

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE MADRID****JUNIO – 2012**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, se pide:

- a) Hallar el rango de A en función de los valores de k.
 b) Para $k = 2$, hallar, si existe la solución del sistema $A \cdot X = B$.
 c) Para $k = 1$, hallar, si existe la solución del sistema $A \cdot X = C$.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} k & k & k^2 \\ 1 & -1 & k \\ 2k & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2k \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & -1 & k \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2k \cdot (-1 - k + k^2 + k^2 + k - 1) = 2k \cdot (2k^2 - 2) =$$

$$= 4k \cdot (k^2 - 1) = 0 \Rightarrow \underline{k_1 = 0} \;; \; \underline{k_2 = -1} \;; \; \underline{k_3 = 1}.$$

$$\text{Para } k_1 = 0 \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } A = 2}.$$

$$\text{Para } k_2 = -1 \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \{F_3 = 2F_1\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } A = 2}.$$

$$\text{Para } k_3 = 1 \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_3\} \Rightarrow \underline{\text{Rango } A = 2}.$$

$$\text{Para } \begin{cases} k \neq 0 \\ k \neq -1 \\ k \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } A = 3$$

$$\text{Para } \begin{cases} k = 0 \\ k = -1 \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } A = 2$$

b)

$$\text{Para } k = 2 \text{ es } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y la ecuación resulta: } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \text{ que es}$$

$$\text{equivalente al sistema: } \begin{cases} 2x + 2y + 4z = 12 \\ x - y + 2z = 8 \\ 4x - 2y + 2z = 6 \end{cases}; \text{ simplificando: } \begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ x - y + 2z = 8 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta que para $k = 2$ es $\text{Rango } A = 3$, podemos resolver el sistema mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-6 - 16 + 6 + 6 + 12 - 8}{-1 - 2 + 4 + 4 + 2 - 1} = \frac{-6}{6} = \underline{\underline{-1 = x}}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{8 + 6 + 24 - 32 - 6 - 6}{6} = \frac{-6}{6} = \underline{\underline{-1 = y}}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-3 - 6 + 16 + 12 + 8 - 3}{6} = \frac{24}{6} = \underline{\underline{4 = z}}$$

c)

Para $k = 1$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ y la ecuación resulta: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, que es equivalente al sistema:
$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 4 \\ x - y + z = 3 \\ 2x - 2y + 2z = 3 \end{array} \right\}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es 2 (se vio en el apartado a); la matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, cuyo rango es el siguiente:

$$\text{Rango } A' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 8 + 6 + 8 + 6 - 3 = 6 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } A' = 3}.$$

Por ser $\text{Rango } A \neq \text{Rango } A'$, el sistema es incompatible.

Para $k = 1$ el sistema $A \cdot X = C$ es incompatible.

2º) Dados los puntos $P_1(1, 3, -1)$, $P_2(a, 2, 0)$, $P_3(1, 5, 4)$ y $P_4(2, 0, 2)$, se pide:

a) Hallar el valor de α para que los cuatro puntos estén en el mismo plano.

b) Hallar los valores de α para que el tetraedro con vértices P_1 , P_2 , P_3 y P_4 tenga de volumen 7.

c) Hallar la ecuación de plano cuyos puntos equidistan de los puntos P_1 y P_3 .

a)

Existen diversas formas de resolver este apartado; una de ellas es la siguiente:

Los puntos P_1 , P_2 , P_3 y P_4 determinan los siguientes vectores:

$$\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = (a, 2, 0) - (1, 3, -1) = (a-1, -1, 1).$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = (1, 5, 4) - (1, 3, -1) = (0, 2, 5).$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{P_1P_4} = (2, 0, 2) - (1, 3, -1) = (1, -3, 3).$$

Para que los puntos P_1 , P_2 , P_3 y P_4 sean coplanarios es necesario que los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ sean linealmente dependientes, o sea, que su rango sea dos, para lo cual el determinante que determinan tiene que ser cero:

$$\text{Rango } \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad 6(a-1) - 5 - 2 + 15(a-1) = 0 \quad ; ; \quad 21(a-1) - 7 = 0 \quad ; ;$$

$$3(a-1) - 1 = 0 \quad ; ; \quad 3a - 3 - 1 = 0 \quad ; ; \quad 3a = 4 \Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{4}{3}}}.$$

b)

El tetraedro con vértices P_1 , P_2 , P_3 y P_4 tiene por volumen un sexto del valor absoluto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan:

$$V_{P_1P_2P_3P_4} = \frac{1}{6} \cdot \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} a-1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 7 \quad ; ; \quad \frac{7 \cdot |3a-4|}{6} = 7 \quad ; ; \quad |3a-4| = 6 \quad ; ; \quad 3a_1 - 4 = 6 \quad ; ;$$

$$3a_1 = 10 \quad ; ; \quad \underline{\underline{a_1 = \frac{10}{3}}} \quad ; ; \quad -3a_2 + 4 = 6 \quad ; ; \quad 3a_2 = -2 \quad ; ; \quad \underline{\underline{a_2 = -\frac{2}{3}}}.$$

c)

Los puntos P_1 y P_3 determinan el vector $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = (0, 2, 5)$.

El punto medio de los puntos P_1 y P_3 es $M(1, 4, \frac{3}{2})$.

El plano π pedido es el que tiene como vector normal a $\vec{v} = (0, 2, 5)$ y contiene al punto M. El haz de planos paralelos a π tiene por expresión $\gamma \equiv 2y + 5z + D = 0$ y el que contiene al punto M es el que satisface su ecuación:

$$0 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 5 \cdot \frac{3}{2} + D = 0 \quad ; ; \quad 8 + \frac{15}{2} + D = 0 \quad ; ; \quad \underline{\underline{D = -\frac{31}{2}}}.$$

$$\pi \equiv 2y + 5z - \frac{31}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\pi \equiv 4y + 10z - 31 = 0}}.$$

3º) Hallar α , b y c de modo que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ alcance en $x = 1$ un máximo relativo de valor 2, y que tenga en $x = 3$ un punto de inflexión.

Por tener un máximo relativo en $P(1, 2)$ tiene que ser $f(1) = 2$:

$$f(1) = 2 \Rightarrow 1 + a + b + c = 2 \;; \; \underline{a + b + c = 1}. \quad (1)$$

Por tener un máximo relativo para $x = 1$, la derivada de la función tiene que anularse para este valor:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0 \;; \; \underline{2a + b = -3}. \quad (2)$$

Si la función tiene un punto de inflexión para $x = 3$ tiene que ser $f''(3) = 0$:

$$f''(x) = 6x + 2a \Rightarrow f''(3) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 3 + 2a = 0 \;; \; 18 + 2a = 0 \;; \; 9 + a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a = -9}}.$$

Sustituyendo en (2): $2 \cdot (-9) + b = -3 \;; \; -18 + b = -3 \Rightarrow \underline{\underline{b = 15}}.$

Sustituyendo los valores encontrados en (1): $-9 + 15 + c = 1 \Rightarrow \underline{\underline{c = -5}}.$

La función resulta ser $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5$.

4º) Calcular razonadamente las siguientes integrales definidas:

$$a) \int_0^{\pi} e^{2x} \cdot \cos x \cdot dx.$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos^2 2x} \cdot dx.$$

a)

$$\int_0^{\pi} e^{2x} \cdot \cos x \cdot dx.$$

La resolución de la integral indefinida $I = \int e^{2x} \cdot \cos x \cdot dx$ es la siguiente:

$$\begin{aligned} I &= \int e^{2x} \cdot \cos x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x} \rightarrow du = 2 \cdot e^{2x} \cdot dx \\ dv = \cos x \cdot dx \rightarrow v = \operatorname{sen} x \end{array} \right\} \Rightarrow I = e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \cdot 2 \cdot e^{2x} \cdot dx = \\ &= e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x - 2 \cdot \int e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx = \underline{e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x - 2I_1 = I}. \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u = e^{2x} \rightarrow du = 2 \cdot e^{2x} \cdot dx \\ dv = \operatorname{sen} x \cdot dx \rightarrow v = -\cos x \end{array} \right\} \Rightarrow I_1 = -e^{2x} \cdot \cos x + \int \cos x \cdot 2 \cdot e^{2x} dx = \\ &= -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \cdot \int e^{2x} \cdot \cos x \cdot dx = \underline{-e^{2x} \cdot \cos x + 2I = I_1}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (1) el valor de I_1 :

$$I = e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x - 2 \cdot (-e^{2x} \cdot \cos x + 2I) = e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x + 2e^{2x} \cdot \cos x - 4I \;;$$

$$5I = e^{2x} \cdot \operatorname{sen} x + 2e^{2x} \cdot \cos x + K = e^{2x} (\operatorname{sen} x + 2 \cos x) + K \Rightarrow \underline{I = \frac{1}{5} e^{2x} (\operatorname{sen} x + 2 \cos x) + K}.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, la integral definida pedida es la siguiente:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^{2x} \cdot \cos x \cdot dx &= \left[\frac{1}{5} e^{2x} (\operatorname{sen} x + 2 \cos x) \right]_0^{\pi} = \frac{1}{5} e^{2\pi} (\operatorname{sen} \pi + 2 \cos \pi) - \frac{1}{5} e^0 (\operatorname{sen} 0 + 2 \cos 0) = \\ &= \frac{1}{5} e^{2\pi} (0 - 2) - \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot (0 + 2 \cdot 1) = -\frac{2}{5} e^{2\pi} - \frac{2}{5} = -\frac{2}{5} (e^{2\pi} + 1). \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\int_0^{\pi} e^{2x} \cdot \cos x \cdot dx = -\frac{2}{5} (e^{2\pi} + 1)}}$$

b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 2x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos 2x = t \\ -2 \sin 2x \cdot dx = dt \\ \sin x \cdot dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = -1 \\ x = 0 \rightarrow t = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} \int_1^{-1} \frac{1}{1+t^2} \cdot dt =$$

$$= -\frac{1}{2} [\operatorname{arc\,tag} t]_1^{-1} = -\frac{1}{2} [\operatorname{arc\,tag} (-1) - \operatorname{arc\,tag} 1] = -\frac{1}{2} \left[\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right] = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\underline{\underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 2x} \cdot dx = -\frac{\pi}{4}}}$$

OPCIÓN B

1º) Dadas las funciones $f(x) = \frac{3x+L(x+1)}{\sqrt{x^2-3}}$, $g(x) = (Lx)^x$ y $h(x) = \text{sen}(\pi - x)$, se pide:

a) Hallar el dominio de $f(x)$ y el $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Calcular $g'(e)$.

c) Calcular, en el intervalo $(0, 2\pi)$, las coordenadas de los puntos de corte con el eje de abscisas y las coordenadas de los extremos relativos de $h(x)$.

a)

Los dominios del numerador y denominador son, respectivamente, $(-1, +\infty)$ y $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, por lo cual: $D(f) \Rightarrow (\sqrt{3}, +\infty)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+L(x+1)}{\sqrt{x^2-3}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3+\frac{1}{x+1}}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+3+1}{\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x+4)\sqrt{x^2-3}}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x+4)\sqrt{x^2-3}}{\frac{x(x+1)}{x \cdot x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(3+\frac{4}{x}\right)\sqrt{\frac{x^2-3}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(3+\frac{4}{x}\right)\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{(3+0) \cdot \sqrt{1+0}}{1+0} = \frac{3 \cdot 1}{1} = 3. \end{aligned}$$

b)

$g(x) = (Lx)^x$. Tomando logaritmo neperiano en los dos términos: $Lg(x) = x \cdot L(Lx)$.

Derivando ahora: $\frac{g'(x)}{g(x)} = 1 \cdot L(Lx) + x \cdot \frac{\frac{1}{Lx}}{Lx} = L(Lx) + \frac{1}{Lx}$;; $g'(x) = (Lx)^x \cdot \left[L(Lx) + \frac{1}{Lx} \right]$.

$$g'(e) = (Le)^e \cdot \left[L(Le) + \frac{1}{Le} \right] = 1^e \cdot \left(L1 + \frac{1}{1} \right) = 1 \cdot (0+1) = \underline{\underline{1 = g'(e)}}$$

c)

Teniendo en cuenta que la función $h(x) = \operatorname{sen}(\pi - x)$ es igual que $h(x) = \operatorname{sen} x$, el único punto de corte con el eje de abscisas en el intervalo $(0, 2\pi)$ es $P(\pi, 0)$.

Los extremos relativos en el intervalo $(0, 2\pi)$ son los puntos que anulan la derivada de la función:

$$h'(x) = -\cos(\pi - x) = \cos x. \quad h'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} \text{ y } x_2 = \frac{3\pi}{2}.$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1 \quad ; \quad h\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\pi - \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Los máximos y mínimos relativos son: $M\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ y $N\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$.

2º) Dadas las rectas $r_1 \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z}{2}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 \end{cases}$, se pide:

a) Estudiar su posición relativa.

b) Hallar la mínima distancia de r_1 a r_2 .

a)

Vamos a estudiar la posición relativa de las rectas por sus vectores directores.

Los vectores directores respectivos son $\vec{v}_1 = (3, -5, 2)$ y $\vec{v}_2 = (-1, 1, 0)$, que son linealmente dependientes, por lo tanto, las rectas r_1 y r_2 se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso determinamos el vector $\vec{w}$ de origen el punto A(2, 1, 0) de r_1 y de extremo el punto B(-1, 3, 5) de r_2 : $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 3, 5) - (2, 1, 0) = (-3, 2, 5)$.

Según que el rango de los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}\}$ sea dos o tres, las rectas r_1 y r_2 se cortan o se cruzan, respectivamente.

$$\text{Rango } \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 4 + 6 - 25 = 21 - 29 = -8 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\text{Rango } \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w}\} = 3.}$$

Las rectas r_1 y r_2 se cruzan.

b)

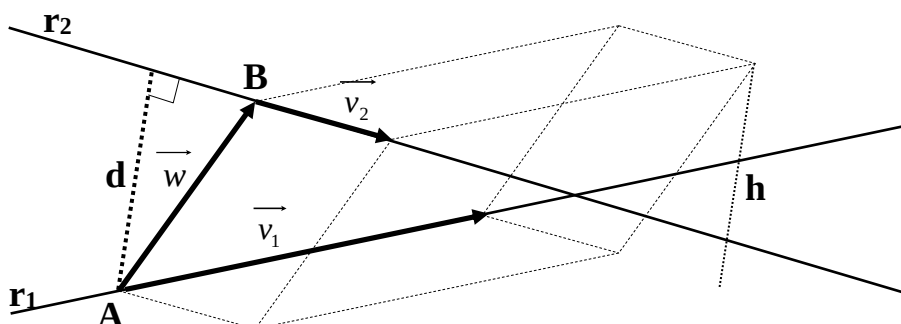
Del apartado anterior conocemos un punto y un vector de cada una de las rectas:

De la recta r_1 : A(2, 1, 0) y $\vec{v}_1 = (3, -5, 2)$.

De la recta r_2 : B(-1, 3, 5) y $\vec{v}_2 = (-1, 1, 0)$.

También conocemos el vector $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = (-3, 2, 5)$.

Para una mejor comprensión, hacemos un esquema de la situación.



El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observemos que la altura h es igual a la distancia pedida d entre ambas rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{w}) = |\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2| \cdot h = |\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2| \cdot d \Rightarrow d = \frac{|\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{w})|}{|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2|}.$$

$$d(r_1, r_2) = \frac{|\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \wedge \vec{w})|}{|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2|} = \frac{|-8|}{\left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right|} = \frac{8}{|-2j + 3k - 5k - 2i|} = \frac{8}{|-2i - 2j - 2k|} =$$

$$= \frac{8}{2 \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ unidades}}} = d(r_1, r_2).$$

3º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Estudiar el rango de la matriz B en función de α .

b) Para $\alpha = 0$, calcular la matriz X que verifica que $A \cdot X = B$.

a) $\text{Rango } B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2-a & 3+a & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ -----

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -7 \\ 3 & 2-a & 3+a \end{vmatrix} = -12(3+a) - 2(2-a) + 21 + 9 + 28(2-a) - 2(3+a) =$$

$$= -14(3+a) + 26(2-a) + 30 = -42 - 14a + 52 - 26a + 30 = -40a + 40 = 0 \Rightarrow \underline{a=1}.$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & -8 \\ 3 & 2-a & 3 \end{vmatrix} = -36 + 4(2-a) + 24 - 18 + 32(2-a) - 6 = -36 + 36(2-a) =$$

$$= -36 + 72 - 36a = 36 - 36a = 0 \Rightarrow \underline{a=1}.$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -2 & -7 & -8 \\ 3 & 3+a & 3 \end{vmatrix} = -84 + 4(3+a) - 24 - 42 + 32(3+a) + 6 = 36(3+a) - 144 =$$

$$= 108 + 36a - 144 = -36 + 36a = 0 \Rightarrow \underline{a=1}.$$

$$\Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -3 & -7 & -8 \\ 2-a & 3+a & 3 \end{vmatrix} = 21 + 6(3+a) - 8(2-a) - 14(2-a) - 8(3+a) + 9 =$$

$$= 30 - 2(3+a) - 22(2-a) = 30 - 6 - 2a - 44 + 22a = -20 + 20a = 0 \Rightarrow \underline{a=1}.$$

Para $\alpha = 1$ el rango de B es dos y para $\alpha \neq 1$ el rango de B es tres.

b)

$$\text{Para } \alpha = 0 \text{ es } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$A \cdot X = B$; multiplicando por la izquierda los dos términos por A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B ; ; I \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot B}.$$

Para hallar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ procedemos por el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} (A/I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{F_2 \rightarrow F_2 + 2F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 + F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_3 \rightarrow \frac{1}{4}F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 - F_3 \\ F_2 \rightarrow F_2 - 2F_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X = A^{-1} \cdot B &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -7 & -8 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} & \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1 & -\frac{1}{4} + \frac{7}{4} + \frac{3}{2} & \frac{1}{2} + 2 + \frac{3}{2} \\ 2 + 1 - 3 & -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 & \frac{1}{2} + \frac{7}{2} - 3 & -1 + 4 - 3 \\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} & -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 1 & \frac{1}{4} - \frac{7}{4} + \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} - 2 + \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = X}}. \end{aligned}$$

4º) Calcular el valor del determinante $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$

Restando a cada fila la última: $\begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{(x-1)(y-1)(z-1)}}.$
