PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE MADRID

SEPTIEMBRE – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x)=\begin{cases} x\cdot e^{2x} & si\ \ x<0 \\ \frac{L(x+1)}{x+1} & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$, donde L significa logaritmo neperiano, se pide:

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad de $f(x)$ en $x=0$.

b) Calcular $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)\ \ y\ \ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ c) Calcular $I=\int_{-1}^{0} f(x)\cdot dx$.

----

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=0$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot e^{2x})=0\cdot 1=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{L(x+1)}{x+1}=\frac{L1}{1}=\frac{0}{1}=0=f(0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \Rightarrow f(x)\ es\ continua\ en\ x=0.}$$

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} 1\cdot e^{2x}+x\cdot 2\cdot e^{2x}=e^{2x}(2x+1) \;\; si \;\; x<0 \\ \frac{\frac{1}{x+1}\cdot(x+1)-L(x+1)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{1-L(x+1)}{(x+1)^2} \;\;\; si \;\; x\geq 0 \end{cases}.$$

$$f'(0^-)=e^0(2\cdot 0+1)=1\cdot 1=1. \qquad f'(0^+)=\frac{1-L(0+1)}{(0+1)^2}=\frac{1-L1}{1^2}=\frac{1-0}{1}=1.$$

$$\underline{f'(0^-)=f'(0^+)\Rightarrow \; f(x)\; es\; derivable\; para\; x=0.}$$

$b)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x\cdot e^{2x})=-\infty\cdot e^{-\infty}=-\frac{\infty}{e^{\infty}}=-\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\frac{1}{e^{2x}}}=\frac{-\infty}{\frac{1}{e^{-\infty}}}=\frac{-\infty}{e^{\infty}}=-\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Indet.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\frac{1\cdot 2\cdot e^{x}}{e^{4x}}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to-\infty} e^{3x}=-\frac{1}{2}\cdot e^{-\infty}=-\frac{1}{2\cdot e^{\infty}}=-\frac{1}{\infty}=0.$$

$$\underline{\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x\cdot e^{2x})=0.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x\cdot e^{2x})=\infty\cdot e^{\infty}=\infty\cdot\infty=\infty.$$

$$\underline{\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x\cdot e^{2x})=\infty.}$$

$c)$

$$I=\int_{-1}^{0} f(x)\cdot dx=\int_{-1}^{0} x\cdot e^{2x}\cdot dx\Rightarrow\begin{Bmatrix} u=x\to du=dx \\ dv=e^{2x}\cdot dx\to v=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[x\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x}-\int\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot dx\right]_{-1}^{0}=\left[\frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cdot dx\right]_{-1}^{0}=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{2x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\right]_{-1}^{0}=\left[\frac{1}{4}\cdot e^{2x}\cdot(2x-1)\right]_{-1}^{0}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot e^{0}\cdot(0-1)-\frac{1}{4}\cdot e^{-2}\cdot(-2-1)=-\frac{1}{4}+\frac{3}{4e^2}=\frac{3-e^2}{4e^2}.$$

$$\underline{I=\int_{-1}^{0} f(x)\cdot dx=\frac{3-e^2}{4e^2}.}$$

****

2º) Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} 6x - y - z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} 3x - 5y - 2z = 3 \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases}$, se pide:

$a)$ Estudiar la posición relativa de las rectas $r_1\ y\ r_2$.

$b)$ Calcular la distancia entre las dos rectas.

$c)$ Hallar la ecuación del plano π que contiene a r_1 y al punto $P(1,2,3)$.

$a)$

La expresión de ambas recta r por ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$$r_1 \equiv \begin{cases} 6x - y - z = 1 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -y - z = 1 - 6\lambda \\ -y + z = 1 - 2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow -2y = 2 - 8\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -2 + 4\lambda;\ \ \left.\begin{array}{r} y + z = -1 + 6\lambda \\ -y + z = 1 - 2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2z = 4\lambda;\ \ z = 2\lambda \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}.$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} 3x - 5y - 2z = 3 \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x - 2z = 3 + 5\lambda \\ 3x + 4z = 3 - \lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x - 2z = 3 + 5\lambda \\ -3x - 4z = -3 + \lambda \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow -6z = 6\lambda;\ \ z = -\lambda;\ \ 3x + 2\lambda = 3 + 5\lambda \Rightarrow 3x = 3 + 3\lambda;\ \ x = 1 + \lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r_1: $A(0,-2,0)\ y\ \overrightarrow{v_1} = (1,4,2)$. Recta r_2: $B(1,0,0)\ y\ \overrightarrow{v_2} = (1,1,-1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas $r_1\ y\ r_2$ se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r_1$ y extremo el punto $B \in r_2$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = [B - A] = [(1,0,0) - (0,-2,0)] = (1,2,0)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas $r_1\ y\ r_2$ se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas $r_1\ y\ r_2$ se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 - 4 - 4 + 2 = -2 \neq 0 \Rightarrow$$

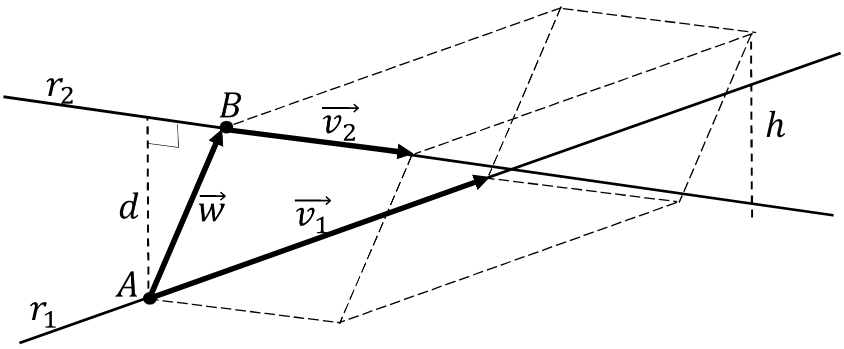
$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w}\} = 3 \ \Rightarrow \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r_1\ y\ r_2\ se\ cruzan.}$$

$b)$

Para calcular la distancia entre las rectas $r_1\ y\ r_2$ vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas, $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$, y un tercer vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen al punto A de r_1 y extremo el punto B de r_2.

Para una mejor comprensión se hace el esquema que se observa.



El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observando que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{v_1} \cdot (\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{w}) = |\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}| \cdot h = |\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}| \cdot d \Rightarrow d = \frac{|\overrightarrow{v_1} \cdot (\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{w})|}{|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|}.$$

$$d = \frac{|\overrightarrow{v_1} \cdot (\overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{w})|}{|\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|} = \frac{\left\| \begin{matrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{matrix} \right\|}{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{|-2|}{|-4i+2j+k-4k-2i+j|} = \frac{|-2|}{|-6i+3j-3k|} =$$

$$= \frac{2}{3 \cdot |-2i+j-k|} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{(-2)^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt{4+1+1}} = \frac{2}{3\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{18} = \underline{\frac{\sqrt{6}}{9}\ u = d(r_1, r_2)}.$$

$c)$

$$\vec{\beta} = \overrightarrow{AP} = [P - A] = [(1, 2, 3) - (0, -2, 0)] = (1, 4, 3).$$

$$\pi(P;\ \overrightarrow{v_1}, \vec{\beta}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$12(x-1)+2(y-2)+4(z-3)-4(z-3)-8(x-1)-3(y-2)=0;$$

$$4(x-1)-(y-2)=0; \;\; 4x-4-y+2=0.$$

$$\underline{\pi \equiv 4x-y-2=0}.$$

****

3º) Se dispone de tres aleaciones A, B y C que contienen, entre otros metales, oro y plata en las proporciones indicadas en la tabla adjunta. Se quiere obtener un lingote de 25 gramos, con una proporción del 72 % de oro y una proporción del 16 % de plata, tomando x gramos de A, y gramos de B y z gramos de C. Determínense las cantidades x, y, z.

	Oro (%)	Plata (%)
A	100	0
B	75	15
C	60	22

El lingote a obtener contiene: $\left\{\begin{array}{l} Oro \to 72\ \%\ de\ 25 = 0{,}72 \cdot 25 = 18\ gr \\ Plata \to 16\ \%\ de\ 25 = 0{,}16 \cdot 25 = 4\ gr. \\ Otros \to 12\ \%\ de\ 25 = 0{,}12 \cdot 25 = 3\ gr \end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{r} Oro \to x + 0{,}75y + 0{,}6z = 18 \\ Plata \to 0{,}15y + 0{,}22 = 4 \\ Otros \to 0{,}1y + 0{,}18z = 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 100x + 75y + 60z = 1.800 \\ 15y + 22z = 400 \\ 10y + 18z = 300 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 20x + 15y + 12z = 360 \\ 15y + 22z = 400 \\ 5y + 9z = 150 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 360 & 15 & 12 \\ 400 & 15 & 22 \\ 150 & 5 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 20 & 15 & 12 \\ 0 & 15 & 22 \\ 0 & 5 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{48.600+24.000+49.500-27.000-39.600-54.000}{2.700-2.200} =$$

$$= \frac{122.100-120.600}{500} = \frac{122.100-120.600}{500} = \frac{1.500}{500} = 3.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 20 & 360 & 12 \\ 0 & 400 & 22 \\ 0 & 150 & 9 \end{vmatrix}}{500} = \frac{72.000-66.000}{500} = \frac{6.000}{500} = 12.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 20 & 15 & 360 \\ 0 & 15 & 400 \\ 0 & 5 & 150 \end{vmatrix}}{500} = \frac{45.000-40.000}{500} = \frac{5.000}{500} = 10.$$

$\underline{Hay\ que\ coger\ 3\ gramos\ de\ A, 12\ gramos\ de\ B\ y\ 10\ gramos\ de\ C.}$

****

4º) Dados dos sucesos, A y B, de un experimento aleatoria, con probabilidades tales que $P(A)=\frac{4}{9}, P(B)=\frac{1}{2}$ y $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$, se pide:

a) Comprobar si los sucesos A y B son independientes o no.

b) Calcular $P(\overline{A}/B)$, donde $\overline{A}$ denota el suceso complementario de A.

----

a)

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$.

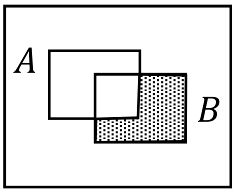
$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{4}{9}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{8+9-12}{18}=\frac{5}{18}$.

$P(A)\cdot P(B)=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{9}\neq\frac{5}{18}=P(A\cap B)$.

$\underline{Por\ lo\ expuesto\ anteriormente\ los\ sucesos\ A\ y\ B\ no\ son\ independientes}$.

b)

$P(\overline{A}/B)=P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=$



$=\frac{1}{2}-\frac{5}{18}=\frac{9-5}{18}=\frac{4}{18}=\underline{\underline{\frac{2}{9}}}$.

****

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular la matriz $B = (A - I) \cdot (2I + 2A)$.

b) Determinar el rango de las matrices $A - I, A^2 - I$ y $A^3 - I$.

c) Calcular la matriz inversa de A^6, en caso de que exista.

----

a)

$$B = (A - I) \cdot (2I + 2A) = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot (2I + 2A) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

b)

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0.$$

$$\underline{Rang\ (A - I) = 2.}$$

$$A^2 - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{Rang\ (A^2 - I) = 1.}$$

$$A^3 - I = A^2 \cdot A - I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{Rang\ (A^3 - I) = 1}.$$

$c)$

$$A^6 = A^3 \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 256 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|A^6| = 256 \neq 0 \Rightarrow \underline{A^6\ es\ invertible}.$$

Se obtiene la inversa de A^6 por el método de Gauss-Jordan.

$$(A^6|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 256 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_1 \to \frac{1}{256} F_1\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{256} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\underline{(A^6)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{256} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) Se considera la función $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^2+1}$ y se pide:

$a)$ Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

$b)$ Estudiar la existencia de asíntotas horizontales y verticales de la función f y, en su caso, determinarlas.

$c)$ Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y sus extremos relativos en el caso de que existan.

$a)$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{-e^{-x}\cdot(x^2+1)-e^{-x}\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-e^{-x}\cdot(x^2+2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-e^{-x}\cdot(x+1)^2}{(x^2+1)^2}.$$

$$m = f'(0) = \frac{-e^{-0}\cdot(0+1)^2}{(0^2+1)^2} = \frac{-1\cdot 1}{1} = -1.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(0) = \frac{e^{-0}}{0^2+1} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow A(0, 1)$.

La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$$y - 1 = -1 \cdot (x - 0) = -x.$$

$$\underline{Recta\ tangente: t \equiv x + y - 1 = 0}.$$

$b)$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x^2+1} = 0 \Rightarrow \underline{La\ recta\ y = 0\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{x^2 + 1 \neq 0, \forall x \in R \Rightarrow La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ asíntotas\ verticales}.$$

$c)$

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente, en ese punto.

$f'(x) = \frac{-e^{-x} \cdot (x+1)^2}{(x^2+1)^2}$.

Teniendo en cuenta que $-e^{-x} = -\frac{1}{e^x} < 0, \forall x \in R$ y que $\frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2} > 0, \forall x \in R$:

$\underline{f'(x) < 0, \forall x \in R \Rightarrow f(x)\ es\ monótona\ decreciente\ en\ su\ dominio, que\ es\ R.}$

$\underline{Por\ ser\ f'(x) \neq 0, \forall x \in R \Rightarrow f(x)\ no\ tiene\ extremos\ relativos.}$

****

3º) Sea r la recta que pasa por los puntos $P_1(3, 2, 0)$ y $P_2(7, 0, 2)$. Se pide:

a) Hallar la distancia del punto $Q(3, 5, -3)$ a la recta r.

b) Hallar el punto de corte de la recta r con el plano π perpendicular a r que pasa por el punto Q.

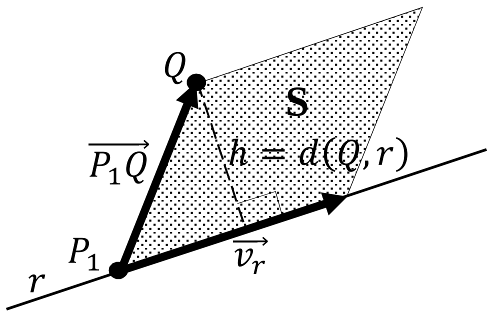
$a)$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = [P_2 - P_1] = [(7, 0, 2) - (3, 2, 0)] = (4, -2, 2) \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (2, -1, 1).$$

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.



$$\left. \begin{array}{r} S = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{P_1Q}\right| \\ S = |\overrightarrow{v_r}| \cdot h \end{array} \right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{P_1Q}\right| = |\overrightarrow{v_r}| \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{h = d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{P_1Q}\right|}{|\overrightarrow{v_r}|}}.$$

$$\overrightarrow{P_1Q} = [Q - P_1] = [(3, 5, -3) - (3, 2, 0)] = (0, 3, -3).$$

Aplicando la fórmula al punto Q y a la recta r:

$$d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{P_1Q}\right|}{|\overrightarrow{v_r}|} = \frac{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{|i + 2k - i + 2j|}{3\sqrt{6}} = \frac{|2j + 2k|}{3\sqrt{6}} = \frac{2 \cdot |j + k|}{3\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}}{3\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{12}}{3 \cdot 6} = \underline{\frac{2\sqrt{3}}{9}\ u = d(P, r)}.$$

$b)$

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv 2x - y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π es el que contiene al punto Q:

$$\left. \begin{array}{r} \beta \equiv 2x - y + z + D = 0 \\ Q(3, 5, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 3 - 5 + 1 \cdot (-3) + D = 0;$$

$$6 - 5 - 3 + D = 0;\ -2 + D = 0;\ \ D = 2 \Rightarrow \pi \equiv 2x - y + z + 2 = 0.$$

El punto N pedido es la intersección de la recta r con el plano π:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x - y + z + 2 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot (3 + 2\lambda) - (2 - \lambda) + \lambda + 2 = 0;$$

$$6 + 4\lambda - 2 + \lambda + \lambda + 2 = 0; \;\; 6 + 6\lambda = 0; \;\; 1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1.$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 3 + 2 \cdot (-1) = 3 - 2 = 1 \\ y = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3 \\ z = -1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{N(1, 3, -1)}.$$

****

4º) Se considera el triángulo de vértices $A(1,3,-1), B(3,1,0)\ y\ C(2,5,1)$ y se pide:

$a)$ Determinar razonadamente si el triángulo es equilátero, isósceles o escaleno.

$b)$ Obtener las medidas de sus tres ángulos.

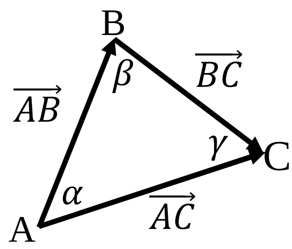
La contestación del apartado $b)$ conlleva la respuesta del apartado $a)$.

$b)$

$$\overrightarrow{AB} = [B-A] = [(3,1,0)-(1,3,-1)] = (2,-2,1).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C-A] = [(2,5,1)-(1,3,-1)] = (1,2,2).$$

$$\overrightarrow{BC} = [C-B] = [(2,5,1)-(3,1,0)] = (-1,4,1).$$



Por el concepto de producto escalar:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}.$$

$$\cos\alpha = \frac{(2,-2,1)\cdot(1,2,2)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{2-4+2}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{1+4+4}} = \frac{0}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}} = \frac{0}{9} = 0 \Rightarrow \underline{\alpha = 90°}.$$

$$\underline{El\ triángulo\ es\ rectángulo\ en\ A.}$$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{(-2,2,-1)\cdot(-1,4,1)}{\sqrt{(-2)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+4^2+1^2}} = \frac{2+8-1}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{1+16+1}} = \frac{9}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{18}} =$$

$$= \frac{9}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{\beta = 45°}.$$

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{(-1,-2,-2)\cdot(1,-4,-1)}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-4)^2+(-1)^2}} = \frac{-1+8+2}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{1+16+1}} =$$

$$= \frac{9}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{18}} = \frac{9}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{\gamma = 45°}.$$

$$\underline{El\ triángulo\ es\ rectángulo\ en\ A\ e\ isósceles.}$$

****