PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

SEPTIEMBRE – 2013

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) Dada la función $f(x)=\frac{4}{x-4}+\frac{27}{2x+2}$, se pide:

a) Hallar las asíntotas de su gráfica.

b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcular sus puntos de inflexión.

c) Esbozar la gráfica de la función.

----

a)

$$f(x)=\frac{4(2x+2)+27(x-4)}{(x-4)(2x+2)}=\frac{8x+8+27x-108}{2(x-4)(x+1)}=\frac{35x-100}{2(x^2-3x-4)}=\underline{\frac{5(7x-20)}{2(x^2-3x-4)}}.$$

Las asíntotas son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{5(7x-20)}{2(x-4)(x+1)}=0 \Rightarrow$$

<u>La recta y = 0 (eje X) es asíntota horizontal de la función.</u>

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$2(x-4)(x+1)=0 \Rightarrow$$

<u>Son asíntotas horizontales las rectas x = 4 y x = -1.</u>

Oblicuas: Para que una función tenga asíntotas oblicuas es condición necesaria que la función racional tenga un grado mayor el numerador que el denominador. Por otra parte, las asíntotas horizontales y oblicuas son incompatibles en una función.

<u>f(x) no tiene asíntotas oblicuas.</u>

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{5}{2}\cdot\frac{7\left(x^2-3x-4\right)-(7x-20)(2x-3)}{\left(x^2-3x-4\right)^2}=\frac{5}{2}\cdot\frac{7x^2-21x-28-\left(14x^2-21x-40x+60\right)}{\left(x^2-3x-4\right)^2}=$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\frac{7x^2-21x-28-\left(14x^2-61x+60\right)}{\left(x^2-3x-4\right)^2}=\underline{\frac{5}{2}\cdot\frac{-7x^2+40x-88}{\left(x^2-3x-4\right)^2}=f'(x)}$$

El denominador es positivo para cualquier valor real perteneciente al dominio de la función, que es: $\underline{D(f)\Rightarrow R-\{-1,\ 4\}}$, por lo tanto, para determinar el signo de la derivada tenemos que estudiar el numerador:

$$7x^2-40x+88=0\ ;;\ x=\frac{40\pm\sqrt{1600-2464}}{14}\ \Rightarrow\ \underline{x\notin R}\ \Rightarrow\ \underline{f'(x)<0,\ \forall x\in D(f)}.$$

<u>La función f(x) es monótona decreciente en su dominio.</u>

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{5}{2}\cdot\frac{(-14x+40)\left(x^2-3x-4\right)^2-\left(-7x^2+40x-88\right)\cdot 2\cdot\left(x^2-3x-4\right)(2x-3)}{\left(x^2-3x-4\right)^4}=$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\frac{(-14x+40)\left(x^2-3x-4\right)-2\left(-7x^2+40x-88\right)(2x-3)}{\left(x^2-3x-4\right)^3}=$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\frac{-14x^3+42x^2+56x+40x^2-120x-160-2\left(-14x^3+21x^2+80x^2-120x-176x+264\right)}{\left(x^2-3x-4\right)^3}=$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\frac{-14x^3+82x^2-64x-160-2\left(-14x^3+101x^2-296x+264\right)}{\left(x^2-3x-4\right)^3}=$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \frac{-14x^3 + 82x^2 - 64x - 160 + 28x^3 - 202x^2 + 592x - 528}{\left(x^2 - 3x - 4\right)^3} = \frac{5}{2} \cdot \frac{14x^3 - 120x^2 + 528x - 688}{\left(x^2 - 3x - 4\right)^3} =$$

$$= 5 \cdot \frac{7x^3 - 60x^2 + 264x - 344}{\left(x^2 - 3x - 4\right)^3} = f''(x).$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 5 \cdot \frac{7x^3 - 60x^2 + 264x - 344}{\left(x^2 - 3x - 4\right)^3} = 0 \;;;\; 7x^3 - 60x^2 + 264x - 344 = 0.$$

Resolviendo por Ruffini:

	7	-60	264	-344
2		14	-92	344
	7	-46	172	$\boxed{0}$

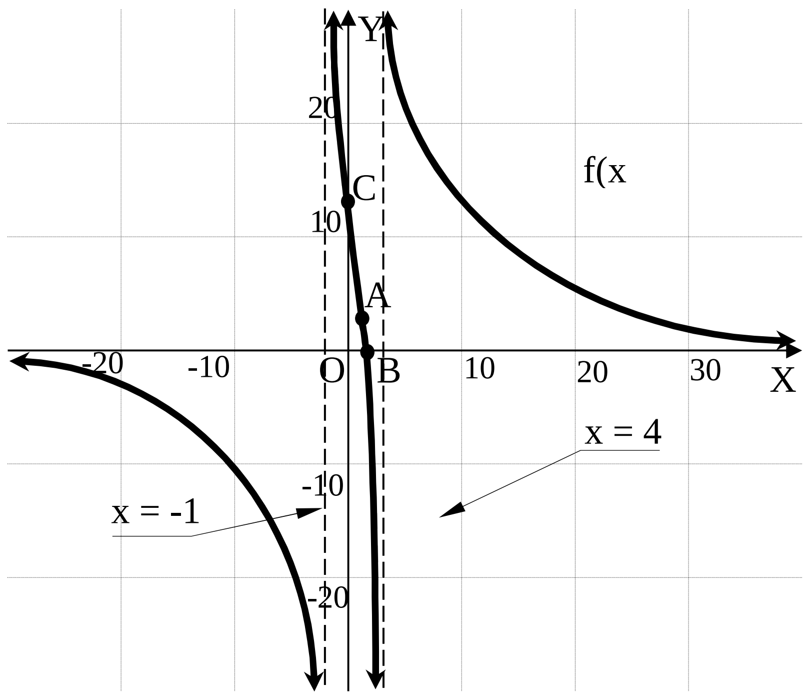
$$7x^2 - 46x + 172 = 0 \;;;\; x = \frac{46 \pm \sqrt{2116 - 4816}}{14} \Rightarrow \underline{x \notin R}.$$

La única solución real es para x = 2 $\Rightarrow$ Punto de inflexión para x = 2.

$$f(2) = \frac{4}{2-4} + \frac{27}{4+2} = -2 + \frac{27}{6} = -2 + \frac{9}{2} = \frac{-4+9}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow P.I. \Rightarrow A\left(2,\ \frac{5}{3}\right).$$

c)

Para facilitar la representación gráfica se obtienen los puntos de corte con los ejes, que son los siguientes:



Eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{5(7x - 20)}{2\left(x^2 - 3x - 4\right)} = 0 \;;;\; 7x - 20 = 0 \;;;\; x = \frac{20}{7} \cong 2'86 \Rightarrow B\left(0,\ \frac{20}{7}\right).$

Eje Y: $x=0 \Rightarrow f(x)=\frac{4}{0-4}+\frac{27}{0+2}=-1+\frac{27}{2}=\frac{-2+27}{2}=\frac{25}{2} \Rightarrow \underline{C\left(\frac{25}{2},\ 0\right)}$.

Con los datos obtenidos puede hacerse una representación gráfica aproximada de la función, que es la que aparece en la figura.

****

2º) Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & a & a\\ a & 1 & 1 & a\\ a & a & 1 & 1\\ a & a & a & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ w\end{pmatrix}$ y $O=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular el determinante de A. Determinar el rango de A según los valores de α.

b) Resolverlo el sistema homogéneo A · X = O en el caso de α = 1.

c) Resolver el sistema homogéneo A · X = O cuando α = -1.

----

a)

Restando la primera columna a todas las demás y desarrollando después por los menores adjuntos de la segunda columna:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & a & a\\ a & 1 & 1 & a\\ a & a & 1 & 1\\ a & a & a & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & a-1 & a-1\\ a & 1-a & 1-a & 0\\ a & 0 & 1-a & 1-a\\ a & 0 & 0 & 1-a\end{vmatrix}=(1-a)\cdot\begin{vmatrix}1 & a-1 & a-1\\ a & 1-a & 1-a\\ a & 0 & 1-a\end{vmatrix}.$$

Cambiando de signo la primera fila y sacando factores comunes de las dos últimas columnas:

$$|A|=-(1-a)\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1-a & 1-a\\ a & 1-a & 1-a\\ a & 0 & 1-a\end{vmatrix}=-(1-a)^3\cdot\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1\\ a & 1 & 1\\ a & 0 & 1\end{vmatrix}.$$ Desarrollando por Sarrus:

$$|A|=-(1-a)^3\cdot(-1+a-a-a)=-(1-a)^3\cdot(-1-a)=(1+a)(1-a)^3.$$

$$\underline{\underline{|A|=(1+a)(1-a)^3}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix}a\neq 1\\ a\neq -1\end{Bmatrix}\Rightarrow Rango\ \ A=4}}$$

$$\underline{Para\ \ a=1}\ es\ \ A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{\underline{Rango\ \ A=1}}.$$

$Para\ \ a=-1\ es\ \ A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\{F_3=-F_1\}\Rightarrow$ A efectos de rango, la matriz A es equivalente a la matriz: $A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$

$=-1-1-1-1+1-1=-4 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ A'=3}$.

$$\underline{\underline{Para\ \ a=-1 \Rightarrow\ Rango\ \ A=3}}$$

b)

Para α = 1 el sistema homogéneo A · X = O resulta: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y su solución es equivalente a las soluciones de la ecuación: $x+y+z+w=0$.

La ecuación $x+y+z+w=0$, además de admitir la solución trivial $\underline{\underline{x=y=z=w=0}}$, admite infinitas soluciones dependiendo de tres parámetros por ser 4 el número de incógnitas y uno el rango de la matriz.

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=\lambda \\ y=\mu \\ z=\rho \\ w=-\lambda-\mu-\rho \end{cases} ,\ \forall \lambda,\ \mu,\ \rho \in R}}$$

c)

Para α = -1 el sistema homogéneo A · X = O resulta: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Como sabemos por el apartado a): $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 3.

El sistema $\left.\begin{array}{r} x+y-z-w=0 \\ -x+y+z-w=0 \\ -x-y-z+w=0 \end{array}\right\}$, además de admitir la solución trivial $\underline{\underline{x=y=z=w=0}}$, admite infinitas soluciones dependiendo de un parámetro por ser 4 el número de incógnitas y tres el rango de la matriz

Haciendo, por ejemplo, $\underline{w=\lambda}$ y resolviendo por el método de Gauss sumando la primera fila a las demás:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=\lambda \\ -x+y+z=\lambda \\ -x-y-z=-\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y-z=\lambda \\ 2y=2\lambda \\ -2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=0}\ ;;\ \underline{y=\lambda}\ ;;\ \underline{x=0}.$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x = z = 0 \\ y = w = \lambda \end{cases}, \ \forall \lambda \in R}}$$

****

3º) Dados los puntos A(2, -2, 1), B(0, 1, -2), C(-2, 0, -4), D(2, -6, 2), se pide:

a) Probar que el cuadrilátero ABCD es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y hallar la distancia entre los dos lados paralelos.

b) Hallar el área del triángulo ABC.

----

a)

Considerando los vectores:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(0,\ 1,\ -2)-(2,\ -2,\ 1)=(-2,\ 3,\ -3).$$

$$\overrightarrow{BC}=C-B=(-2,\ 0,\ -4)-(0,\ 1,\ -2)=(-2,\ -1,\ -2).$$

$$\overrightarrow{CD}=D-C=(2,\ -6,\ 2)-(-2,\ 0,\ -4)=(4,\ -6,\ 6).$$

$$\overrightarrow{DA}=A-D=(2,\ -2,\ 1)-(2,\ -6,\ -2)=(0,\ 4,\ 3).$$

Los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{CD}$ son linealmente dependientes (por ser $\overrightarrow{CD}=-2\cdot\overrightarrow{AB}$) y linealmente independientes de los vectores $\overrightarrow{BC}\ y\ \overrightarrow{DA}$, que justifica lo que se nos preguntaba:

<u>El cuadrilátero ABCD es un trapecio por ser paralelos los lados AB y CD.</u>

La recta r que contiene a los puntos A y B expresada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r\equiv\begin{cases}x=2-2\lambda\\ y=-2+3\lambda\\ z=1-3\lambda\end{cases}$.

La distancia entre los lados paralelos es equivalente a la distancia de la recta r a cualquiera de los puntos de la recta que pasa por C y D. Considerando al punto C y sabiendo que la distancia del punto C a la recta r viene dada por la fórmula $d(C,\ r)=\frac{\left|\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$, siendo A un punto de r y $\overrightarrow{v_r}$ un vector director de la recta r.

Siendo $\overrightarrow{CA}=A-C=(2,-2,1)-(-2,\ 0,\ -4)=(4,\ -2,\ 5)$ y $\overrightarrow{v_r}=(-2,\ 3,\ -3)$:

$$d=d(C,\ r)=\frac{\left|\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix}i & j & k\\ 4 & -2 & 5\\ -2 & 3 & -3\end{matrix}\right\|}{\sqrt{(-2)^2+3^2+(-3)^2}}=\frac{|6i-10j+12k-4k-15i+12j|}{\sqrt{4+9+9}}=$$

$$=\frac{|-9i+2j+8k|}{\sqrt{22}}=\frac{\sqrt{(-9)^2+2^2+8^2}}{\sqrt{22}}=\frac{\sqrt{81+4+64}}{\sqrt{22}}=\frac{\sqrt{149}}{\sqrt{22}}=\underline{\underline{\sqrt{\frac{149}{22}}\ u=2'60\ u=d}}\ .$$

b)

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=(-2,\ 3,\ -3)\ \text{y}\ \overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}=C-A=(-2,\ 0,\ -4)-(2,\ -2,\ 1)=\underline{(-4,\ 2,\ -5)}.$$

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$. Debe saberse que el área del paralelogramo es igual que el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan, por lo tanto:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ -2 & 3 & -3 \\ -4 & 2 & -5 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot|-15i+12j-4k+12k+6i-10j|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot|-9i+2j+8k|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-9)^2+2^2+8^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{81+4+64}=\underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{149}\ u^2\cong 6'10\ u^2=S_{ABC}}}\ .$$

****

4º) Dados el punto P(1, 2, -1) y el plano $\pi \equiv x+2y-2z+2=0$, sea S la esfera que es tangente al plano π en un punto P' de modo que el segmento PP' es uno de sus diámetros. Se pide:

a) Hallar el punto de tangencia P'.   b) Hallar la ecuación de S.

----

a)

El vector normal del plano $\pi \equiv x+2y-2z+2=0$ es $\overrightarrow{n}=(1,\ 2,\ -2)$.

La recta s que contiene al diámetro de la esfera PP' tiene como vector director a $\overrightarrow{n}=(1,\ 2,\ -2)$ y contiene al punto P(1, 2, -1); su expresión dada por unas ecuaciones paramétricas es $s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=-1-2\lambda \end{cases}$.

El punto P' pedido es la intersección del plano π y la recta s:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+2y-2z+2=0 \\ s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=-1-2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (1+\lambda)+2(2+2\lambda)-2(-1-2\lambda)+2=0 \ ;;$$

$$1+\lambda+4+4\lambda+2+4\lambda+2=0 \ ;; \ 9\lambda+9=0 \ ;; \ \lambda+1=0 \ ;; \ \underline{\lambda=-1} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{P'(0,\ 0,\ 1)}}.$$

b)

El centro O' de la circunferencia es el punto medio de P(1, 2, -1) y P'(0, 0, 1), que es el punto de coordenadas la media aritmética de las coordenadas de los puntos P y P': O'(½, 1, 0).

El radio de la esfera es la distancia O'P:

$$r=\overline{O'P}=\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+(2-1)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+1+1}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\underline{\frac{3}{2}}.$$

La ecuación de la esfera es:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+(z-0)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2 \ ;; \ x^2-x+\frac{1}{4}+y^2-2y+1+z^2=\frac{9}{4} \ ;;$$

$$x^2+y^2+z^2-x-2y+1-2=0 \ \Rightarrow \ \underline{\underline{S \equiv x^2+y^2+z^2-x-2y-1=0}}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Sea r_A la recta con vector dirección $\overrightarrow{v_A}=(1,\ \lambda,\ 2)$ que pasa por el punto A(1, 2, 1), r_B la recta con vector dirección $\overrightarrow{v_B}=(1,\ 1,\ 1)$ que pasa por B(1, -2, 3), y r_C la recta con vector dirección $\overrightarrow{v_C}=(1,\ 1,\ -2)$ que pasa por C(4, 1, -3). Se pide:

a) Hallar λ para que las rectas r_A y r_B se corten.

b) Hallar λ para que la recta r_A sea paralela al plano definido por r_B y r_C.

c) Hallar el ángulo que forman r_B y r_C.

----

a)

La expresión de las rectas r_A y r_B dadas por ecuaciones continuas son las siguientes:

$$r_A \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{\lambda}=\frac{z-1}{2}\ ;;\ r_A \equiv \begin{cases}\lambda x-\lambda=y-2\\2x-2=z-1\end{cases}\ ;;\ \underline{r_A \equiv \begin{cases}\lambda x-y=\lambda-2\\2x-z=1\end{cases}}.$$

$$r_B \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{1}\ ;;\ r_B \equiv \begin{cases}x-1=y+2\\x-1=z-3\end{cases}\ ;;\ \underline{r_B \equiv \begin{cases}x-y=3\\x-z=-2\end{cases}}.$$

Para que las rectas r_A y r_B se cortes tiene que ser compatible determinado el sistema que forman, que es: $\left.\begin{array}{l}\lambda x-y=\lambda-2\\2x-z=1\\x-y=3\\x-z=-2\end{array}\right\}$.

Despreciando la ecuación del parámetro y resolviendo:

$$\left.\begin{array}{l}2x-z=1\\x-y=3\\x-z=-2\end{array}\right\}\begin{array}{l}\rightarrow z=2x-1\\ \\ \rightarrow z=x+2\end{array}\ \Rightarrow\ 2x-1=x+2\ ;;\ \underline{x=3}\ ;;\ \underline{y=0}\ ;;\ \underline{z=5}\ \Rightarrow\ \underline{P(3,\ 0,\ 5)}.$$

$$\lambda x-y=\lambda-2\ \Rightarrow\ 3\lambda-0=\lambda-2\ ;;\ 2\lambda=-2\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\lambda=-1}}.$$

b)

Las rectas r_B y r_C determinan el plano π, cuya ecuación general es la siguiente:

$$\pi\left(B;\ \overrightarrow{v_B},\ \overrightarrow{v_C}\right)\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y+2 & z-3\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & -2\end{vmatrix}=0\ ;;$$

$$-2(x-1)+(y+2)+(z-3)-(z-3)-(x-1)+2(y+2)=0\ ;;\ -3(x-1)+3(y+2)=0\ ;;$$

$$-3x+3+3y+6=0\ ;;\ -3x+3y+9=0\ ;;\ -x+y+3=0\ \Rightarrow\ \underline{\pi \equiv x-y-3=0}.$$

El vector normal del plano π es $\overrightarrow{n}=(1,\ -1,\ 0)$.

Para que el plano π sea paralelo a la recta r_A es necesario que el vector normal del plano y el vector director de la recta sean perpendiculares, es decir: que su producto escalar sea cero:

$$\overrightarrow{v_A}\cdot\overrightarrow{n}=0\ \Rightarrow\ (1,\ \lambda,\ 2)\cdot(1,\ -1,\ 0)=0\ ;;\ 1-\lambda+0=0\ \Rightarrow\ \underline{\lambda=1}.$$

<u>Para que la recta r_A sea paralela al plano definido por r_B y r_C tiene que ser λ = 1.</u>

c)

El ángulo que forman r_B y r_C es el menor ángulo que forman sus vectores directores. Aplicando el concepto de producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{v_B}\cdot\overrightarrow{v_C}=\left|\overrightarrow{v_B}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_C}\right|\cdot\cos\alpha\ \Rightarrow\ \cos\alpha=\frac{\overrightarrow{v_B}\cdot\overrightarrow{v_C}}{\left|\overrightarrow{v_B}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_C}\right|}=\frac{(1,\ 1,\ 1)\cdot(1,\ 1,\ -2)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=$$

$$=\frac{1+1-2}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{1+1+4}}=\frac{0}{\sqrt{18}}=0\ \Rightarrow\ \underline{\alpha=90^{\circ}}.$$

<u>Las rectas r_B y r_C son perpendiculares.</u>

****

2º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x + \lambda y + \lambda z = 1 - \lambda \\ x + y + (\lambda - 1)z = -2\lambda \\ (\lambda - 1)x + y + z = \lambda - 1 \end{cases}$, se pide:

a) Discutirlo según los valores del parámetro λ.

b) Resolverlo en el caso de λ = 1.

c) Resolverlo en el caso de λ = -1.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda - 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; y \; M' = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & \lambda & 1-\lambda \\ 1 & 1 & \lambda - 1 & -2\lambda \\ \lambda - 1 & 1 & 1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda - 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + \lambda + \lambda(\lambda-1)^2 - \lambda(\lambda-1) - 2(\lambda-1) - \lambda = 2 + (\lambda-1)[\lambda(\lambda-1) - \lambda - 2] =$$

$$= 2 + (\lambda-1)(\lambda^2 - \lambda - \lambda - 2) = 2 + (\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda - 2) = 2 + \lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda - \lambda^2 + 2\lambda + 2 =$$

$= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$. Resolviendo por Ruffini:

	1	-3	0	4
2		2	-21	-4
	1	-1	-2	$\boxed{0}$
2		2	2	
	1	1	$\boxed{0}$	
-1		-1		
	1	$\boxed{0}$		

Las raíces diferentes son $x_1 = -1 \; y \; x_2 = 2$.

$$Para \; \begin{Bmatrix} \lambda \neq -1 \\ \lambda \neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango \;\; M = Rango \;\; M' = 3 = n^o \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; \det er\min ado$$

$$Para \;\; \lambda = -1 \;\Rightarrow\; M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 = -F_1\} \Rightarrow \underline{Rango \;\; de \;\; M' = 2}.$$

$$Para\ \ \lambda=2\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1 & -4\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\{C_1=C_2=C_3\}\Rightarrow\ \underline{Rango\ \ de\ \ M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix}\lambda=-1\\ \lambda=2\end{Bmatrix}\Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=2<n^{o}\ \ incóg.\Rightarrow Compatible\ \ indeterminado}}$$

b)

Para λ = 1 el sistema es $\begin{cases}2x+y+z=0\\ x+y=-2\\ y+z=0\end{cases}$, que es compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r}2x+y+z=0\\ x+y=-2\\ y+z=0\end{array}\right\}\begin{array}{l}\\ \to x=-y-2\Rightarrow 2(-y-2)+y-y=0\ ;;\ -y-2=0\ ;;\ \underline{\underline{y=-2}}\ ;;\ \underline{\underline{x=0}}\ ;;\ \underline{\underline{z=2}}\,.\\ \to z=-y\end{array}$$

c)

Para λ = -1 el sistema es $\begin{cases}2x-y-z=2\\ x+y-2z=2\\ -2x+y+z=-2\end{cases}$, equivalente al sistema $\begin{cases}2x-y-z=2\\ x+y-2z=2\end{cases}$, que es compatible indeterminado. Haciendo $\underline{z=\lambda}$:

$$\left.\begin{array}{r}2x-y=2+\lambda\\ x+y=2+2\lambda\end{array}\right\}\ \ 3x=4+3\lambda\Rightarrow\ \underline{x=\frac{4}{3}+\lambda}\ ;;\ y=2+2\lambda-x=2+2\lambda-\frac{4}{3}-\lambda=\underline{\frac{2}{3}+\lambda=y}\,.$$

$$\underline{\underline{Solución:\begin{cases}x=\frac{4}{3}+\lambda\\ y=\frac{2}{3}+\lambda,\ \forall\lambda\in R\\ z=\lambda\end{cases}}}$$

****

3º) Dada la función $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$, se pide:

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en x = 0.

b) Calcular $I=\int_0^1 x\cdot f(x)\cdot dx$.

----

a)

El punto de tangencia es: $f(0)=\frac{0}{0+1}=0 \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)}$.

La pendiente de la tangente de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto:

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\underline{\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}}.$$

$$m=f'(0)=\frac{1-0}{(0+1)^2}=\frac{1}{1}=\underline{1}.$$

Sabiendo que la ecuación de una recta conocida la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-0)$, la recta tangente pedida es la siguiente:

$$Tangente:\ t\equiv y-0=1(x-0) \Rightarrow \underline{\underline{t\equiv y=x}}.$$

b)

El valor de la integral indefinida $A=\int x\cdot f(x)\cdot dx=\int x\cdot\frac{x}{x^2+1}\cdot dx=\int\frac{x^2}{x^2+1}\cdot dx$ es el siguiente:

$$A=\int\frac{x^2}{x^2+1}\cdot dx=\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\cdot dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)\cdot dx=\underline{x-arc\ tag\ x+C}.$$

Considerando el valor de A, el valor de la integral definida pedida es:

$$I=\int_0^1 x\cdot f(x)\cdot dx=[x-arc\ tag\ x]_0^1=(1-arc\ tag\ 1)-(0-arc\ tag\ 0)=1-\frac{\pi}{4}-0=\underline{\frac{4-\pi}{4}}.$$

$$\underline{\underline{I=\int_0^1 x\cdot f(x)\cdot dx=\frac{4-\pi}{4}}}$$

****

4º) Dada la función $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, se pide:

a) Calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y estudiar la existencia de $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

b) Esbozar la gráfica de $y=f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x) y sus asíntotas.

----

a)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)=\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{\infty}}=e^{0}=\underline{\underline{1}}\ .$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)=\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{-\infty}}=e^{-0}=\underline{\underline{1}}\ .$$

Para que una función tenga límite en un punto es condición necesaria que existan sus límites laterales en ese punto y que, además, sean iguales.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{0^-}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{\infty}}=\frac{1}{\infty}=\underline{\underline{0}} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{0^+}}=e^{\infty}=\underline{\underline{\infty}} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\lim_{x \to 0^-} f(x)\neq \lim_{x \to 0^+} f(x)}.$$

$$\underline{\underline{No\ \ existe\ \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}}}$$

b)

La función $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ está definida para cualquier valor real de x, excepto para el valor x = 0.

Teniendo en cuenta que: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\cdot e^{\frac{1}{x}}<0,\ \ \forall x\in D(f)$:

<u>La función f(x) es decreciente en su dominio.</u>

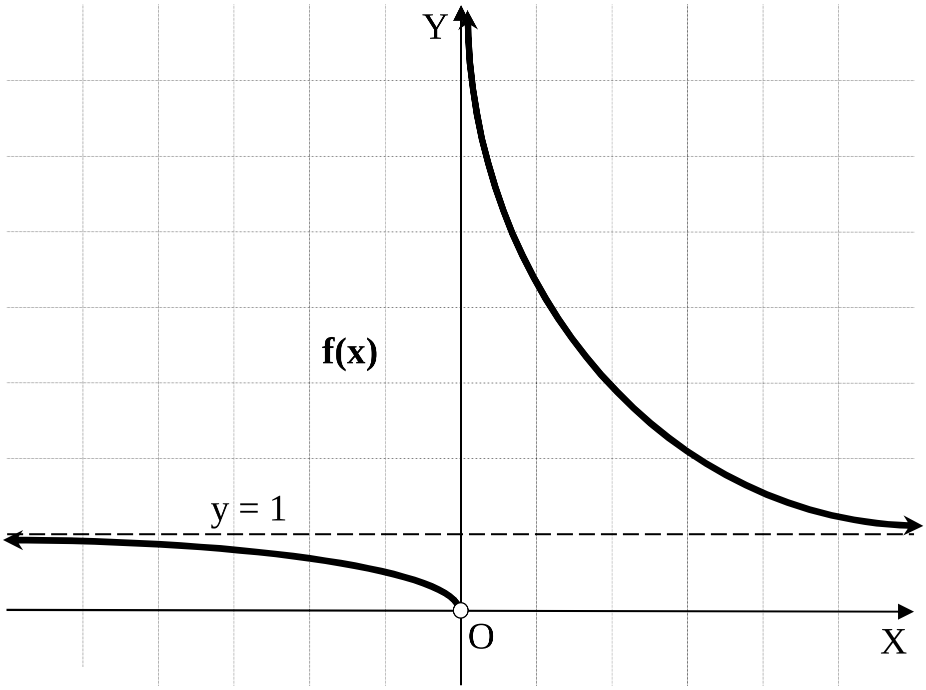
Del apartado a) se deduce que:

<u>Es asíntota horizontal la recta y = 1.</u>

Considerando que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{0^+}}=e^{\infty}=\infty$:

<u>La recta x = 0 (eje Y) es asíntota vertical de la función.</u>

Con los datos anteriores y teniendo en cuenta que el recorrido de $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ es $(0, +\infty)$, se puede esbozar la gráfica de f(x), que es, aproximadamente, la siguiente:



****