PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x + ay + z = a \\ x - 4y + (a+1)z = 1 \\ 4y - az = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Discutirlo en función de los valores del parámetro real a.

b) Resolver el sistema para $a = 1$.

c) Resolver el sistema para $a = 2$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 4 & -a \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 & a \\ 1 & -4 & a+1 & 1 \\ 0 & 4 & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & -4 & a+1 \\ 0 & 4 & -a \end{vmatrix} = 8a + 4 - 8(a+1) + a^2 = 0;$$

$a^2 + 8a + 4 - 8a - 8 = 0;\;\; a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a_1 = -2, a_2 = 2.$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq -2 \\ a \neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=-2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -8-8=-16 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=-2 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=C_4\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=2 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Para $a=2$ el sistema resulta: $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ x-4y+2z=1 \\ 4y-z=0 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}}{1^2-4}=\frac{4+4-8+1}{-3}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}. \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{-2+1}{-3}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{1^2-4}=\frac{4-8}{-3}=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}.$$

$$\underline{Solución: x=-\frac{1}{3}, y=\frac{1}{3}, z=\frac{4}{3}.}$$

$c)$

Para $a=1$ el sistema resulta: $\begin{cases} 2x+2y+z=2 \\ x-4y+3z=1 \\ 4y-2z=0 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Despreciando, por ejemplo, la segunda ecuación y haciendo $z=\lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y=2-\lambda \\ 4y=2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{1}{2}\lambda. \qquad 2x+2\cdot\frac{1}{2}\lambda=2-\lambda;\ \ 2x=2-\lambda-\lambda;$$

$$2x=2-2\lambda \Rightarrow x=1-\lambda.$$

$$\underline{Solución: x=1-\lambda, y=\frac{1}{2}\lambda, z=\lambda, \forall\lambda \in R.}$$

****

2º) Dados los puntos $P(1,-2,1), Q(-4,0,1), R(-3,1,2)\ y\ S(0,-3,0)$, se pide:

a) Hallar la ecuación del plano que contiene a P, Q y R.

b) Estudiar la posición relativa de la recta r, que pasa por los puntos P y Q, la recta s, que pasa por R y S.

c) Hallar el área del triángulo formado por los puntos P, Q y R.

----

a)

Los puntos P, Q y R determinan los vectores:

$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(-4,0,1) - (1,-2,1)] = (-5,2,0).$

$\overrightarrow{PR} = [R - P] = [(-3,1,2) - (1,-2,1)] = (-4,3,1).$

El plano π que determinan los puntos P, Q y R tiene la siguiente expresión general:

$$\pi(P;\ \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$2(x-1) - 15(z-1) + 8(z-1) + 5(y+2) = 0;$

$2(x-1) + 5(y+2) - 7(z-1) = 0;\ \ 2x - 2 + 5y + 10 - 7z + 7 = 0.$

$$\underline{z = 2x + 5y - 7z + 15 = 0}.$$

b)

$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(-4,0,1) - (1,-2,1)] = (-5,2,0).$

$\overrightarrow{RS} = [S - R] = [(0,-3,0) - (-3,1,2)] = (3,-4,-2).$

La recta r que pasa por P y Q es $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ x = 1 \end{cases}$ y la recta s que pasa por los puntos R y S es $s \equiv \frac{x}{3} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z}{-2}$.

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: $P(1,-2,1)\ y\ \overrightarrow{v_r} = (-5,2,0).$

Recta s: $R(-3,1,2)\ y\ \overrightarrow{v_s} = (-3,4,2).$

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas $r\ y\ s$ se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $P \in r$ y extremo el punto $R \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{PR} = [R - P] = [(-3, 1, 2) - (1, -2, 1)] = (-4, 3, 1)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas $r\ y\ s$ se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas $r\ y\ s$ se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -20 - 16 + 30 + 6 = -36 + 36 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 2\ \Rightarrow \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan}.$$

$c)$

$$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(-4, 0, 1) - (1, -2, 1)] = (-5, 2, 0).$$

$$\overrightarrow{PR} = [R - P] = [(-3, 1, 2) - (1, -2, 1)] = (-4, 3, 1).$$

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan los puntos:

$$S_{PQR} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -5 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |2i - 15k + 8k + 5j| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |2i + 5j - 7k| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^2 + 5^2 + (-7)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 25 + 49} = \underline{\frac{1}{2}\sqrt{78}\, u^2}.$$

****

3º) Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentración en sangre del principio activo viene dada por $c(t) = t \cdot e^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo. Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

$$c'(t) = 1 \cdot e^{-t/2} - t \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot (2 - t).$$

$$c'(t) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot (2 - t) = 0;\ \ 2 - t = 0 \Rightarrow t = 2.$$

$$c''(t) = -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot (2 - t) - \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{t}{2}} = -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot (2 - t + 2) =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot (4 - t).$$

$$c''(2) = -\frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{2}{2}} \cdot (4 - 2) = -\frac{3}{2} \cdot e^{-1} = -\frac{3}{2e} > 0 \Rightarrow Máximo\ para\ t = 2.$$

$$c(2) = 2 \cdot e^{-2/2} = \frac{2}{e} \cong 0{,}7358.$$

$$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ para\ t = 2\ y\ es\ de\ 0{,}7358\ mg/ml.}$$

$$\underline{Por\ ser\ 0{,}7358 \ll 1, el\ paciente\ no\ debe\ tener\ ningún\ temor.}$$

****

4º) Dada la función $f(x) = \frac{x^2+x+6}{x-2}$, se pide:

a) Determinar su dominio y asíntotas verticales.

b) Calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$. c) Calcular $\int_3^5 f(x) \cdot dx$.

----

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$\underline{D(f)\ \Rightarrow R - \{2\}}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntota\ vertical: x = 2}.$$

b)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+x+6}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x+6}{x^2-2x} = \underline{1}.$$

$$\begin{array}{ccc|cc} +x^2 & +x & +6 & x & -2 \\ \hline -x^2 & +2x & & x & +3 \\ \hline 0 & +3x & +6 & & \\ & -3x & +6 & & \\ \hline & 0 & 12 & & \end{array}$$

c)

$$\int_3^5 f(x) \cdot dx = \int_3^5 \frac{x^2+x+6}{x-2} \cdot dx = \int_3^5 \left(x + 3 + \frac{12}{x-2}\right) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 3x + 12L(x-2)\right]_3^5 =$$

$$= \left[\frac{5^2}{2} + 3 \cdot 5 + 12L(5-2)\right] - \left[\frac{3^2}{2} + 3 \cdot 3 + 12L(3-2)\right] =$$

$$= \frac{25}{2} + 15 + 12L3 - \frac{9}{2} - 9 - 12L1 = \frac{16}{2} + 6 + 12L3 - 0 = 14 + 12L3.$$

$$\underline{\int_3^5 f(x) \cdot dx = 2(7 + 6L3).}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = sen\ x$, se pide:

a) Calcular $\lim_{x \to 0} \left[f(x) - \frac{2}{g(x)} \right]$.

b) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P\left(\frac{1}{2}, 4\right)$.

c) Calcular el área delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = -x + 3$.

----

a)

$$\lim_{x \to 0} \left[f(x) - \frac{2}{g(x)} \right] = \lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{sen\ x} \right) = \frac{2}{0} - \frac{2}{0} = \infty - \infty \Rightarrow Ind. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{sen\ x} \right) = 2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x - x}{x \cdot sen\ x} = 2 \cdot \frac{0 - 0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{cos\ x - 1}{1 \cdot sen\ x + x \cdot \cos x} = 2 \cdot \frac{1 - 1}{1 \cdot 0 + 0 \cdot 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{-sen\ x - 0}{cos\ x + 1 \cdot \cos x - x \cdot sen\ x} = 2 \cdot \frac{-0}{1 + 1 - 0} = -2 \cdot \frac{0}{2} = \underline{0}.$$

b)

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}. \qquad m = f'\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{2}{\frac{1}{4}} = -8.$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 4 = -8 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = -8x + 4.$$

$$\underline{Recta\ tangente: t \equiv 8x + y - 8 = 0}.$$

c)

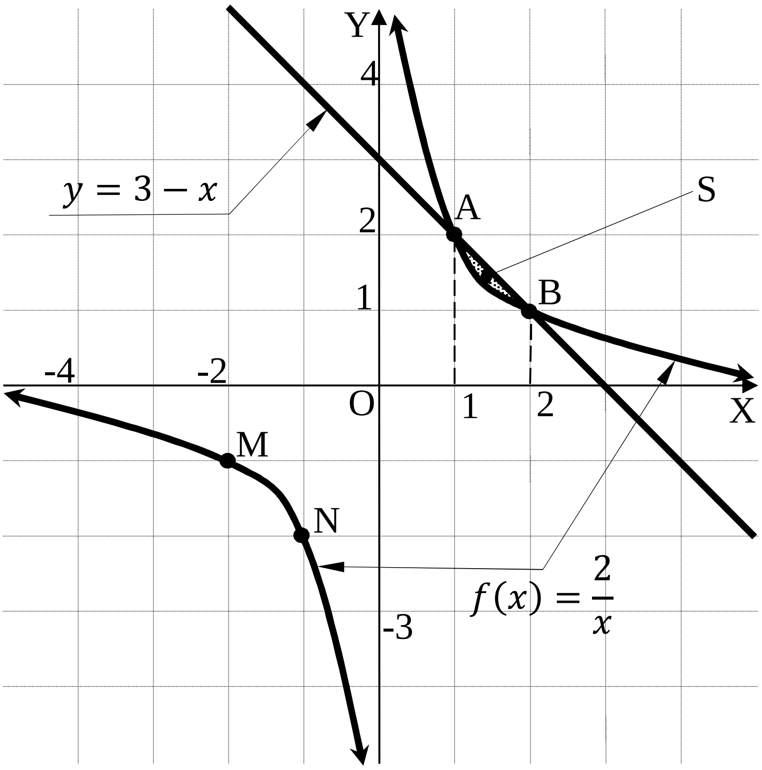
Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ y la recta $y = -x + 3$ tienen por abscisas las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = y \Rightarrow \frac{2}{x} = -x + 3;\ \ 2 = -x^2 + 3x;\ \ x^2 - 3x + 2 = 0;\ \ x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} =$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 1 \to A(1, 2);\ x_2 = 2 \to B(2, 1).$$

La función $f(x) = \frac{2}{x}$ es simétrica con respecto al eje Y por ser $f(-x) = -f(x)$ y pasa por los puntos $A(1, 2), B(2, 1)$ y sus simétricos $M(-2, -1), N(-1, -2)$.

La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.



Como puede observarse en la figura, en el intervalo de la superficie a calcular, que es $(1, 2)$, las ordenadas correspondientes a la recta son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la curva, por lo cual la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_1^2 [y - f(x)] \cdot dx = \int_1^2 \left[(3 - x) - \frac{2}{x}\right] \cdot dx = \int_1^2 \left(3 - x - \frac{2}{x}\right) \cdot dx =$$

$$= \left[3x - \frac{x^2}{2} - 2Lx\right]_1^2 = \left(3 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - 2 \cdot L2\right) - \left(3 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} - 2 \cdot L1\right) =$$

$$= 6 - 2 - 2L2 - 3 + \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 = 1 + \frac{1}{2} - L4 = \frac{3}{2} - L4 = \underline{\frac{3 - L16}{2} \cong 0{,}1137\ u^2}.$$

****

2º) Dadas las matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $y\, J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Determinar la matriz P^{-1}, inversa de la matriz P.

b) Determinar la matriz B^{-1}, inversa de la matriz $B = P^{-1} \cdot J^{-1}$.

c) Calcular el determinante de la matriz A^2, siendo $A = P \cdot J \cdot P^{-1}$.

----

a)

La inversa de P se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $P^{-1} = \frac{Adj.\ de\ P^t}{|P|}$.

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 9 + 8 - 4 - 6 - 12 = -1. \qquad P^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ P^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1} = \frac{Adj.\ de\ P^t}{|P|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow \underline{P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix}}.$$

b)

Se obtiene la inversa de J por el método de Gauss-Jordan.

$$(J|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to -F_1 \\ F_2 \to \frac{1}{2}F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B = P^{-1} \cdot J^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & -\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{B = P^{-1} \cdot J^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & -\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}}.$$

$c)$

$$A = P \cdot J \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -8 & -5 & 10 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -8 & -5 & 10 \\ -2 & -4 & 6 \end{vmatrix} = -30 + 64 + 40 - 20 + 40 - 96 = 144 - 146 = -2.$$

$$|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = |A|^2 = (-2)^2 = 4.$$

$$\underline{|A^2| = 4}.$$

****

3º) a) Determine la distancia entre las rectas $r_1 \equiv x = y = z$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$.

b) Obtenga el punto de corte de la recta $s \equiv x = 2 - y = z - 1$ con el plano perpendicular a s, que pasa por el origen.

----

a)

Un punto y un vector de r_1 son $O(0, 0, 0)$ y $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 1)$.

La expresión de la recta r_2 por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r_2 \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda \ \Rightarrow y = 1 - \lambda;\ z = 1 + \lambda \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector de r_2 son $A(0, 1, 1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (1, -1, 1)$.

Para hallar la distancia entre dos rectas que se cruzan hacemos lo siguiente:

Los vectores directores de las rectas $r_1\ y\ r_2$ son linealmente independientes por no ser sus componentes proporcionales, lo cual implica que las rectas se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso consideramos el vector $\overrightarrow{m}$ que tiene como origen un punto $O(0, 0, 0)$ de r_1 y como extremo el punto $A(0, 1, 1)$ de r_2:

$$\overrightarrow{m} = \overrightarrow{OA} = A - O = (0, 1, 1) - (0, 0, 0) = (0, 1, 1).$$

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{m}\}$ sean coplanarios o no, las rectas $r_1\ y\ r_2$ se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{m}\}$ son coplanarios cuando su rango es menor que tres, es decir, cuando el determinante que determinan es cero:

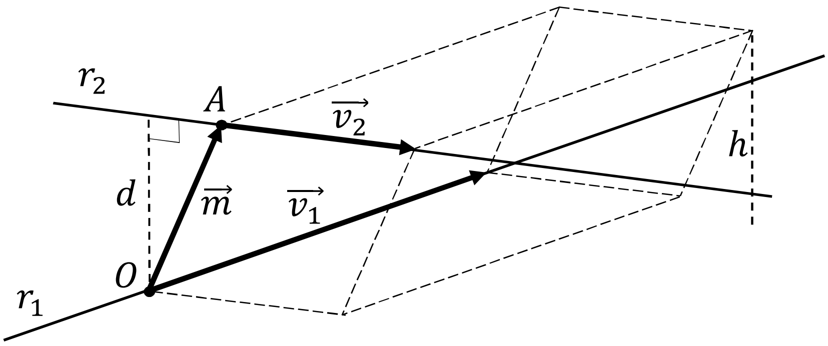
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 - 1 - 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow Rango\ \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{m}\} = 3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Las\ rectas\ r_1\ y\ r_2\ se\ cruzan.$

Se determina un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ y el vector $\overrightarrow{m}$.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observar que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Para una mejor comprensión se hace el esquema adjunto.



Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{v_1} \cdot (\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{m}) = |\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}| \cdot h = |\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}| \cdot d \Rightarrow d = \frac{|\overrightarrow{v_1} \cdot (\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{m})|}{|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|}.$$

$$d = \frac{|\overrightarrow{v_1} \cdot (\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{m})|}{|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|} = \frac{\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}\right\|} = \frac{|-1+1-1-1|}{|i+j-k-k+i-j|} = \frac{|-2|}{|2i-2k|} = \frac{|-1|}{|i-k|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\ unidades = d(r_1, r_2)}.$$

$b)$

La expresión de s dada por unas ecuaciones paramétricas es $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$.

Un vector normal del plano es cualquier vector que sea linealmente dependiente de cualquier vector director de la recta s.

Un vector director de s se $\overrightarrow{v_s} = (1, -1, 1)$.

La expresión general del plano π, perpendicular a s, que pasa por el origen de coordenadas es $\pi \equiv x - y + z = 0$.

El punto P de corte de s y π es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x - y + z = 0 \\ s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda - (2 - \lambda) + (1 + \lambda) = 0;\ \ \lambda - 2 + \lambda + 1 + \lambda = 0;$$

$3\lambda - 1 = 0;\ \ \lambda = \frac{1}{3}.$

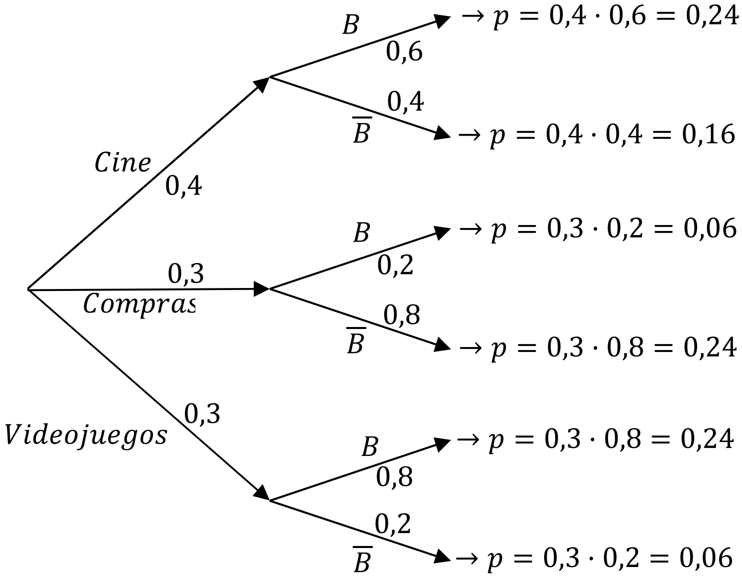
$$P \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ y = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \\ z = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{P\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)}.$$

****

4º) El 40 % de los sábados Marta va al cine, el 30 % va de compras y el 30 % restante juega a videojuegos. Cuando va al cine, el 60 % de las veces lo hace con sus compañeros de baloncesto. Lo mismo le ocurre el 20 % de las veces que va de compras, y el 80 % de las veces que juega a videojuegos. Se pide:

a) Hallar la probabilidad de que el próximo sábado Marta no quede con sus compañeros de baloncesto.

b) Si se sabe que Marta ha quedado con sus compañeros de baloncesto, ¿cuál es la probabilidad de que vayan al cine?



a)

$$P = P(\overline{B}) = P(Ci) \cdot P(\overline{B}/Ci) + P(Co) \cdot P(\overline{B}/Co) + P(Vi) \cdot P(\overline{B}/Vi) =$$

$$= 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}16 + 0{,}24 + 0{,}06 = \underline{0{,}46}.$$

b)

$$P = P(Ci/B) = \frac{P(Ci \cap B)}{P(B)} = \frac{P(Ci) \cdot P(B/Ci)}{P(Ci) \cdot P(B/Ci) + P(Co) \cdot P(B/Co) + P(Vi) \cdot P(B/Vi)} =$$

$$= \frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}3 \cdot 0{,}8} = \frac{0{,}24}{0{,}24 + 0{,}06 + 0{,}24} = \frac{0{,}24}{0{,}54} = \underline{0{,}4444}.$$

****