PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2013

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) Dados el punto P(-1, 0, 2) y las rectas $r \equiv \begin{cases} x-z=1 \\ y-z=-1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=3 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y s.

b) Determinar la ecuación de la recta t que pasa por P y corta a r y s.

c) Determinar la ecuación de la recta p perpendicular común a r y s.

----

a)

El estudio se va a hacer mediante el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas que determinan las dos rectas expresadas por ecuaciones implícitas.

La recta $s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=3 \end{cases}$ expresada en forma de dos ecuaciones implícitas es de la forma siguiente: $s \equiv x-1=y=\frac{z-3}{0} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x-y=1 \\ z=3 \end{cases}}$.

El sistema que forman las rectas r y s es $\begin{cases} x-z=1 \\ y-z=-1 \\ x-y=1 \\ z=3 \end{cases}$, cuyo estudio mediante el teorema de Rouché-Fröbenius se hace a continuación.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -1\\1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \;;\; M'=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\0 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

En función de los rangos de las matrices M y M', la posición relativa de las dos rectas es la siguiente:

Rango M = Rango M' = 2 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas coincidentes.

Rango M = 2 ;; Rango M' = 3 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas paralelas.

Rango M = Rango M' = 3 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas se cortan en un punto.

Rango M = 3 ;; Rango M' = 4 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

$$Rango\ \ M' \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_1\} \Rightarrow |M'| = \begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\0 & 1 & -1 & -1\\0 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\-1 & 1 & 0\\0 & 1 & 3\end{vmatrix} = 3+1-3 = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\underline{Rango\ \ M'=4}$

Vamos a determinar ahora el rango de M:

$$\{F_1 - F_2 = F_3\} \Rightarrow \{F_1,\ F_2,\ F_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M=3}$$

$$\underline{Rango\ M'=4\ ;;\ Rango\ \ M=3} \Rightarrow \underline{\underline{Las\ rectas\ \ r\ \ y\ \ s\ \ se\ \ cruzan}}$$

b)

El plano π_1 que contiene a la recta r y al punto P(-1, 0, 2) es el siguiente:

Un punto de la recta r es M(1, -1, 0). Los puntos M y P determinan el siguiente vector: $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{MP} = (1,\ -1,\ 0) - (-1,\ 0,\ 2) = (2,\ -1,\ -2)$.

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea perpendicular la los dos vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{u_1} = (1,\ 0,\ -1)$ y $\overrightarrow{u_2} = (0,\ 1,\ -1)$.

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = \begin{vmatrix}i & j & k\\1 & 0 & -1\\0 & 1 & -1\end{vmatrix} = k + i + j = i + j + k = \underline{(1,\ 1,\ 1) = \overrightarrow{v_r}}\ .$$

La expresión general del plano π_1 es la siguiente:

$$\pi_1(P,\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{m}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -2(x+1)+2y-(z-2)-2(z-2)+(x+1)+2y=$$

$$=-(x+1)+4y-3(z-2)=-x-1+4y-3z+6=0 \Rightarrow \underline{\pi_1 \equiv x-4y+3z-5=0}.$$

El plano π_2 que contiene a la recta s y al punto P(-1, 0, 2) es el siguiente:

Un punto y un vector de la recta r son N(1, 0, 3) y $\overrightarrow{v_s}=(1,\ 1,\ 0)$.

Los puntos N y P determinan el vector: $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{NP}=(1,\ 0,\ 3)-(-1,\ 0,\ 2)=(2,\ 0,\ 1)$.

La expresión general del plano π_2 es la siguiente:

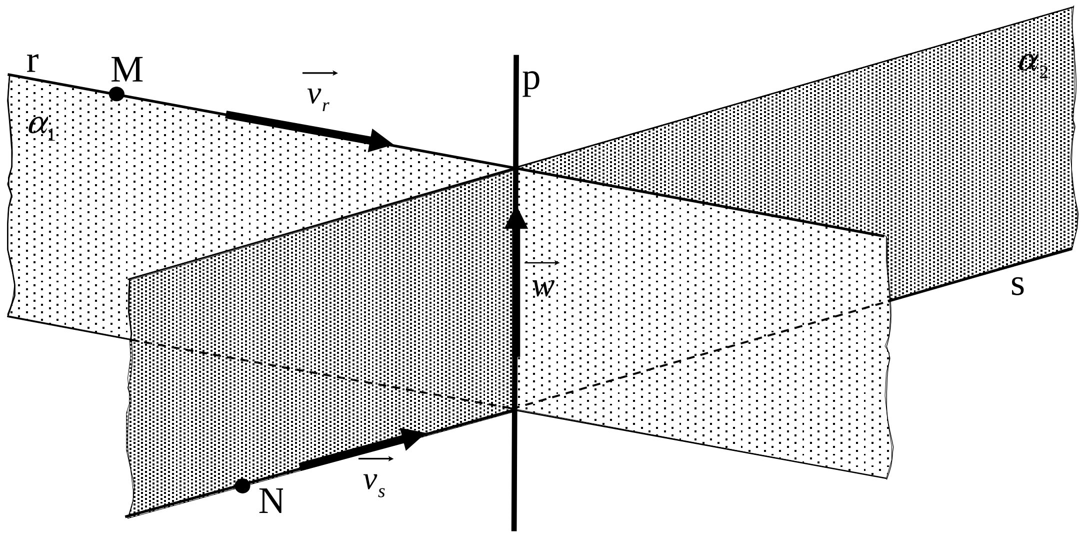
$$\pi_2(P,\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{n}) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ (x+1)-2(z-2)-y=x+1-2z+4-y=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\pi_2 \equiv x-y-2z+5=0}.$$

La recta t pedida es la intersección de los planos π_1 y π_2: $\underline{\underline{t \equiv \begin{cases} x-4y+3z-5=0 \\ x-y-2z+5=0 \end{cases}}}$.

c)

Para determinar la recta p, perpendicular común a las rectas dadas, nos guiamos por el siguiente gráfico.



Ya conocemos un punto y un vector director de cada una de las rectas r y s, que son, respectivamente, $M(1,\ -1,\ 0)$, $\overrightarrow{v_r}=(1,\ 1,\ 1)$ y $N(1,\ 0,\ 3)$ y $\overrightarrow{v_s}=(1,\ 1,\ 0)$.

Un vector $\overrightarrow{w}$, perpendicular a $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ es cualquiera que sea linealmente dependiente de su producto vectorial:

$$\overrightarrow{w'} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = j + k - k - i = -i + j \;\Rightarrow\; \underline{\overrightarrow{w} = (1,\ -1,\ 0)}.$$

Ahora determinamos los planos α_1 y α_2, de la forma siguiente:

$$\alpha_1\left(M;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;;;\; (y+1) - z - z + (x-1) = 0 \;;;\; y + 1 - 2z + x - 1 = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \underline{\alpha_1 \equiv x + y - 2z = 0}.$$

$$\alpha_2\left(N;\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;;;\; -(z-3) - (z-3) = 0 \;;;\; -2(z-3) = 0 \Rightarrow \underline{\alpha_2 \equiv z - 3 = 0}.$$

La recta pedida p, es la que determinan los planos α_1 y α_2 en su intersección, que es la siguiente: $\underline{\underline{p \equiv \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}}}$.

****

2º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{r} ax+7y+5z=0 \\ x+ay+z=3 \\ y+z=-2 \end{array}\right.$, se pide:

a) Discutirlo según los valores de α.

b) Resolverlo en el caso de α = 4.

c) Resolverlo en el caso de α = 2.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} \alpha & 7 & 5 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} \alpha & 7 & 5 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} \alpha & 7 & 5 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\alpha^2+5-\alpha-7=a^2-\alpha-2=0 \;;;\; a=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\Rightarrow \underline{\alpha_1=-1} \;;;\; \underline{\alpha_2=2}.$$

$$\underline{\underline{Para \; \left\{\begin{array}{l} a\neq -1 \\ a\neq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow Rango \; M = Rango \; M'=3=n^o \; incóg. \Rightarrow Compatible \; determinado}}$$

$$Para \; a=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1, \; C_3, \; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=2+3+10=$$

$$=15\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \; M'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para \; a=-1 \Rightarrow Rango \; M=2 \;;;\; Rango \; M'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

$$Para \; a=2 \; es \; M'=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1, \; C_3, \; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-4-6+10=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Rango \; M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para \; a=2 \Rightarrow Rango \; M = Rango \; M'=2<n^o \; incóg. \Rightarrow Compatible \; indeterminado}}$$

b)

Para α = 4 el sistema es $\begin{cases} 4x+7y+5z=0 \\ x+4y+z=3 \\ y+z=-2 \end{cases}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4^2-4-2}=\frac{15-14+40-21}{16-6}=\frac{20}{10}=\underline{\underline{2=x}}\,.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{10}=\frac{12-10+8}{10}=\frac{10}{10}=\underline{\underline{1=y}}\,.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{10}=\frac{-32-12+14}{10}=\frac{-30}{10}=\underline{\underline{-3=z}}\,.$$

c)

Para α = 2 el sistema es $\begin{cases} 2x+7y+5z=0 \\ x+2y+z=3 \\ y+z=-2 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Despreciando, por ejemplo, la primera ecuación y parametrizando z = λ:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y=3-\lambda \\ y=-2-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow\ x+2\cdot(-2-\lambda)=3-\lambda\ ;;\ x-4-2\lambda=3-\lambda\ ;;\ \underline{x=7+\lambda}\,.$$

$$\underline{\underline{Solución:\left\{\begin{array}{l} x=7+\lambda \\ y=-2-\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\},\ \forall\lambda\in R}}$$

****

3º) Dada la función $f(x)=\frac{x^3}{(x-3)^2}$, se pide:

a) Hallar las asíntotas de su gráfica.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.

----

a)

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x-3)^2}=\infty \Rightarrow$$ No tiene asíntotas horizontales.

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$(x-3)^2=0 \;;;\; x-3=0 \Rightarrow \underline{x=3}.$$

Las asíntotas oblicuas son de la forma y = mx + n, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x-3)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2-6x+9)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-6x^2+9x}=\underline{1=m}.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-6x+9}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+6x^2-9x}{x^2-6x+9}=\underline{6=n}.$$

La recta y = x + 6 es la asíntota oblicua de la función.

b)

La derivada de una función en un punto es el valor de la pendiente de su recta tangente en ese punto.

$$f'(x)=\frac{3x^2\cdot(x-3)^2-x^3\cdot 2\cdot(x-3)\cdot 1}{(x-3)^4}=\frac{3x^2\cdot(x-3)-2x^3}{(x-3)^3}=\frac{3x^3-9x^2-2x^3}{(x-3)^3}=\underline{\frac{x^3-9x^2}{(x-3)^3}}.$$

$$m=f'(2)=\frac{2^3-9\cdot 2^2}{(2-3)^3}=\frac{8-36}{-1}=\underline{28=m}.$$

El punto de tangencia es el siguiente:

$$f(2)=\frac{2^3}{(2-3)^2}=\frac{8}{1}=8 \Rightarrow \underline{P(2,\ 8)}.$$

Sabiendo que la ecuación de una recta conocida la tangente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, la tangente pedida es:

$$y - 8 = 28 \cdot (x - 2) = 28x - 56 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Recta tangente}: \ t \equiv 28x - y - 48 = 0}}$$

****

4º) Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x-3}{x^2+9} \cdot dx$. b) $\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3} \cdot dx$.

----

a)

$$\int \frac{x-3}{x^2+9} \cdot dx = \int \frac{x}{x^2+9} \cdot dx - 3 \cdot \int \frac{1}{x^2+9} \cdot dx = \underline{A - 3B}. \qquad (*)$$

$$A = \int \frac{x}{x^2+9} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2+9=t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{1}{t} \cdot dt = \frac{1}{2} L\, t = \underline{\frac{1}{2} L\left(x^2+9\right) = A}.$$

$$B = \int \frac{1}{x^2+9} \cdot dx = \int \frac{1}{9\left(\frac{x^2}{9}+1\right)} \cdot dx = \frac{1}{9}\int \frac{1}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{3}=t \\ dx = 3dt \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \int \frac{1}{t^2+1} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{t^2+1} \cdot dt = \frac{1}{3} \cdot arc\ tag\ t + C = \underline{\frac{1}{3} arc\ tag\ \frac{x}{3} + C = B}.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A y B, resulta:

$$\underline{\underline{\int \frac{x-3}{x^2+9} \cdot dx = \frac{1}{2} L\left(x^2+9\right) - arc\ tag\ \frac{x}{3} + C}}$$

b)

$$\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3} \cdot dx = \int_1^2 \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x} + x \right) \cdot dx = \int_1^2 \left(3x^{-3} - \frac{1}{x} + x \right) \cdot dx = \left[\frac{3x^{-2}}{-2} - L\, x + \frac{x^2}{2} \right]_1^2 =$$

$$= \left[-\frac{3}{2x^2} - L\, x + \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \left(-\frac{3}{2 \cdot 2^2} - L\, 2 + \frac{2^2}{2} \right) - \left(-\frac{3}{2 \cdot 1^2} - L\, 1 + \frac{1^2}{2} \right) = -\frac{3}{8} - L\, 2 + 2 + \frac{3}{2} + 0 - \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{3}{8} - L\, 2 + 3 = \underline{\underline{\frac{21}{8} - L\, 2}}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la función $f(x)=2\cos^2 x$, se pide:

a) Determinar los extremos absolutos de f(x) en $\left[\frac{-\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Determinar los puntos de inflexión de f(x) en $\left[\frac{-\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cdot dx$.

----

a)

$$f'(x)=\ 2\cdot 2\cdot \cos x\cdot(-sen\ x)=-4sen\ x\cdot \cos\ x=\underline{-2\ sen\ (2x)}.$$

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ -2sen\ (2x)=0\ ;;\ sen\ (2x)=0\Rightarrow x\in\left[\frac{-\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow \underline{x_1=\frac{-\pi}{2}}\ ;;\ \underline{x_2=0}\ ;;\ \underline{x_3=\frac{\pi}{2}}.$$

$$f''(x)=-2\cdot\cos(2x)\cdot 2=-4\cos\ (2x).$$

$$f''\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)=-2\cdot\cos(-\pi)=-2\cdot(-1)=2>0\ \Rightarrow\ \underline{Mínimo\ \ para\ \ x=-\frac{\pi}{2}}.$$

$$f\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)=2\cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Mínimo:\ \ A\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)}}.$$

$$f''(0)=-2\cdot\cos\ 0=-2\cdot 1=-2<0\ \Rightarrow\ \underline{Máximo\ \ para\ \ x=0}.$$

$$f(0)=2\cos^2 0=2\cdot 1=2\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Máximo:\ \ B(0,\ 2)}}.$$

$$f''\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=-2\cdot\cos\ \pi=-2\cdot(-1)=2>0\ \Rightarrow\ \underline{Mínimo\ \ para\ \ x=\frac{\pi}{2}}.$$

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Mínimo:\ \ C\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)}}.$$

(Este resultado del punto C era esperable por ser la función simétrica con respecto al eje de ordenadas).

b)

Una función tiene un punto de inflexión para los valores que anulan la segunda derivada y hacen distinta de cero la tercera derivada.

$$f''(x)=0 \Rightarrow -4\cos(2x)=0 \;;\; \cos(2x)=0 \Rightarrow x\in\left[\frac{-\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 2x=\pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x_1=\frac{-\pi}{4}} \;;\; \underline{x_3=\frac{\pi}{4}}.$$

$$f'''(x)=-4\cdot[-sen(2x)]\cdot 2=8\,sen\,(2x).$$

$$f'''\left(\pm\tfrac{\pi}{4}\right)=8\cdot sen\left(\pm\tfrac{\pi}{2}\right)\neq 0 \Rightarrow \underline{P.I.\ para\ x_1=\frac{-\pi}{4}\ y\ x_2=\frac{\pi}{4}}.$$

$$f\left(\pm\tfrac{\pi}{4}\right)=2\cos^2\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot\left(\frac{\pm\sqrt{2}}{2}\right)^2=1 \Rightarrow P.I. \Rightarrow \underline{\underline{D\left(-\frac{\pi}{4},\ 1\right)}}\ y\ \underline{\underline{E\left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)}}.$$

c)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cdot dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cdot\cos^2 x\cdot dx=2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot dx.$$

Teniendo en cuenta que $\int\cos^2 x\cdot dx$ es:

$$\int\cos^2 x\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} sen^2 x+\cos^2 x=1 \\ \cos^2 x-sen^2 x=\cos(2x) \\ \cos^2 x=\dfrac{1+\cos(2x)}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \int\frac{1+\cos(2x)}{2}\cdot dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos(2x)\cdot dx \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x=t \\ dx=\dfrac{1}{2}dt\end{array}\right\} \Rightarrow \int\cos^2 x\cdot dx=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\int\cos t\cdot dt=\dfrac{x}{2}+\dfrac{sen\,t}{2}+C=\underline{\dfrac{x}{2}+\dfrac{sen\,(2x)}{2}}+C$, el valor pedido es el siguiente:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cdot dx=2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot dx=\left[2\cdot\left(\frac{x}{2}+\frac{sen\,2x}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=[x+sen\,2x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\pi}{2}+sen\,\pi\right)-(0+sen\,0)=$$

$$=\frac{\pi}{2}+0-0-0=\underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.$$

****

2º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & \lambda & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, se pide:

a) Hallar el valor de λ para el cual la ecuación matricial X · A = B tiene solución única.

b) Calcular la matriz X para λ = 4.

c) Calcular el determinado de la matriz $A^2 \cdot B$ en función de λ.

----

a)

Por ser $X \cdot A = B$;; $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$;; $X \cdot I = B \cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{X = B \cdot A^{-1}}$, para que exista solución única tiene que existir A^{-1}, por lo cual tiene que ser $|A| \neq 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & \lambda & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix} = -1+2+\lambda = 1+\lambda = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = -1}.$$

$$\underline{\underline{La\ \ solución\ \ es\ \ única\ \ \forall x \in R - \{-1\}}}$$

b)

Para λ = 4 es $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$. Su inversa la hallamos por el método de Gauss-Jordan:

$$(A/I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \to -\tfrac{1}{3}F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}F_1 \to F_1 - 4F_2\\ F_3 \to F_3 + F_1\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to -\tfrac{3}{5}F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5}\end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}F_1 \to F_1 - \frac{8}{3}F_3\\ F_2 \to F_2 + \frac{2}{3}F_3\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5}\\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5}\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5}\\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}} = \underline{\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix}1 & 4 & 8\\ 1 & -1 & -2\\ -1 & 1 & -3\end{pmatrix}}.$$

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & 11 \\ 3 & 7 & 14 \end{pmatrix}}}.$$

c)

$$A^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 2\lambda & 2\lambda \\ 2 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 6\lambda & 1+3\lambda & 1-\lambda \\ \lambda-1 & 2 & 3-\lambda \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}}.$$

$$\left| A^2 \cdot B \right| = \begin{vmatrix} 6\lambda & 1+3\lambda & 1-\lambda \\ \lambda-1 & 2 & 3-\lambda \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8\lambda-2 & 5\lambda-1 & 1-\lambda \\ 3\lambda-7 & 2\lambda-4 & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 8\lambda-2 & 5\lambda-1 \\ 3\lambda-7 & 2\lambda-4 \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(16\lambda^2 - 32\lambda - 4\lambda + 8 - 15\lambda^2 + 3\lambda + 35\lambda - 7\right) = -\left(\lambda^2 + 2\lambda + 1\right) = \underline{\underline{-(\lambda+1)^2 = \left| A^2 \cdot B \right|}}.$$

****

3º) a) Hallar los puntos de corte de la recta de dirección $\vec{v}=(2,\ 1,\ 1)$ y que pasa por el punto P(4, 6, 2), con la superficie esférica de centro C(1, 2, -1) y radio $\sqrt{26}$.

b) Hallar la distancia del punto Q(-2, 1, 0) a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2}=y+2=\frac{x-3}{2}$.

----

a)

La recta de dirección $\vec{v}=(2,\ 1,\ 1)$ y que pasa por el punto P(4, 6, 2) tiene por expresión paramétrica: $\underline{r \equiv \begin{cases} x=4+2\lambda \\ y=6+\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases}}$.

La esfera ce centro C(1, 2, -1) y radio $\sqrt{26}$ tiene por expresión implícita:

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=\left(\sqrt{26}\right)^2$;; $x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2+2z+1=26$;;

$\underline{x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-20=0}$.

Los puntos de corte de la recta y la esfera son las soluciones del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} x=4+2\lambda \\ y=6+\lambda \\ z=2+\lambda \\ x^2+y^2+z^2-2x-4y+2z-20=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ (4+2\lambda)^2+(6+\lambda)^2+(2+\lambda)^2-2(4+2\lambda)-4(6+\lambda)+2(2+\lambda)-20=0$;;

$16+16\lambda+4\lambda^2+36+12\lambda+\lambda^2+4+4\lambda+\lambda^2-8-4\lambda-24-4\lambda+4+2\lambda-20=0$;;

$6\lambda^2+26\lambda+8=0$;; $3\lambda^2+13\lambda+4=0$;; $\lambda=\frac{-13\pm\sqrt{169-48}}{6}=\frac{-13\pm\sqrt{121}}{6}=\frac{-13\pm 11}{6} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lambda_1=-\frac{1}{3}} \\ \underline{\lambda_2=-4} \end{cases}$.

$$\lambda_1=-\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3} \\ y=6-\frac{1}{3}=\frac{17}{3} \\ z=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow\ \underline{\underline{Q_1\left(\frac{10}{3},\ \frac{17}{3},\ \frac{5}{3}\right)}}.$$

$$\lambda_2=-4 \Rightarrow \begin{cases} x=4-8=-4 \\ y=6-4=2 \\ z=2-4=-2 \end{cases} \Rightarrow\ \underline{\underline{Q_2(-4,\ 2,\ -2)}}.$$

b)

La distancia de un punto Q a una recta r viene dada por la siguiente fórmula: $d(Q,\ r)=\frac{\left|\overrightarrow{AQ}\wedge\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$, siendo A un punto de la recta r y $\overrightarrow{v}$ un vector director de la recta r.

Un punto de la recta r es A(1, -2, 3) y un vector director de r es $\overrightarrow{v}=(2,\ 1,\ 2)$.

$\overrightarrow{AQ}=Q-A=(-2,\ 1,\ 0)-(1,\ -2,\ 3)=\underline{(-3,\ 3,\ -3)}$.

$$d(Q,\ r)=\frac{\left|\overrightarrow{AQ}\wedge\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}=\frac{\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}\right\|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{|6i-6j-3k-6k+3i+6j|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{|9i-9k|}{\sqrt{9}}=\frac{|9i-9k|}{3}=$$

$$=|3i-3k|=\sqrt{3^2+(-3)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=\underline{\underline{3\sqrt{2}\ unidades=d(Q,\ r)}}.$$

****

4º) Dados el punto P(1, 0, -1), el plano $\pi \equiv 2x-y+z+1=0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} -2x+y-1=0 \\ 3x-z-3=0 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar la ecuación del plano β que pasa por P, es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π.

b) Hallar el ángulo entre r y π.

----

a)

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{u_1}=(-2,\ 1,\ 0)$ y $\overrightarrow{u_2}=(3,\ 0,\ -1)$.

$$\overrightarrow{v'_r}=\overrightarrow{u_1}\wedge\overrightarrow{u_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-i-3k-2j=-i-2j-3k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r}=(1,\ 2,\ 3)}.$$

Un vector normal del plano π es $\overrightarrow{n}=(2,\ -1,\ 1)$.

El plano pedido β es el que determinan el punto P y los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{n}$:

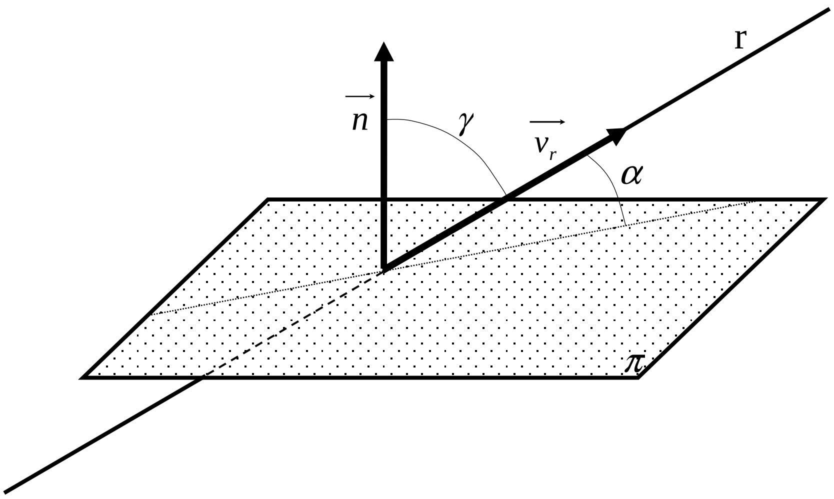
$$\beta(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{n}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0\ ;;\ 2(x-1)+6y-(z+1)-4(z+1)+3(x-1)-y=0\ ;;$$

$$5(x-1)+5y-5(z+1)=0\ ;;\ 5x-5+5y-5z-5=0\ ;;\ 5x+5y-5z-10=0.$$

$$\underline{\underline{\beta \equiv x+y-z-2=0}}$$

b)

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un esquema de la situación:



El ángulo α que forman el plano π y la recta r es el complementario del ángulo γ que forman el vector $\overrightarrow{v_r}$, director de r, y el vector $\overrightarrow{n}$, normal al plano π.

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n} = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \cos\gamma \;\Rightarrow\; \cos\gamma = \dfrac{\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|}$. Teniendo en cuenta que los ángulos α y β son complementarios, es:

$$sen\,\alpha = \frac{\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n}}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n}\right|} = \frac{(1,\ 2,\ 3) \cdot (2,\ -1,\ 1)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2} \cdot \sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{2-2+3}{\sqrt{1+4+9} \cdot \sqrt{4+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{84}} = \frac{3}{9'1652} = 0'3273 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\alpha = 19^{\circ}\ 6'\ 24''}}.$$

****