

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE MADRID****SEPTIEMBRE – 2015**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger uno de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} -mx + my + z = 0 \\ x - my + 3z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$, se pide:

a) Discutirlo según los valores del parámetro m .

b) Resolverlo en el caso $m = 0$.

c) Resolverlo en el caso $m = 2$.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} -m & m & 1 \\ 1 & -m & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} -m & m & 1 & 0 \\ 1 & -m & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro m es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} -m & m & 1 \\ 1 & -m & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -m^2 - 2 + 6m + 2m - 6m + m =$$

$$= -m^2 + 3m - 2 = 0; m^2 - 3m + 2 = 0; m = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow m_1 = 1; m_2 = 2.$$

$$\underline{\text{Para } \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Ran } M = \text{Ran } M' = 3 = n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}}$$

$$\text{Para } m = 1 \text{ es } M' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

$$\underline{\text{Para } m = 1 \Rightarrow \text{Ran } M = 2; \text{Ran } M' = 3 \Rightarrow \text{Incompatible.}}$$

$$\text{Para } m = 2 \text{ es } M' = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = -F_3\} \Rightarrow \text{Rang } M' = 2.$$

$$\underline{\text{Para } m = 2 \Rightarrow \text{Ran } M = \text{Ran } M' = 2 < n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}}$$

b)

Para $m = 0$ el sistema es $\begin{cases} z = 0 \\ x + 3z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$, que es compatible determinado y
cuya solución es:

$$\underline{\text{Solución: } x = 4, y = 4, z = 0.}$$

c)

Para $m = 2$ el sistema es $\begin{cases} -2x + 2y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$, que es compatible indeterminado,
según el apartado anterior y es equivalente al sistema: $\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$.

$$\text{Haciendo } z = \lambda: \begin{cases} x - 2y = 4 - 3\lambda \\ 2x - 2y = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = -4 + 3\lambda \\ 2x - 2y = \lambda \end{cases} \Rightarrow x = -4 + 4\lambda.$$

$$2x - 2y = \lambda; -8 + 8\lambda - 2y = \lambda; 2y = -8 + 7\lambda \Rightarrow y = -4 + \frac{7}{2}\lambda.$$

$$\underline{\text{Solución: } \begin{cases} x = -4 + 4\lambda \\ y = -4 + \frac{7}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \forall \lambda \in R.}$$

2º) La recta r pasa por $P(2, -1, 0)$ y tiene vector director $\vec{v}_r = (1, \lambda, -2)$; la recta s pasa por $Q(1, 0, -1)$ y tiene vector director $\vec{v}_s = (2, 4, 2)$.

a) Calcular $\lambda > 0$ para que la distancia entre r y s sea $\frac{9}{\sqrt{59}}$.

b) Calcular λ para que r sea perpendicular a la recta que pasa por P y Q .

a)

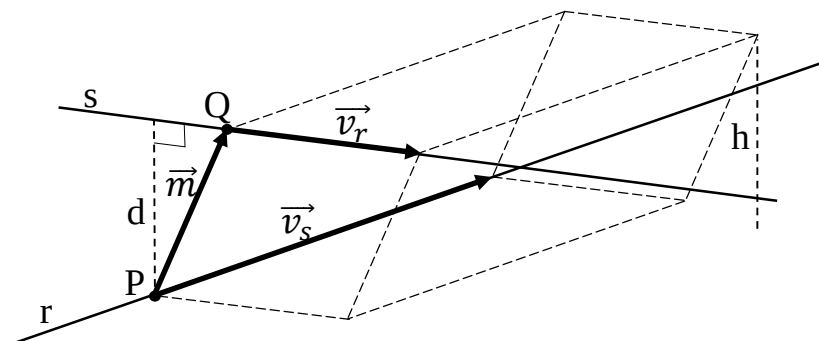
Por ser los vectores directores de las rectas linealmente independientes, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, las rectas r y s se cruzan (en el caso de que se cortaran, la distancia entre ellas sería cero, y no es el caso).

Para hallar la distancia entre las rectas r y s hacemos lo siguiente:

En primer lugar determinamos el vector $\vec{m}$ que tiene como origen un punto P de r y como extremo el punto Q de s :

$$\vec{m} = \overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(1, 0, -1) - (2, -1, 0)] = (-1, 1, -1).$$

Se determina un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ y el vector $\vec{m}$.



Para una mejor comprensión se hace el esquema adjunto.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observar que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \vec{v}_r \cdot (\vec{v}_s \times \vec{m}) = |\vec{v}_r \times \vec{v}_s| \cdot h = |\vec{v}_r \times \vec{v}_s| \cdot d \Rightarrow d = \frac{|\vec{v}_r \cdot (\vec{v}_s \times \vec{m})|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|}.$$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & \lambda & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\lambda i - 4j + 4k - 2\lambda k + 8i - 2j =$$

$$= (2\lambda + 8)i - 6j + (4 - 2\lambda)k.$$

$$d = \frac{|\vec{v}_r \cdot (\vec{v}_s \times \vec{m})|}{|\vec{v}_r \times \vec{v}_s|} = \frac{\left\| \begin{array}{ccc} 1 & \lambda & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{array} \right\|}{\sqrt{(2\lambda+8)^2 + (-6)^2 + (4-2\lambda)^2}} = \frac{|-4-4-2\lambda-8-2+2\lambda|}{\sqrt{4\lambda^2+32\lambda+64+36+16-16\lambda+4\lambda^2}} =$$

$$= \frac{|-18|}{\sqrt{8\lambda^2+16\lambda+116}} = \frac{|-18|}{2\sqrt{2\lambda^2+4\lambda+29}} = \frac{9}{\sqrt{2\lambda^2+4\lambda+29}} = \frac{9}{\sqrt{59}} \Rightarrow \sqrt{2\lambda^2+4\lambda+29} = \sqrt{59};$$

$$2\lambda^2 + 4\lambda + 29 = 59; 2\lambda^2 + 4\lambda - 30 = 0; \lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0; \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm 8}{2} = -1 \pm 4 \Rightarrow \lambda_1 = -5, \lambda_2 = 3. \quad \text{Como es } \lambda > 0:$$

Solución: $\lambda = 3$.

b)

La recta que pasa por P y Q tiene como vector director $\vec{v}_{PQ} = \vec{PQ} = (-1, 1, -1)$.

Dos rectas son perpendiculares cuando lo son sus vectores directores, o sea, cuando el producto escalar de sus vectores directores es cero:

$$\vec{v}_{PQ} \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow (-1, 1, -1) \cdot (1, \lambda, -2) = 0; -1 + \lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1.$$

La recta que pasa por P y Q es perpendicular a r para $\lambda = -1$.

3º) a) Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.

b) Demostrar que la ecuación $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = 0$ tiene una única solución real y localizar un intervalo de longitud 1 que la contenga.

a)

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 2 + 6x + 12x^2. \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 2 + 6x + 12x^2 = 0; \quad 6x^2 + x + 1 = 0;$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-24}}{2} \Rightarrow x \notin \mathbb{R} \Rightarrow 6x^2 + x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

La función es monótona creciente en su dominio, que es $\mathbb{R}$.

b)

La condición de monotonía de la función indica, necesariamente, que la función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ no puede tener más de una raíz real.

Aplicando el teorema de Bolzano al intervalo $[-2, 2]$:

$$f(-2) = 1 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2)^3 = 1 - 4 + 12 - 32 < 0.$$

$$f(2) = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 = 1 + 4 + 12 + 32 > 0.$$

De lo anterior se deduce que el valor de la raíz es $-2 < x < 2$.

Para solucionar el ejercicio basta con reducir el intervalo hasta que sea de longitud menor que 1.

$$f(0) = 1 > 0 \Rightarrow -2 < x < 0.$$

$$f(-1) = 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1)^3 = 1 - 2 + 3 - 4 < 0.$$

La raíz de la función $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ es $-1 < x < 0$.

4º) a) Calcular la integral definida $\int_1^4 (1-x) \cdot e^{-x} \cdot dx$.

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(1-x) \cdot e^{-x}]$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(1-x) \cdot e^{-x}]$.

a)

En primer lugar hacemos la integral indefinida $I = \int (1-x) \cdot e^{-x} \cdot dx$:

$$I = \int (1-x) \cdot e^{-x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1-x = u \rightarrow du = -dx \\ e^{-x} \cdot dx = dv \rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-x) \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} \cdot (-dx) = (x-1) \cdot e^{-x} - \int e^{-x} \cdot dx =$$

$$= (x-1) \cdot e^{-x} + e^{-x} + C = x \cdot e^{-x} + C.$$

$$\int_1^4 (1-x) \cdot e^{-x} \cdot dx = [x \cdot e^{-x}]_1^4 = (4 \cdot e^{-4}) - (e^{-1}) = \frac{4}{e^4} - \frac{1}{e} = \frac{4-e^3}{e^4}.$$

$$\underline{\int_1^4 (1-x) \cdot e^{-x} \cdot dx = \frac{4-e^3}{e^4}.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(1-x) \cdot e^{-x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{e^x} = \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^x} = \frac{-1}{\infty} = \underline{0}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(1-x) \cdot e^{-x}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+\infty}{e^{-\infty}} = \infty \cdot e^{\infty} = \infty \cdot \infty = \underline{\underline{\infty}}.$$

OPCIÓN B

1º) Dada la función $f(x) = \begin{cases} a + x \cdot Lx, & \text{si } x > 0 \\ x^2 \cdot e^x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$, (donde L denota logaritmo neperiano y a es un número real) se pide:

a) Calcular el valor de a para que f(x) sea continua en todo R.

b) Calcular f'(x) donde sea posible.

c) Calcular $\int_{-1}^0 f(x) \cdot dx$.

a)

La función $f(x) = \begin{cases} a + x \cdot Lx, & \text{si } x > 0 \\ x^2 \cdot e^x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ es continua en su dominio, que es R, excepto para $x = 0$ cuya continuidad vamos a forzar calculando el valor adecuado del parámetro a.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a + x \cdot Lx) = a + \lim_{x \rightarrow 0^-} (x \cdot Lx) = a + [0 \cdot (-\infty)] \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{Lx}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{-\infty} \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \cdot e^x) = 0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0 = f(0).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow \underline{a = 0}.$$

La función f(x) es continua en R para a = 0.

b)

La función resulta: $f(x) = \begin{cases} x \cdot Lx, & \text{si } x > 0 \\ x^2 \cdot e^x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Siendo $g(x) = x \cdot Lx$ es $g'(x) = 1 \cdot Lx + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + Lx$.

Siendo $h(x) = x^2 \cdot e^x$ es $h'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = xe^x(2 + x)$.

Teniendo en cuenta lo anterior: $\underline{f'(x) = \begin{cases} 1 + Lx & \text{si } x > 0 \\ xe^x(2 + x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}}$

c)

$$\int_{-1}^0 f(x) \cdot dx = \int_{-1}^0 x^2 \cdot e^x \cdot dx.$$

Para el cálculo de la integral definida, calculamos en primer lugar la integral indefinida.

$$\begin{aligned} A &= \int x^2 e^x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \rightarrow du = 2x \cdot dx \\ e^x \cdot dx = dv \rightarrow v = e^x \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x \cdot dx = \\ &= x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \int e^x \cdot x \cdot dx = \mathbf{x^2 \cdot e^x - 2 \cdot B.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \int e^x \cdot x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ e^x \cdot dx = dv \rightarrow v = e^x \end{array} \right\} \Rightarrow x \cdot e^x - \int e^x \cdot dx = \\ &= x \cdot e^x - e^x + C = \mathbf{e^x(x - 1) + C.} \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor obtenido de B en la expresión de A:

$$A = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot e^x(x - 1) + C = \mathbf{e^x(x^2 - 2x + 2) + C.}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x) dx &= [e^x(x^2 - 2x + 2)]_{-1}^0 = [e^0(0 - 0 + 2)] - [e^{-1}(1 + 2 + 2)] = \\ &= 2 - \frac{5}{e} = \frac{2e-5}{e}. \end{aligned}$$

$$\underline{\int_{-1}^0 f(x) dx = \frac{2e-5}{e}.$$

2º) Dados los puntos P (-1, -1, 1) y Q (1, 0, 2) y los planos $\pi_1 \equiv x - z = 0$, $\pi_2 \equiv my - 6z = 0$, $\pi_3 \equiv x + y - mz = 0$, se pide:

a) Calcular los valores de m para los que los tres planos se cortan en una recta.

b) Para $m = 3$, hallar la ecuación del plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta de intersección de los planos π_1 y π_2 .

c) Hallar la distancia entre los puntos Q y P', siendo P' el punto simétrico de P respecto al plano π_1 .

a)

Para el caso general de tres planos que determinan las matrices de coeficientes y ampliada M y M', respectivamente, se presentan los siguientes casos:

1º. -- $\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Los planos se cortan en un punto.}$

2º. -- $\text{Rang } M = 2; \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Los planos son secantes dos a dos.}$

3º. -- $\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 \Rightarrow \text{Los planos se cortan en una recta.}$

4º. -- $\text{Rang } M = 1; \text{Rang } M' = 2 \Rightarrow \text{Los planos son paralelos.}$

5º. -- $\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 1 \Rightarrow \text{Los planos son coincidentes.}$

En el caso que nos ocupa, los tres planos carecen de término independiente por lo cual las matrices de coeficientes y ampliada son iguales a efectos de rango; la matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$$

Para que los tres planos se corten en una recta es necesario que se anule el determinante de la matriz, teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ es un menor complementario de la matriz de coeficientes.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -6 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix} = 0; -m^2 + m - 6 = 0; m^2 - m + 6 = 0.$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow m_1 = -2, m_2 = 3.$$

Los tres planos se cortan en una recta para $m = -2$ y para $m = 3$.

b)

Para $m = 3$ los planos $\pi_1 \equiv x - z = 0$ y $\pi_2 \equiv my - 6z = 0$ determinan la recta

$$r \text{ de ecuación } r \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ 3y - 6z = 0 \end{cases}, \text{ equivalente a } r \equiv \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}.$$

Un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\vec{n}_1 = (1, 0, -1)$ y $\vec{n}_2 = (0, 1, -2)$.

$$\vec{v}_r = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = k + i + 2j \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 2, 1).$$

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv x + 2y + z + D = 0$; de estos infinitos planos, el plano π pedido es el que contiene al punto $P(-1, -1, 1)$:

$$\left. \begin{array}{l} \beta \equiv x + 2y + z + D = 0 \\ P(-1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow -1 - 2 + 1 + D = 0; -2 + D = 0 \Rightarrow \mathbf{D = 2}.$$

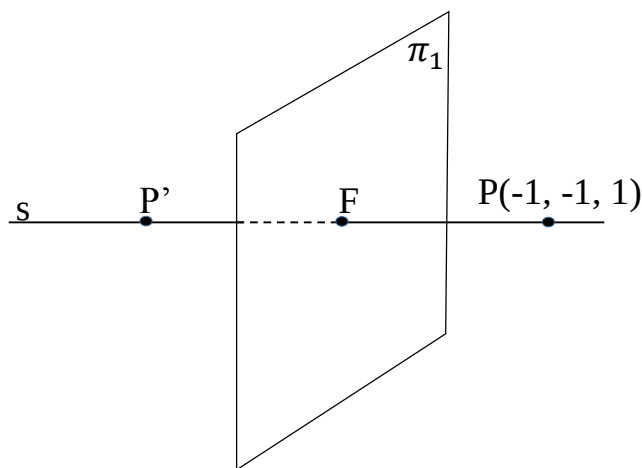
$$\underline{\pi \equiv x + 2y + z + 2 = 0.}$$

c)

La recta s perpendicular al plano π_1 y que contiene a $P(-1, -1, 1)$ tiene la siguiente expresión dada por unas ecuaciones paramétricas: $s \equiv \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = -1 \\ z = 1 - \mu \end{cases}.$

El punto F , intersección de la recta s con el plano π_1 es la solución del sistema que forman:

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv x - z = 0 \\ s \equiv \begin{cases} x = -1 + \mu \\ y = -1 \\ z = 1 - \mu \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + \mu - 1 + \mu = 0; 2\mu - 2 = 0 \rightarrow \mu = 1 \Rightarrow \mathbf{F(0, -1, 0)}.$$



$$\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{FP'} \Rightarrow [F - P] = [P' - F] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [(0, -1, 0) - (-1, -1, 1)] = [(x, y, z) - (0, -1, 0)];$$

$$(1, 0, -1) = (x, y + 1, z) \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow P'(1, -1, -1).$$

Siendo $Q(1, 0, 2)$ es:

$$\overline{P'Q} = \sqrt{(1 - 1)^2 + (0 + 1)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{0 + 1 + 9} = \underline{\sqrt{10} \text{ unidades}}.$$

3º) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$ y usando las propiedades de los determinantes, calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 2a-2b & c & 5b \\ 2d-2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

$$b) \begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}.$$

a)

$$\begin{vmatrix} 2a-2b & c & 5b \\ 2d-2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & c & 5b \\ 2d & f & 5e \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2b & c & 5b \\ -2e & f & 5e \\ -4 & 3 & 10 \end{vmatrix} = A + B.$$

$$A = \begin{vmatrix} 2a & c & 5b \\ 2d & f & 5e \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -10 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -10 \cdot 3 = -\mathbf{30}.$$

$$B = \begin{vmatrix} -2b & c & 5b \\ -2e & f & 5e \\ -4 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} b & c & b \\ e & f & e \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 \cdot 0 = 0.$$

$$\underline{\begin{vmatrix} 2a-2b & c & 5b \\ 2d-2e & f & 5e \\ -2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -30.}$$

b)

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & 2c \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = M + N.$$

$$M = \begin{vmatrix} a & b & 2c \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 4 & 6 \\ d & e & f \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ d & e & f \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 \cdot 3 = -\mathbf{12}.$$

$$N = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ d & e & f \end{vmatrix} = -2 \cdot 0 = \mathbf{0}.$$

$$\underline{\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} = -12.}$$

En la realización de los dos apartados del ejercicios se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

3ª.- Si se intercambian dos líneas de un determinante su valor cambia de signo.

4ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se multiplican o dividen por un número su valor queda multiplicado o dividido por dicho número.

4º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, hallar todas las matrices $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con A, es decir, que cumplan $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 3a+c & 3b+d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b & a \\ 3c+d & c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} b=c \\ 3b+d=a \\ 3c+d=b \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3c-2c=a \\ d=-2c \end{matrix}$$

$$a = b = c; d = -2c.$$

Las matrices pedidas son de la forma $B = \begin{pmatrix} a & a \\ a & -2a \end{pmatrix}$.
