PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{L(1-x)}{1-x} \; si \; x < 0 \\ x \cdot e^{-x} \; si \; s \geq 0 \end{cases}$, donde L denota el logaritmo neperiano, se pide:

a) Estudiar la continuidad de f y calcular $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Calcular la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 2$.

c) Calcular $\int_{-1}^{1} f(x) \cdot dx$.

---

a)

La función f(x) es continua $\forall x \in R - \{0\}$, cuya continuidad vamos a estudiar.

Para que $f(x)$ sea continua en x = 0 es necesario que sus límites laterales sean iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{L(1-x)}{1-x} = \frac{L1}{1} = \frac{0}{1} = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (x \cdot e^{-x}) = \frac{0}{e^1} = \frac{0}{1} = 0 = f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow f(x) \; es \; continua \; en \; x = 0.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{L(1-x)}{1-x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-1}{1-x}}{-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1+\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$

$$\underline{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.}$$

$b)$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es el valor de su primera derivada en ese punto:

Para x = 2 la función es $f(x) = x \cdot e^{-x}$.

$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1-x) = \frac{1-x}{e^x}.$

$m = f'(2) = \frac{1-2}{e^2} = -\boldsymbol{\frac{1}{e^2}}.$

El punto de tangencia es: $f(2) = 2 \cdot e^{-2} \Rightarrow \boldsymbol{T\left(2, \frac{2}{e^2}\right)}.$

La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$y - \frac{2}{e^2} = -\frac{1}{e^2}(x-2); \;\; e^2 y - 2 = -x + 2.$

La ecuación de la recta tangente pedida es la siguiente:

$$\underline{Recta\ tangente: t \equiv x + e^2 y - 4 = 0.}$$

$c)$

$\int_{-1}^{1} f(x) \cdot dx = \int_{-1}^{0} \frac{L(1-x)}{1-x} \cdot dx + \int_{0}^{1} x \cdot e^{-x} \cdot dx = A + B. \quad (*)$

$A = \int_{-1}^{0} \frac{L(1-x)}{1-x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} L(1-x) = -t \\ dt = \frac{1}{1-x} \cdot dx \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x = 0 \to t = 0 \\ x = -1 \to t = L2 \end{matrix} \right\} = \int_{L2}^{0} -t \cdot dt =$

$= \int_{0}^{L2} t \cdot dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{L2} = \frac{(L2)^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \boldsymbol{\frac{L^2 2}{2}} = \boldsymbol{A}.$

$B = \int_{0}^{1} x \cdot e^{-x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x \to du = dx \\ dv = e^{-x} \cdot dx \to v = -e^{-x} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow [x \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} \cdot dx]_0^1 = [-xe^{-x} + \int e^{-x} \cdot dx]_0^1 = [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^1 =$

$= [-e^{-x}(x+1)]_0^1 = [e^{-x}(x+1)]_1^0 = e^0(0+1) - e^{-1} \cdot 2 = 1 - \frac{2}{e} = \boldsymbol{\frac{e-2}{e}} = \boldsymbol{B}.$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A y B:

$$\int_{-1}^{1} f(x) \cdot dx = \frac{L^2 2}{2} + \frac{e-2}{e} = \frac{e \cdot L^2 2 + 2e - 4}{2e}.$$

$$\underline{\int_{-1}^{1} f(x) \cdot dx = \frac{e \cdot L^2 2 + 2e - 4}{2e}.}$$

****

2º) a) Despeje X en la ecuación matricial $X \cdot (CD)^{-1} = A + X \cdot (D^{-1}C^{-1} - B)$, siendo A, B, C, D matrices cuadradas invertibles. Expresar X de la forma más simple posible.

b) Para $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, determine Y tal que $Y \cdot B = A$.

---

a)

Para la realización de este apartado es muy importante saber que la inversa del producto de dos matrices es el producto de las inversas de las matrices cambiando el orden, es decir: $(CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}$.

$$X \cdot (CD)^{-1} = A + X \cdot (D^{-1}C^{-1} - B) = A + X \cdot D^{-1}C^{-1} - X \cdot B =$$

$$= A + X \cdot (CD)^{-1} - X \cdot B.$$ Eliminando los sumandos iguales:

$X \cdot B = A$. Multiplicando los dos términos, por la derecha, por B^{-1}:

$X \cdot B \cdot B^{-1} = A \cdot B^{-1}$; $X \cdot I = A \cdot B^{-1}$.

$$\underline{X = A \cdot B^{-1}}.$$

b)

$Y \cdot B = A$. Multiplicando los dos términos, por la derecha, por B^{-1}:

$Y \cdot B \cdot B^{-1} = A \cdot B^{-1}$; $Y \cdot I = A \cdot B^{-1} \Rightarrow \boldsymbol{Y = A \cdot B^{-1}}$.

Se obtiene la inversa de B por el método de Gauss-Jordan.

$$(B|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 + F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \to \tfrac{1}{2}F_3\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \boldsymbol{B^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Sustituyendo en el valor de Y el valor de B^{-1} y operando:

$$Y = A \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{Y = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.}$$

****

3º) Dados los planos $\pi_1 \equiv ax + y - z + 1 = 0$ y $\pi_2 \equiv x + ay + z - 2 = 0$, determine, en caso de que existan, el valor o posibles valores del parámetro a, para cada uno de los siguientes supuestos:

a) Que π_1 y π_2 sean paralelos. b) Que π_1 y π_2 sean perpendiculares.

c) Que la recta intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano $\beta \equiv x = y$.

---

a)

Teniendo en cuenta sus términos independientes, la condición necesaria y suficiente para que los planos π_1 y π_2 sean paralelos es que sus vectores normales sean linealmente dependientes, o sea, que tengan proporcionales sus componentes.

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_1} = (a, 1, -1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1, a, 1)$.

$\frac{a}{1} = \frac{1}{a} = \frac{-1}{1} \Rightarrow a = -1.$

$$\underline{Los\ planos\ \pi_1\ y\ \pi_2\ son\ paralelos\ para\ a = -1.}$$

b)

Para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares es condición necesaria y suficiente que sus vectores normales los sean, o sea, que su producto escalar sea cero:

$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \Rightarrow (a, 1, -1) \cdot (1, a, 1) = 0;\ \ a + a - 1 = 0;\ \ 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$

$$\underline{Los\ planos\ \pi_1\ y\ \pi_2\ son\ perpendiculares\ para\ a = \frac{1}{2}.}$$

c)

La recta r intersección de los planos π_1 y π_2 es $r \equiv \begin{cases} ax + y - z + 1 = 0 \\ x + ay + z - 2 = 0 \end{cases}$.

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan:

$$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = i - j + a^2 k - k + ai - aj =$$

$$= (a+1)i - (a+1)j + (a^2 - 1)k = (a+1)i - (a+1)j + (a+1)(a-1)k.$$

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1, -1, a - 1)$.

Un vector normal del plano $\beta \equiv x = y$ es $\overrightarrow{n_\beta} = (1, -1, 0)$.

Para que la recta r intersección de π_1 y π_2 sea perpendicular al plano $\beta \equiv x = y$ es necesario que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean linealmente dependientes, o sea, que sus componentes sean proporcionales:

$$\frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} = \frac{a-1}{0} \Rightarrow \frac{a-1}{0} = 1;\ \ a - 1 = 0 \ \Rightarrow a = 1.$$

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \beta\ son\ perpendiculares\ para\ a = 1}.$$

****

4º) Dado el punto $P(2,1,-1)$, determine el punto P' simétrico de P respecto al plano que pasa por los puntos $A(0,2,-1)$, $B(1,-3,0)$ y $C(2,1,1)$.

Los puntos $A(0,2,-1)$, $B(1,-3,0)$ y $C(2,1,1)$ determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B-A] = [(1,-3,0)-(0,2,-1)] = (1,-5,1).$

$\overrightarrow{AC} = [C-A] = [(2,1,1)-(0,2,-1)] = (2,-1,2).$

La expresión implícita o general de plano π que contiene a los puntos A, B y C es la siguiente: $\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z+1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$

$-10x + 2(y-2) - (z+1) + 10(z+1) + x - 2(y-2) = 0;$

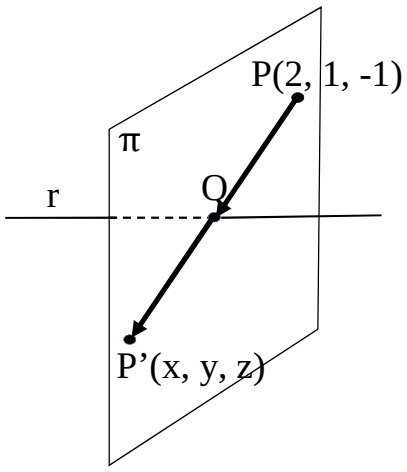
$-9x + 9(z+1) = 0;\ -x + z + 1 = 0 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{\pi \equiv x - z - 1 = 0}.$

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1,0,-1)$.

La recta r, perpendicular a π que contiene al punto $P(2,1,-1)$ tiene la siguiente expresión dada por unas ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1 \\ z = -1-\lambda \end{cases}$.

El punto Q intersección de r y π es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - z - 1 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1 \\ z = -1-\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (2+\lambda) + (1+\lambda) - 1 = 0;$$



$2 + \lambda + 1 + \lambda - 1 = 0;\ \ 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1.$

$$\left.\begin{array}{r} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 1 \\ z = -1 + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{Q(1,1,0)}.$$

Para que P' sea el simétrico de P con respecto a r tiene que cumplirse que:

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \ \Rightarrow\ [Q-P] = [P'-Q];\ [(1,1,0)-(2,1,-1)] = [(x,y,z)-(1,1,0)];$

$(-1,0,1) = (x-1, y-1, z) \ \Rightarrow\ \underline{P'(0,1,1)}.$

****

OPCIÓN B

1º) Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} 3x + y + mz = 1 \\ x - y + 2z = -2 \\ 5x + (m+1)y + 2z = 4 \end{cases}$, se pide:

a) Discutirlo según los valores del parámetro m.

b) Resolverlo en el caso de m = 0.

c) Resolverlo en el caso de m = 2.

---

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & m+1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & m+1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & m+1 & 2 \end{vmatrix} = -6 + m(m+1) + 10 + 5m - 6(m+1) - 2 =$$

$$= 2 + m^2 + m + 5m - 6m - 6 = m^2 - 4 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{m_1 = -2, m_2 = 2}.$$

$$\underline{Para \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ m = -2 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -12 - 1 - 10 + 5 - 6 - 4 \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ A' = 3}.$$

$$\underline{Para\ m = -2 \Rightarrow Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ m = 2 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \rightarrow F_2 - 3F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 5F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & 8 & -8 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 = -2F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{Rang\ A' = 2}.$$

$$\underline{Para\ m = 2\ \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

b)

Para $m = 0$ el sistema resulta: $\left.\begin{matrix} 3x + y = 1 \\ x - y + 2z = -2 \\ 5x + y + 2z = 4 \end{matrix}\right\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-2+8-2+4}{-4} = \frac{8}{-4} = -2.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-12+10-24-2}{-4} = -\frac{28}{-4} = 7.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-12+1-10+5+6-4}{-4} = -\frac{14}{-4} = \frac{7}{2}.$$

$$\underline{Solución: x = -2, y = 7, z = \frac{7}{2}.}$$

c)

Para $m = 2$ el sistema resulta: $\left.\begin{matrix} 3x + y + 2z = 1 \\ x - y + 2z = -2 \\ 5x + 3y + 2z = 4 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una ecuación (tercera) y haciendo $z = \lambda$:

$$\left.\begin{matrix} 3x + y = 1 - 2\lambda \\ x - y = -2 - 2\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4x = -1 - 4\lambda \rightarrow x = -\frac{1}{4} - \lambda.$$

$$y = x + 2 + 2\lambda = -\frac{1}{4} - \lambda + 2 + 2\lambda = \frac{7}{4} + \lambda.$$

$$\underline{Solución: x = -\frac{1}{4} - \lambda, y = \frac{7}{4} + \lambda, z = \lambda,\ \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) Se consideran los puntos $A(0,5,3)$, $B(0,6,4)$, $C(2,4,2)$ y $D(2,3,1)$ y se pide:

a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios y que el polígono ABCD es un paralelogramo.

b) Calcular el área de dicho paralelogramo.

c) Determinar el lugar geométrico de los puntos P cuya proyección sobre el plano ABCD es el punto medio del paralelogramo.

---

a)

Los puntos A, B, C y D son coplanarios cuando el punto D pertenezca al plano π determinado por los puntos A, B y C.

Los puntos $A(0,5,3)$, $B(0,6,4)$, $C(2,4,2)$ determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0,6,4) - (0,5,3)] = (0,1,1).$

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(2,4,2) - (0,5,3)] = (2,-1,-1).$

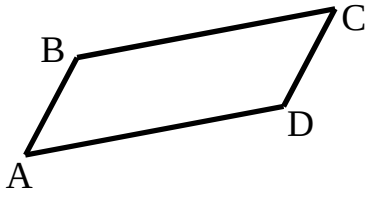
$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-5 & z-3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$-x + 2(y-5) - 2(z-3) + x = 0;\ \ y - 5 - z + 3 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\pi \equiv y - z - 2 = 0}.$

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv y - z - 2 = 0 \\ D(2,3,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3 - 1 - 2 = 0 \Rightarrow Si \Rightarrow \boldsymbol{D \in \pi}.$$

$\underline{Los\ puntos\ A, B, C\ y\ D\ son\ coplanarios, como\ se\ pedía\ comprobar.}$

El polígono ABCD es un paralelogramo cuando se cumplan las siguientes igualdades de vectores: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\ y\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.



$\overrightarrow{AB} = (0,1,1).$

$\overrightarrow{DC} = [C - D] = [(2,4,2) - (2,3,1)] = (0,1,1).$

$\overrightarrow{AD} = [D - A] = [(2,3,1) - (0,5,3)] = (2,-2,-2).$

$\overrightarrow{BC} = [C - B] = [(2,4,2) - (0,6,4)] = (2,-2,-2).$

Como puede observarse, se cumple lo pedido: $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\ y\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}}$.

$\underline{Los\ puntos\ A, B, C\ y\ D\ forman\ un\ paralelogramo, c.q.c.}$

b)

El área de un paralelogramo es el módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan:

$$S_{ABCD} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \begin{Vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{Vmatrix} = 2 \cdot \begin{Vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{Vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot |-i + j - k + i| = 2 \cdot |j - k| = 2 \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2} = 2 \cdot \sqrt{1 + 1} \Rightarrow$$

$$\underline{S_{ABCD} = 2\sqrt{2}\, u^2}.$$

c)

El lugar geométrico de los puntos P cuya proyección sobre el plano ABCD es el punto medio Q del paralelogramo es la recta r, perpendicular al plano π, (que es el que contiene a los puntos dados), que pasa por el centro del paralelogramo.

El punto medio del paralelogramo es el punto medio del segmento $\overline{AC}$ (o también el punto medio del segmento $\overline{BD}$):

$$\left.\begin{matrix} A(0,5,3) \\ C(2,4,2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{Q}\left(\mathbf{1}, \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right).$$

Un vector normal del plano $\pi \equiv y - z - 2 = 0$ es $\vec{n} = (0, 1, -1)$.

$$\underline{Lugar\ geométrico\ pedido:\ r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{9}{2} + \lambda \\ z = \frac{5}{2} - \lambda \end{cases}, \ \forall \lambda \in R.}$$

****

3º) a) Determine el polinomio $f(x)$, sabiendo que $f'''(x) = 12$, para todo $x \in R$ y además verifica: $f(1) = 3$; $f'(1) = 1$; $f''(1) = 4$.

b) Determine el polinomio $g(x)$, sabiendo que $g''(x) = 6$, para todo $x \in R$ y además verifica: $\int_0^1 g(x) \cdot dx = 5$, $\int_0^2 g(x) \cdot dx = 14$.

---

a)

Por ser que $f'''(x) = 12$, el polinomio $f(x)$ es de tercer grado.

Sea el polinomio pedido $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$ $\quad f''(x) = 6ax + 2b.$ $\quad f'''(x) = 6a.$

$f'''(x) = 12 \Rightarrow 6a = 12 \Rightarrow \boldsymbol{a = 2}.$

$f''(1) = 4 \Rightarrow 6 \cdot 2 \cdot 1 + 2b = 4;\ 12 + 2b = 4;\ 6 + b = 2 \Rightarrow \boldsymbol{b = -4}.$

$f'(1) = 1 \Rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot (-4) \cdot 1 + c = 1;\ 6 - 8 + c = 1 \Rightarrow \boldsymbol{c = 3}.$

$f(1) = 3 \Rightarrow 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + d = 3;\ 2 - 4 + 3 + d = 3 \Rightarrow \boldsymbol{d = 2}.$

$$\underline{f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3x + 2.}$$

b)

Por ser $g''(x) = 6$, el polinomio $g(x)$ es un polinomio de segundo grado.

Sea $g(x) = ax^2 + bx + c$.

$g'(x) = 2ax + b.$ $\quad g''(x) = 2a.$

$g''(x) = 6 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow \boldsymbol{a = 3}.$

El polinomio resulta: $g(x) = 3x^2 + bx + c$.

$$\int_0^1 g(x) \cdot dx = 5 \Rightarrow \int_0^1 (3x^2 + bx + c) \cdot dx = \left[\frac{3x^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_0^1 =$$

$$= \left(1^3 + \frac{b \cdot 1^2}{2} + c \cdot 1\right) - 0 = 5;\ 1 + \frac{b}{2} + c = 5;\ 2 + b + 2c = 10;\ \boldsymbol{b + 2c = 8}. \quad (1)$$

$$\int_0^2 g(x) \cdot dx = 14 \Rightarrow \int_0^2 (3x^2 + bx + c) \cdot dx = \left[x^3 + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_0^2 =$$

$= \left(2^3 + \frac{b \cdot 2^2}{2} + 2c\right) - 0 = 14;\ \ 8 + 2b + 2c = 14;\ \ 4 + b + c = 7;\ \ \boldsymbol{b + c = 3}.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{matrix} b + 2c = 8 \\ b + c = 3 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} b + 2c = 8 \\ -b - c = -3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{c = 5, b = -2}.$$

$$\underline{g(x) = 3x^2 - 2x + 5}.$$

****

4º) Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función $f(x) = \begin{cases} 0 \quad si \quad x \leq 0 \\ |xLx| \; si \; x > 0 \end{cases}$, donde L denota el logaritmo neperiano.

Teniendo en cuenta que $Lx < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$ y que $Lx > 0 \Rightarrow x > 1$, la función $f(x)$ puede redefinirse de la forma $f(x) = \begin{cases} 0 \quad si \quad x \leq 0 \\ -x \cdot Lx \;\; si \;\; 0 < x < 1. \\ x \cdot Lx \quad si \quad x \geq 1 \end{cases}$

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para x = 0 y para x = 1 cuya continuidad es dudosa y se va a determinar.

Una función es continua en un punto cuando se cumple que sus límites por la izquierda y por la derecha son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 0 \ \Rightarrow \ \left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} = 0 = f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(-x \cdot Lx) = 0 \quad (*) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$(*) \quad \lim_{x\to 0}(-x \cdot Lx) = -\lim_{x\to 0}(x \cdot Lx) = -0 \cdot (-\infty) \Rightarrow Ind. \Rightarrow -\lim_{x\to 0} \frac{Lx}{\frac{1}{x}} = -\frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow -\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} x = \mathbf{0}.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} = f(0) \Rightarrow \boldsymbol{f(x)\ es\ continua\ en\ x = 0}.$$

$$Para\ x = 1 \ \Rightarrow \ \left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(-x \cdot Lx) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(x \cdot Lx) = 0 = f(0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} = f(1) \Rightarrow \boldsymbol{f(x)\ es\ continua\ en\ x = 1}.$$

Para que la función sea derivable para x = 0, sus derivadas laterales en ese punto tienen que ser iguales:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 \quad si \quad x \leq 0 \\ -1 - Lx \;\; si \;\; 0 < x < 1 \\ 1 + Lx \quad si \quad x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = +\infty \end{matrix}\right\} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow$$

$$\underline{f(x)\ no\ es\ derivable\ en\ x = 0}.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ -1 - Lx & si \quad 0 < x < 1 \\ 1 + Lx & si \quad x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f'(1^-) = -1 \\ f'(1^+) = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+) \Rightarrow$$

$$\underline{f(x) \text{ no es derivable en } x = 1}.$$

****