

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE MADRID****JUNIO – 2014**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger una de las dos opciones propuestas y responder razonablemente a las cuestiones de la opción elegida. Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

OPCIÓN A

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular α , β , γ para que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema $A \cdot X = B$.

b) Si $\beta = \gamma = 1$. ¿Qué condición o condiciones debe cumplir α para que el sistema lineal homogéneo $A \cdot X = O$ sea compatible determinado?

c) Si $\alpha = -1$, $\beta = 1$ y $\gamma = 0$, resuelve el sistema $A \cdot X = B$.

a)

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 1 \\ \gamma + 3\alpha = 0 \\ 1 + 2\beta + 3\gamma = 1 \end{array} \right\}.$$

De las ecuaciones primera y tercera se deduce que $\alpha = 1$. Sustituyendo en la segunda ecuación: $\gamma = -3$. Sustituyendo en la tercera ecuación: $1 + 2\beta - 9 = 1$;; $\beta = \frac{9}{2}$.

Solución: $\alpha = 1$, $\beta = \frac{9}{2}$, $\gamma = -3$.

b)

Para $\beta = \gamma = 1$ tiene que ser compatible determinado el siguiente sistema:

$$A \cdot X = O \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha x + y + z = 0 \\ x + \alpha z = 0 \\ 1 + y + z = 0 \end{cases}.$$

Para que el sistema homogéneo resultante sea compatible determinado (solución trivial) es necesario que la matriz de coeficientes sea inversible, es decir: su determinante tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + \alpha - \alpha^2 - 1 = \alpha - \alpha^2 = \alpha(1 - \alpha) = 0 \Rightarrow \underline{a_1 = 0} \ ; \ ; \ \underline{a_2 = 1}.$$

$A \cdot X = O$ es compatible determinado tiene que ser

$$\underline{\underline{A \cdot X = O \text{ es compatible determinado } \forall a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}}}$$

c)

$$\text{Para } \alpha = -1, \beta = 1 \text{ y } \gamma = 0 \text{ es } A \cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 1 \\ -z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}, \text{cu-}$$

ya solución es: $x=0, y=1, z=0$.

2º) Dado el punto $P(1, 0, 1)$, el plano $\pi \equiv x + 5y - 6z = 1$, la recta $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, se pide:

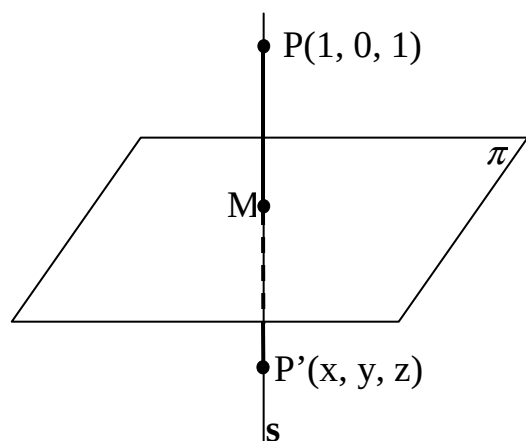
a) Calcular el punto P' simétrico de P respecto de π .

b) Hallar la distancia de P a r .

c) Calcular el volumen del tetraedro formado por el origen de coordenadas $O(0, 0, 0)$ y las intersecciones de π con los ejes coordenados OX, OY, OZ .

a)

El vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, 5, -6)$.



La recta s que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π tiene como vector director al vector normal del plano; su ecuación dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 5\lambda \\ z = 1 - 6\lambda \end{cases}.$$

El punto M , intersección del plano π con la recta s , tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo cual:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + 5y - 6z = 1 \\ s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 5\lambda \\ z = 1 - 6\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow (1 + \lambda) + 5(5\lambda) - 6(1 - 6\lambda) = 1 \;; \; 1 + \lambda + 25\lambda - 6 + 36\lambda = 1 \;;$$

$$62\lambda = 6 \;; \; 31\lambda = 3 \;; \; \lambda = \frac{3}{31} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{3}{31} = \frac{34}{31} \\ y = \frac{15}{31} \\ z = 1 - \frac{18}{31} = \frac{13}{31} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{34}{31}, \frac{15}{31}, \frac{13}{31}\right).$$

Para que P' sea el punto simétrico de P con respecto a π , tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP'} \Rightarrow M - P = P' - M \;; \; \left(\frac{34}{31}, \frac{15}{31}, \frac{13}{31}\right) - (1, 0, 1) = (x, y, z) - \left(\frac{34}{31}, \frac{15}{31}, \frac{13}{31}\right) \;;$$

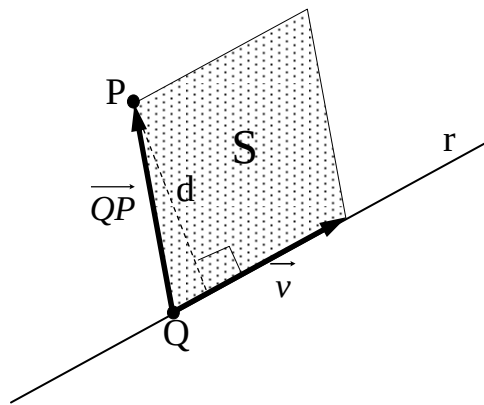
$$\left(\frac{3}{31}, \frac{15}{31}, -\frac{18}{31}\right) = \left(x - \frac{34}{31}, y - \frac{15}{31}, z - \frac{13}{31}\right) \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{34}{31} = \frac{3}{31} \rightarrow x = \frac{37}{31} \\ y - \frac{15}{31} = \frac{15}{31} \rightarrow y = \frac{30}{31} \\ z - \frac{13}{31} = -\frac{18}{31} \rightarrow z = -\frac{5}{31} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{P'\left(\frac{37}{31}, \frac{30}{31}, -\frac{5}{31}\right)}}.$$

b)

La distancia d del punto P a la recta r puede determinarse teniendo en cuenta que

$Q(0, 0, 1)$ es un punto de r y $\vec{v} = (0, 0, 1)$ es un vector director de la recta r .

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un gráfico aproximado de la situación.



Teniendo en cuenta que $S = d \cdot |\vec{v}|$ y que también puede ser $S = |\vec{v} \wedge \overrightarrow{QP}|$, se deduce que la distancia es: $d = \frac{|\vec{v} \wedge \overrightarrow{QP}|}{|\vec{v}|}$.

El vector $\overrightarrow{QP}$ en el caso que nos ocupa es:

$$\overrightarrow{QP} = P - Q = (1, 0, 1) - (0, 0, 1) = (1, 0, 0).$$

$$d(P, r) = \frac{|\vec{v} \wedge \overrightarrow{QP}|}{|\vec{v}|} = \frac{\left\| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{|j|}{\sqrt{1}} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1 \text{ unidad}}}.$$

c)

Los puntos de corte del plano $\pi \equiv x + 5y - 6z = 1$ con los ejes de coordenadas se obtienen igualando a cero las variables que no coincidan con el eje:

$$\text{Eje } X \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow x=1 \Rightarrow \underline{A(1, 0, 0)}.$$

$$\text{Eje } Y \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow 5y=1 ;; y=\frac{1}{5} \Rightarrow \underline{B(0, \frac{1}{5}, 0)}.$$

$$\text{Eje } Z \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow -6z=1 ;; z=-\frac{1}{6} \Rightarrow \underline{C(0, 0, -\frac{1}{6})}.$$

Los vectores que determinan el tetraedro son:

$$\overrightarrow{OA} = (1, 0, 0), \overrightarrow{OB} = (0, \frac{1}{5}, 0) \text{ y } \overrightarrow{OC} = (0, 0, -\frac{1}{6}).$$

El volumen de un tetraedro en función de los tres vectores que lo determinan es un sexto del producto mixto de estos vectores.

$$V = \frac{1}{6} \cdot (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{array} \right\| = \frac{1}{6} \cdot \left| -1 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \right| = \underline{\underline{\frac{1}{180} u^3}}$$

3º) a) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable. Sabiendo que el punto de abscisa $x = -2$ es un punto de inflexión de la gráfica de $f(x)$ y que la recta $y = 16x + 16$ es tangente a la gráfica de $f(x)$ en dicho punto, determinar $f(-2)$, $f'(-2)$ y $f''(-2)$.

b) Determinar el área de la región limitada por la gráfica de la función $g(x) = x^4 + 4x^3$ y el eje OX.

a)

Por tener un punto de inflexión para $x = -2$ tiene que ser $f''(-2) = 0$.

Siendo la recta $y = 16x + 16$, cuya pendiente es 16, tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -2$, tiene que cumplirse que $f'(-2) = 16$.

Por tener el punto de tangencia abscisa $x = -2$, y pertenecer a la función y a la tangente tiene que cumplirse que:

$$f(-2) = y(-2) = 16 \cdot (-2) + 16 = -32 + 16 = -16 \Rightarrow \underline{\underline{f(-2) = -16}}.$$

b)

La función $g(x) = x^4 + 4x^3$ puede expresarse de la forma $g(x) = x^3(x + 4)$.

Los únicos puntos de corte de $g(x)$ con el eje OX son O(0, 0) y A(-4, 0).

Teniendo en cuenta que $g(-1) = (-1)^4 + 4 \cdot (-1)^3 = 1 - 4 = -3 < 0$, lo que significa que todas las ordenadas de la superficie a calcular son negativas.

Teniendo en cuenta lo anterior, la superficie pedida es:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{-4} g(x) \cdot dx = \int_0^{-4} (x^4 + 4x^3) \cdot dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{4x^4}{4} \right]_0^{-4} = \left[\frac{x^5}{5} + x^4 \right]_0^{-4} = \left[\frac{(-4)^5}{5} + (-4)^4 \right] - 0 = \\ &= \frac{-1024}{5} + 256 = \frac{-1024 + 1280}{5} = \underline{\underline{\frac{256}{5} u^2 = S}}. \end{aligned}$$

4º) Calcular justificadamente:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2x-e^x+\operatorname{sen}(3x)}{x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x^2+2)(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)}$.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2x-e^x+\operatorname{sen}(3x)}{x^2} = \frac{1-0-e^0+0}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2-e^x+3 \cdot \cos(3x)}{2x} = \frac{-2-e^0+3 \cdot 1}{0} = \frac{-2-1+3}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x-9 \cdot \operatorname{sen}(3x)}{2} = \frac{-e^0-9 \cdot 0}{2} = \frac{-1}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(5x^2+2)(x-6)}{(x^2-1)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2+2}{x^2-1} \cdot \frac{x-6}{2x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+2}{x^2-1} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-6}{2x-1} = 5 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{5}{2}}}.$$

OPCIÓN B

1º) Dada la función $f(x) = \begin{cases} a + L(1-x), & \text{si } x < 0 \\ x^2 \cdot e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, (donde L denota logaritmo neperiano), se pide:

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Calcular el valor de α , para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

c) Estudiar la derivabilidad de f y calcular f' , donde sea posible.

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 \cdot e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \\ &= \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [a + L(1-x)] = a + L(1+\infty) = a + \infty = \underline{\underline{+\infty}}.$$

b)

La función $f(x)$ es continua en su dominio, que es $\mathbb{R}$, excepto para el valor $x = 0$, que debemos determinar el valor de α para que lo sea.

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} [a - L(1-x)] = a - 0 = \underline{a} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \cdot e^{-x}) = \underline{0} = f(0) \quad (*) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{a=0}}.$$

(*) Este límite se ha resuelto en el apartado a).

c)

$$\underline{\underline{f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{1-x}, & \text{si } x < 0 \\ x \cdot e^{-x}(2-x) \quad (**), & \text{si } x > 0 \end{cases}}}$$

(**) Siendo $g(x) = x^2 \cdot e^{-x}$, es $g'(x) = 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} = x \cdot e^{-x}(2-x)$.

Nótese que la función no es derivable para $x = 0$ por ser distintas sus derivadas por la izquierda y por la derecha:

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = \frac{-1}{1-0} = -1 \\ f'(0^+) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{f'(0^-) \neq f'(0^+)}.$$

$f(x)$ es derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

2º) Dado el plano $\pi \equiv 2x - y = 2$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y-2z=2 \end{cases}$, se pide:

- a) Estudiar la posición relativa de r y π .
- b) Determinar el plano que contiene a r y es perpendicular a π .
- c) Determinar la recta que pasa por $A(-2, 1, 0)$, corta a r , y es paralela a π .

a)

Las dos formas más usuales del estudio de la posición relativa de una recta y un plano son mediante sus ecuaciones implícitas o por sus vectores normal y director, respectivamente.

Por ecuaciones implícitas:

La recta r y el plano π determinan el sistema $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema de ecuaciones son las siguientes: $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Según los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

Rango M = Rango $M' = 3 \rightarrow$ Secantes. (un punto en común)

Rango $M = 2$; Rango $M' = 3 \rightarrow$ Paralelos. (ningún punto en común)

Rango M = Rango $M' = 2 \rightarrow$ Recta contenida en plano. (∞ puntos en común)

Los rangos de M y M' son los siguientes:

$$\text{Rango } M \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3.}$$

La recta r y el plano π son secantes.

Por vectores:

Un vector normal al plano π es $\vec{n} = (2, -1, 0)$.

Para determinar un vector director de r la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y-2z=2 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda \;; \; y=2+2\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=2+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{\vec{v}_r = (0, 2, 1)}.$$

Los vectores $\vec{n}$ y $\vec{v}_r$ no son paralelos (sus componentes no son proporcionales) ni tampoco son perpendiculares (su producto escalar es distinto de cero), lo cual implica que:

La recta r y el plano π son secantes.

b)

Existen diversas formas de resolver este apartado; una de ellas es la siguiente.

El punto de corte de r y π es la solución del sistema que forman:

$$\left. \begin{array}{l} 2x-y=2 \\ x=1 \\ y-2z=2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2-y=2 \;; \; \underline{y=0} \;; \; 0-2z=2 \;; \; \underline{z=-1} \Rightarrow \underline{P(1, 0, -1)}.$$

El plano β pedido tiene como vectores directores a $\vec{n}$ y $\vec{v}_r$ y contiene a P ; su expresión general es la siguiente:

$$\beta(P; \vec{n}, \vec{v}_r) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(x-1)+4(z+1)-2y=0 \;; \; -x+1+4z+4-2y=0.$$

$$\underline{\underline{\beta \equiv x+2y-4z-5=0}}$$

Otra forma:

El plano β pedido, por ser perpendicular a π tiene que tener un vector normal perpendicular a $\vec{n}=(2, -1, 0)$; por contener a r , el vector normal de β tiene que ser perpendicular a $\vec{v}_r=(0, 2, 1)$. Sabiendo que el producto vectorial de dos vectores es un vector perpendicular a los dos vectores que se multiplican, un vector director de β es cualquiera que sea linealmente dependiente del siguiente producto vectorial:

$$\vec{n} \wedge \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -i+4k-2j \Rightarrow \underline{\underline{\vec{n}_\beta = (1, 2, -4)}}.$$

La expresión general del plano pedido es de la forma $\beta \equiv x+2y-4z+D=0$.

Para determinar el valor de D tenemos en cuenta que el punto P(1, 0, -1) de corte del plano π y la recta r pertenece a β , por lo cual tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \beta \equiv x + 2y - 4z + D = 0 \\ P(1, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot (-1) + D = 0 \;; \; 1 + 0 + 4 + D = 0 \;; \; \underline{D = -5}.$$

$$\underline{\underline{\beta \equiv x + 2y - 4z - 5 = 0}}$$

c)

El plano ψ paralelo al plano π y que contiene al punto A(-2, 1, 0) es:

$$\left. \begin{array}{l} \psi \equiv 2x - y + Q = 0 \\ A(-2, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot (-2) - 1 + Q = 0 \;; \; -4 - 1 + Q = 0 \;; \; \underline{Q = 5} \Rightarrow \underline{\underline{\psi \equiv 2x - y + 5 = 0}}.$$

El punto H, intersección de r con ψ es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \psi \equiv 2x - y + 5 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 - (2 + 2\lambda) + 5 = 0 \;; \; 2 - 2 - 2\lambda + 5 = 0 \;; \; \underline{\lambda = \frac{5}{2}} \Rightarrow \underline{\underline{H\left(1, 7, \frac{5}{2}\right)}}.$$

La recta pedida s es la que pasa por los puntos A y H; su vector director es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{AH}$.

$$\overrightarrow{AH} = H - A = \left(1, 7, \frac{5}{2}\right) - (-2, 1, 0) = \left(3, 6, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \underline{\underline{\vec{v}_s = (6, 12, 5)}}.$$

$$\text{La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es: } s \equiv \underline{\underline{\begin{cases} x = -2 + 6\lambda \\ y = 1 + 12\lambda \\ z = 5\lambda \end{cases}}}.$$

3º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar el valor o valores de α para que la matriz A tenga inversa.

b) Calcular la matriz inversa A^{-1} de A, en el caso de $\alpha = 2$.

a)

Una matriz es inversible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{vmatrix} = 2 - 3a^2 + a^2 + 3 = 5 - 2a^2 = 0 \;; \; a^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \underline{a_1 = -\frac{\sqrt{10}}{2}} \;; \; \underline{a_2 = \frac{\sqrt{10}}{2}}.$$

$$\underline{\underline{A \text{ es inversible } \forall a \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2} \right\}}}.$$

b)

$$\text{Para } \alpha = 2 \text{ es } A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}; \; |A| = 5 - 2 \cdot 2^2 = 5 - 8 = -3 \text{ y } A^t = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Adj. de } A^t = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\underline{A^{-1} = \frac{\text{Adj. de } A^t}{|A|} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & 4 \\ -6 & 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 2 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}}}.$$

4º) Por la compra de cinco cuadernos, dos rotuladores y tres bolígrafos se han pagado 22 euros. Si se compran dos cuadernos, un rotulador y 6 bolígrafos, el coste es de 14 euros. Se pide:

a) Expresar, en función del precio de un bolígrafo, lo que costaría un cuaderno y lo que costaría un rotulador.

b) Calcular lo que deberíamos pagar si adquirimos 8 cuadernos y 3 rotuladores.

a)

Llamando x, y, z a los precios respectivos de un cuaderno, un rotulador y un bolígrafo, podemos establecer el sistema:
$$\left. \begin{array}{l} 5x + 2y + 3z = 22 \\ 2x + y + 6z = 14 \end{array} \right\}.$$

Parametrizando la variable z (precio de un bolígrafo), el sistema anterior puede expresarse de la forma:
$$\left. \begin{array}{l} 5x + 2y = 22 - 3z \\ 2x + y = 14 - 6z \end{array} \right\}.$$
 Resolviendo por reducción:

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 2y = 22 - 3z \\ -4x - 2y = -28 + 12z \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{x = -6 + 9z} ; ; \left. \begin{array}{l} -10x - 4y = -44 + 6z \\ 10x + 5y = 70 - 30z \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{y = 26 - 24z}$$

El precio de un cuaderno equivale a 9 bolígrafos menos 6 euros.

El precio de un rotulador equivale a 26 euros menos 24 bolígrafos.

b)

Expresando el valor a pagar en función de z (precio de un bolígrafo):

$$8(-6 + 9z) + 3(26 - 24z) = -48 + 72z + 78 - 72z = \underline{30}$$

Por la adquisición de 8 cuadernos y 3 rotuladores deberíamos pagar 30 euros.
