadamente si f es derivable en los puntos $x=-1$ y $x=0$.

d) Determinar el valor de $\int_{-2}^{0} f(x) \cdot dx$.

----

a)

$\underline{f(-1)=1}$.

El valor de la derivada en un punto es la pendiente de la tangente a la función en ese punto, por lo cual: $\underline{f'(1)=0}$.

b)

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=-1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=1=f(-1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1).$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x=-1}.$$

$$Para\ x=0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0=f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ discontinua\ en\ x=0\ (salto\ finito)}.$$

c)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual:

$$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ es\ derivable\ en\ x=0}.$$

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$x = -1 \Rightarrow \begin{cases} f'(-1^-) = 1 \ (pendiente) \\ f'(-1^+) = -1 \ (pendiente) \end{cases} \Rightarrow f'(-1^-) \neq f'(-1^+).$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ es\ derivable\ en\ x = -1}.$$

$d)$

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} (x+2)\,dx + \int_{-1}^{0} (-x)\,dx = \int_{-2}^{-1} (x+2)\,dx - \int_{-1}^{0} x\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{-1} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{-0} = \left[\frac{(-1)^2}{2} + 2\cdot(-1)\right] - \left[\frac{(-2)^2}{2} + 2\cdot(-2)\right] - \left[0 - \frac{(-1)^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} - 2 - 2 + 4 + \frac{1}{2} = 1.$$

$$\underline{\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = 1}.$$

****

3º) Dados el punto $P(0,-1,1)$ y las rectas r, que pasa por el punto $Q(1,0,1)$ y tiene como vector director $\vec{v}=(0,1,2)$, se pide:

a) Hallar la ecuación implícita del plano π que contiene a r y pasa por P.

b) Encontrar el punto S contenido en r tal que el vector $\overrightarrow{SP}$ sea perpendicular a r.

c) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son el punto P y dos puntos T_1 y T_2, contenidos en la recta r, que están a distancia $\sqrt{5}$ de P.

----

a)

Los puntos P y Q determinan el vector $\overrightarrow{PQ}=(1,1,0)$.

La expresión general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\overrightarrow{PQ}\right)\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0;\ \ 2y-(z-1)-2(x-1)=0;$$

$$2y-z+1-2x+2=0;\ -2x+2y-z+3=0.$$

$$\underline{\pi\equiv 2x-2y+z-3=0}.$$

b)

El haz de planos α perpendiculares a r tiene por ecuación: $\alpha\equiv y+2z+D=0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano β que contiene al punto $P(0,-1,1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha\equiv y+2z+D=0 \\ P(0,-1,1) \end{array}\right\}\Rightarrow -1+2+D=0\Rightarrow D=-1\Rightarrow \beta\equiv y+2z-1=0.$$

El punto S, intersección de la recta r con el plano β, es la solución del sistema que forman:

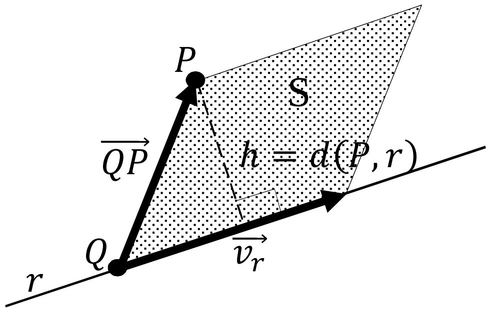
$$\left.\begin{array}{r} \beta\equiv y+2z-1=0 \\ r\equiv\begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \end{array}\right\}\Rightarrow \lambda+2(1+2\lambda)-1=0;\ \lambda+2+4\lambda-1=0;$$

$$5\lambda+1=0\Rightarrow\lambda=-\tfrac{1}{5}\Rightarrow S\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=-\frac{1}{5} \\ z=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \underline{S\left(1,-\tfrac{1}{5},\tfrac{3}{5}\right)}.$$

$c)$

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un esquema de la situación.



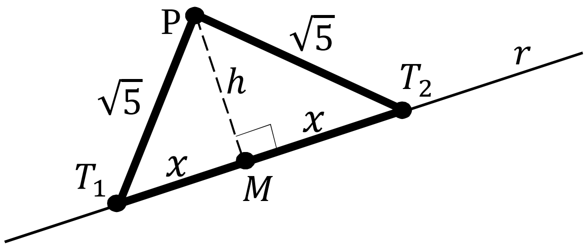
$$\left.\begin{array}{r} S = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{QP}\right| \\ S = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{QP}\right| = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot h \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{QP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}.$$

$$h = d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{QP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|-2j+k+2i|}{\sqrt{1+4}} = \frac{|2i-2j+k|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4+4+1}}{\sqrt{30}} =$$

$$= \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo T_1PM:



$$x = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - h^2} = \sqrt{5 - \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{5 - \frac{9}{5}} = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

$$S_{T_1PT_2} = \frac{2x \cdot h}{2} = x \cdot h = \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{12}{5}.$$

$$\underline{S_{T_1PT_2} = \frac{12}{5}\ u^2 = 2{,}4\ u^2.}$$

****

4º) La variable aleatoria X sigue una distribución normal de media $\mu = 8{,}5$ y desviación típica $\sigma = 2{,}5$. Se pide:

a) Calcular el valor a tal que $P(X \leq a) = 0{,}05$.

b) Calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 8 y 9,3.

----

a)

$Datos$: $\mu = 8{,}5$; $n = 1$; $\sigma = 2{,}5$.

$X \to N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(8{,}5; \frac{2{,}5}{\sqrt{1}}\right) = N(8{,}5;\ 2{,}5)$.

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-8{,}5}{2{,}5}$.

El valor de a es negativo, por lo cual:

$p(\overline{X} \leq \alpha) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95 \Rightarrow p\left(Z \leq \frac{X-8{,}5}{2{,}5}\right) = 0{,}95$.

Mirando en el interior de la tabla dada de las áreas limitadas por la curva $N(0, 1)$, con el valor de 0,95 se obtiene: 1,645.

$\frac{X-8{,}5}{2{,}5} = 1{,}645;\ X - 8{,}5 = 4{,}1125 \Rightarrow X = 8{,}5 + 4{,}1125 = 12{,}6125$.

$$\underline{a = -12{,}6125}.$$

b)

$P = P(8 \leq Z \leq 9{,}3) = P\left(\frac{8-8{,}5}{2{,}5} \leq Z \leq \frac{9{,}3-8{,}5}{2{,}5}\right) = P\left(\frac{-0{,}5}{2{,}5} \leq Z \leq \frac{0{,}8}{2{,}5}\right) =$

$= P(-0{,}2 \leq Z \leq 0{,}32) = P(Z < 0{,}32) - [1 - P(Z < 0{,}2)] =$

$= P(Z < 0{,}32) - 1 + P(Z < 0{,}2) = 0{,}6255 - 1 + 0{,}5793 = 1{,}2048 - 1 =$

$= \underline{0{,}2048}$.

****