PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

SEPTIEMBRE – 2012

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) Dadas la función $f(x)=\begin{cases} 3x+A & si\ \ x\le 3 \\ -4+10x-x^2 & si\ \ x>3 \end{cases}$, se pide:

a) Hallar el valor de A para que f(x) sea continua. ¿Es derivable para ese valor de A?

b) Hallar los puntos en los que f’(x) = 0.

c) Hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de f(x) en el intervalo [4, 8].

---

a)

La función f(x) es continua en R, excepto para x = 3, cuya continuidad vamos a conseguir hallando el correspondiente valor de A.

Para que la función sea continua para x = 3 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para\ \ x=3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(3x+A)=f(3)=\underline{9+A} \\ \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\left(-4+10x-x^2\right)=-4+30-9=\underline{17} \end{array} \right\} \Rightarrow 9+A=17\ ;;\ \underline{\underline{A=8}}.$$

Para que una función sea derivable en un punto es necesario que sus derivadas laterales en ese punto sean iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} 3 & si\ \ x\le 3 \\ 10-2x & si\ \ x>3 \end{cases} \Rightarrow\ f'(x)=\begin{cases} 3 & si\ \ x\le 3 \\ 10-2\cdot 3=4 & si\ \ x>3 \end{cases} \Rightarrow\ \underline{f'(3^-)\neq f'(3^+)}.$$

La función no es derivable para x = 3.

b)

$$f'(x)=\begin{cases} 3 & si\ \ x\le 3 \\ 10-2x & si\ \ x>3 \end{cases} \Rightarrow\ f'(x)=0 \Rightarrow 10-2x=0\ ;;\ 5-x=0 \Rightarrow \underline{x=5}.$$

Para x = 5 la derivada de la función es f'(x) = 0.

c)

$$f(5)=-4+10\cdot 5-5^2=-4+50-25=50-29=21.$$

Por ser la parábola $y=-4+10x-x^2$ cóncava $(\cap)$ tiene un máximo relativo en el punto P(5, 21).

Teniendo en cuenta que: $\left.\begin{array}{l} f(4)=-4+10\cdot 4-4^2=-4+40-16=40-20=20 \\ f(8)=-4+10\cdot 8-8^2=-4+80-64=80-68=12 \end{array}\right\}$, los puntos máximo y mínimo absolutos en el intervalo [4, 8] son los siguientes:

Máximo absoluto P(5, 21) y mínimo absoluto Q(8, 12).

****

2º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 3x+ay+4z=6 \\ x+(a+1)y+z=3 \\ (a-1)x-ay-3z=-3 \end{cases}$, se pide:

a) Discutir el sistema según los valores de α.

b) Resolverlo para α = -1.

---

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & a & 4 \\ 1 & a+1 & 1 \\ a-1 & -a & -3 \end{pmatrix} \; y \; A'=\begin{pmatrix} 3 & a & 4 & 6 \\ 1 & a+1 & 1 & 3 \\ a-1 & -a & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función del parámetro α es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & a & 4 \\ 1 & a+1 & 1 \\ a-1 & -a & -3 \end{vmatrix}=-9(a+1)-4a+a(a-1)-4(a+1)(a-1)+3a+3a=$$

$$=-9a-9+2a+a^2-a-4(a^2-1)=a^2-8a-9-4a^2+4=-3a^2-8a-5=0 \;;;\; 3a^2+8a+5=0 \;;;$$

$$a=\frac{-8\pm\sqrt{64-60}}{6}=\frac{-8\pm\sqrt{4}}{6}=\frac{-8\pm 2}{6}=\frac{-4\pm 1}{3} \Rightarrow \underline{a_1=-1} \;;;\; \underline{a_2=-\frac{5}{3}}.$$

$$Para \; \left\{ \begin{matrix} a\neq -1 \\ a\neq -\frac{5}{3} \end{matrix} \right\} \Rightarrow Rango \; A = Rango \; A' = 3 = n^o \; incógnitas \Rightarrow Compatible \; \text{det}\, er \, \text{min}\, ado$$

$$Para \; \alpha=-1 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_2-F_3\} \Rightarrow \underline{Rango \; A'=2}.$$

$$\underline{Para \; a=-1 \Rightarrow Rango \; A = Rango \; A' = 2 < n^o \; incógnitas \Rightarrow Compatible \; in\, \text{det}\, er \, \text{min}\, ado}$$

$$Para \; \alpha=-\frac{5}{3} \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 3 & -\frac{5}{3} & 4 & 6 \\ 1 & -\frac{2}{3} & 1 & 3 \\ -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} & -3 & -3 \end{pmatrix}, \text{ equivalente a efectos de rango a la matriz}$$

$$A''=\begin{pmatrix} 9 & -5 & 12 & 18 \\ 3 & -2 & 3 & 9 \\ -8 & 5 & -15 & -15 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango \; A'' \Rightarrow \{C_1,\, C_2,\, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 9 & -5 & 18 \\ 3 & -2 & 9 \\ -8 & 5 & -15 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 9 & -5 & 6 \\ 3 & -2 & 3 \\ -8 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (90 + 90 + 75 - 96 - 135 - 75) = 3 \cdot (255 - 306) \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ A' = 3}\,.$$

$$\underline{Para\ \ a = -\tfrac{5}{3} \Rightarrow Rango\ A = 2\ ;;\ Rango\ A' = 3 \Rightarrow Incompatible}$$

b)

Resolvemos para α = -1 en cuyo caso el sistema resulta $\begin{cases} 3x - y + 4z = 6 \\ x + z = 3 \\ -2x + y - 3z = -3 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Para resolverlo se desprecia una de las ecuaciones (la tercera) y hacemos $\underline{z = \lambda}$, resultando el sistema:

$$\left.\begin{matrix} 3x - y + 4z = 6 \\ x + z = 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \underline{x = 3 - \lambda} \Rightarrow 3x - y = 6 - 4\lambda\ ;;\ y = 3x - 6 + 4\lambda = 9 - 3\lambda - 6 + 4\lambda = \underline{3 + \lambda = y}\,.$$

$$Solución: \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 3 + \lambda, \ \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}$$

****

3º) Se dan la recta $r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - 2z - 7 = 0$. Obtener los puntos de la recta cuya distancia al plano es igual a uno.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{cases}$.

Un punto genérico de r es $P(4+2\lambda,\ 1-\lambda,\ 2+3\lambda)$.

Sabiendo que la distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ al plano genérico de ecuación $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ es $d(P_0,\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$; aplicándola al punto P y al plano $\pi \equiv 2x + y - 2z - 7 = 0$:

$$d(r,\ \pi) = d(P,\ \pi) = 1 \Rightarrow \frac{|2\cdot(4+2\lambda) + (1-\lambda) - 2\cdot(2+3\lambda) - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{|8 + 4\lambda + 1 - \lambda - 4 - 6\lambda - 7|}{\sqrt{4+1+4}} =$$

$$= \frac{|-2-3\lambda|}{\sqrt{9}} = \frac{|-2-3\lambda|}{3} = 1\ ;;\ |-2-3\lambda| = 3 \Rightarrow \begin{cases} -2 - 3\lambda_1 = 3 \rightarrow 3\lambda_1 = -5\ ;;\ \underline{\lambda_1 = -\frac{5}{3}} \\ \\ 2 + 3\lambda_2 = 3 \rightarrow 3\lambda_2 = 1\ ;;\ \underline{\lambda_2 = \frac{1}{3}} \end{cases}.$$

$$\lambda_1 = -\frac{5}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 + 2\lambda = 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3} \\ y = 1 - \lambda = 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3} \\ z = 2 + 3\lambda = 2 - \frac{15}{3} = -3 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{P_1\left(\frac{2}{3},\ \frac{8}{3},\ -3\right)}}.$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 + 2\lambda = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \\ y = 1 - \lambda = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ z = 2 + 3\lambda = 2 + \frac{3}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{P_2\left(\frac{14}{3},\ \frac{2}{3},\ 3\right)}}.$$

****

4º) Dadas las rectas $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z}{-2}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y=4 \\ 2x+z=4 \end{cases}$, se pide:

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto A(2, 3, 4) y es paralelo a las rectas r y s.

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto B(4, -1, 2) y es perpendicular al plano hallado anteriormente.

---

a)

La expresión de la recta s por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x+y=4 \\ 2x+z=4 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=\lambda} \;;; \underline{y=4-\lambda} \;;; \underline{z=4-2\lambda} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=4-\lambda \\ z=4-2\lambda \end{cases}} \; .$$

Un vector de cada una de las rectas r y s son $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 1,\ -1)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1,\ -1,\ -2)$.

La ecuación general del plano π y es paralelo a las rectas r y s es la siguiente:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \;;;$$

$$-2(x-2)-(y-3)-(z-4)-(z-4)-(x-2)+2(y-3)=0 \;;;\; -3(x-2)+(y-3)-2(z-4)=0 \;;;$$

$$-3x+6+y-3-2z+8=0 \;;;\; -3x+y-2z+11=0 \, .$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 3x-y+2z-11=0}}$$

b)

El vector normal del plano $\pi \equiv 3x-y+2z-11=0$ es $\overrightarrow{n} = (3,\ -1,\ 2)$.

La recta t que pasa por B(4, -1, 2) y es perpendicular al plano $\pi \equiv 3x-y+2z-11=0$ tiene como vector director a $\overrightarrow{n} = (3,\ -1,\ 2)$.

La expresión de t expresada por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\underline{\underline{t \equiv \dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-2}{2}}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dado el punto P(2, 1, -1), se pide:

a) Hallar el punto P' simétrico de P respecto del punto Q(3, 0, 2).

b) Hallar el punto P'' simétrico de P respecto de la recta $r \equiv x-1=y-1=z$.

c) Hallar el punto P''' simétrico de P respecto del plano $\pi \equiv x+y+z=3$.

---

a)

El punto P' simétrico con respecto del punto Q(3, 0, 2) cumple que $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QP'} \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q-P=P'-Q \;;;\; (3,\ 0,\ 2)-(2,\ 1,\ -1)=(x,\ y,\ z)-(3,\ 0,\ 2) \;;;\; (1,\ -1,\ 3)=(x-3,\ y,\ z-2) \Rightarrow$$

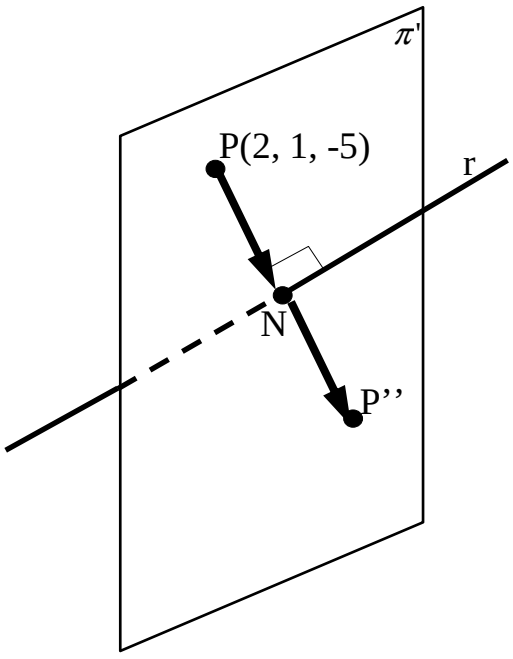
$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x-3=1 \rightarrow x=4 \\ y=-1 \\ z-2=3 \Rightarrow z=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{P'(4,\ -1,\ 5)}}.$$

b)

Un vector director de r es $\underline{\overrightarrow{v_r}=(1,\ 1,\ 1)}$.

El plano π', perpendicular a r por P(2, 1, -1), es el que tiene como vector normal a $\overrightarrow{v_r}$ y contiene al punto P:

$$\left.\begin{matrix} \pi' \equiv x+y+z+D=0 \\ P(2,\ 1,\ -1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2+1-1+D=0 \;;;\; \underline{D=-2} \;\Rightarrow\; \underline{\pi' \equiv x+y+z-2=0}.$$



La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$.

El punto N de intersección de la recta r con el plano π' es el siguiente:

$$\left.\begin{matrix} \pi' \equiv x+y+z-2=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1+\lambda+1+\lambda+\lambda-2=0 \;;;$$

$$3\lambda=0 \;;;\; \underline{\lambda=0} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x=1+0=1 \\ y=1+0=1 \\ z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{N(1,\ 1,\ 0)}.$$

Con objeto de clarificar la situación, la expresamos en la figura anterior de forma aproximada.

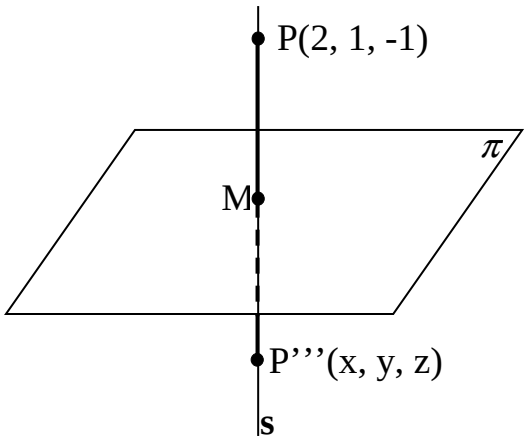
Para que P'' sea el punto simétrico de P con respecto a r, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NP'} \Rightarrow N - P = P' - N \ ;;\ (1,\ 1,\ 0) - (2,\ 1,\ -1) = (x,\ y,\ z) - (1,\ 1,\ 0)\ ;;$$

$$(-1,\ 0,\ 1) = (x-1,\ y-1,\ z) \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-1=-1 \rightarrow \underline{x=0} \\ y-1=0 \rightarrow \underline{y=1} \\ \underline{z=1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{P''(0,\ 1,\ 1)}}.$$

c)

Un vector normal al plano $\pi \equiv x+y+z=3$ es $\vec{n} = (1,\ 1,\ 1)$.



La recta s es la que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π tiene como vector director al vector $\vec{n} = (1,\ 1,\ 1)$; su expresión por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases}.$$

El punto M, intersección del plano π con la recta s, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo cual:

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv x+y+z-3=0 \\ s \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2+\lambda+1+\lambda-1+\lambda-3=0 \ ;;\ 3\lambda-1=0 \Rightarrow \underline{\lambda = \frac{1}{3}}.$$

$$M \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 2+\frac{1}{3} = \frac{7}{3} \\ y = 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ z = -1+\frac{1}{3} = -\frac{2}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{M\left(\frac{7}{3},\ \frac{4}{3},\ -\frac{2}{3}\right)}.$$

Para que P''' sea el punto simétrico de P con respecto a π, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{MP'''} \Rightarrow M-P=P'''-M \;;;\; \left(\frac{7}{3},\ \frac{4}{3},\ -\frac{2}{3}\right)-(2,\ 1,\ -1)=(x,\ y,\ z)-\left(\frac{7}{3},\ \frac{4}{3},\ -\frac{2}{3}\right);;$$

$$\left(\frac{7}{3}-2,\ \frac{4}{3}-1,\ -\frac{2}{3}+1\right)=\left(x-\frac{7}{3},\ y-\frac{4}{3},\ z+\frac{2}{3}\right) \;;;\; \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)=\left(\frac{3x-7}{3},\ \frac{3y-4}{3},\ \frac{3z+2}{3}\right) \;;;$$

$$(1,\ 1,\ 1)=(3x-7,\ 3y-4,\ 3z+2) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x-7=1\rightarrow x=\dfrac{8}{3} \\ 3y-4=1\rightarrow y=\dfrac{5}{3} \\ 3z+2=1\rightarrow z=-\dfrac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{P'''\left(\frac{8}{3},\ \frac{5}{3},\ -\frac{1}{3}\right)}}.$$

****

2º) Dada la función $f(x)=x^2\cdot sen\,x$, se pide:

a) Determinar, justificando la respuesta, si la ecuación f(x) = 0 tiene alguna solución en el intervalo abierto $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$.

b) Calcular la integral de f en el intervalo $[0,\ \pi]$.

c) Obtener la ecuación de la recta normal a la gráfica de $y=f(x)$ en el punto $A[\pi,\ f(\pi)]$. Recuérdese que la recta normal es la recta perpendicular a la recta tangente en el punto.

---

a)

La función $f(x)=x^2\cdot sen\,x$ es continua en su dominio, que es R, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo finito considerado.

El teorema de Bolzano dice que "si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c\in(a,\ b)$ tal que $f(c)=0$".

Si se aplica el teorema de Bolzano a la función $f(x)=x^2\cdot sen\,x$ en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4}\right)$, perteneciente al intervalo $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ se observa que:

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot sen\,\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}\cdot 1=\frac{\pi^2}{4}>0$$

$$f\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)=\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2\cdot sen\,\frac{3\pi}{4}=\frac{9\pi^2}{4}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{9\pi^2\sqrt{2}}{0}<0$$

Lo anterior significa que:

La ecuación $f(x)=0$ *tiene al menos una solución en el* intervalo $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$, *c.q.j.*

b)

En primer lugar resolvemos la integral indefinida.

$$A=\int x^2\cdot sen\,x\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{array}{c}u=x^2\rightarrow du=2x\,dx\\ sen\,x\cdot dx=dv\rightarrow v=-\cos x\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2\cdot(-\cos x)-\int-\cos x\cdot 2x\cdot dx=-x^2\cdot\cos x+2\int x\cdot\cos x\cdot dx=\underline{-x^2\cdot\cos x+2A_1=A}\qquad(*)$$

$$A_1 = \int x \cdot \cos x \cdot dx \Rightarrow \left.\begin{array}{c} u = x \to du = dx \\ \cos x \cdot dx = dv \to v = sen\ x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot sen\ x - \int sen\ x \cdot dx = \underline{x \cdot sen\ x + \cos x + C = A_1}\ .$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de A_1 en el valor de A, queda:

$$A = -x^2 \cdot \cos x + 2 \cdot (x \cdot sen\ x + \cos x) + C = \underline{-x^2 \cos x + 2x\, sen\ x + 2\cos x + C = A}\ .$$

$$\int_0^{\pi} f(x) \cdot dx = \int_0^{\pi} x^2 \cdot sen\ x \cdot dx = \left[-x^2 \cos x + 2x\, sen\ x + 2\cos x\right]_0^{\pi} =$$

$$= \left(-\pi^2 \cos \pi + 2\pi\, sen\ \pi + 2\cos \pi\right) - \left(-0^2 \cos 0 + 2 \cdot 0 \cdot sen\ 0 + 2\cos 0\right) =$$

$$= -\pi^2 \cdot (-1) + 2\pi \cdot 0 + 2 \cdot (-1) - (-0 \cdot 1 + 0 + 2 \cdot 1) = \pi^2 + 0 - 2 + 0 - 2 = \underline{\pi^2 - 4}\ .$$

$$\underline{\underline{\int_0^{\pi} x^2 \cdot sen\ x \cdot dx = \pi^2 - 4}}$$

c)

La pendiente a una función en un punto es el valor de su derivada en ese punto.

$$f'(x) = 2x \cdot sen\ x + x^2 \cdot \cos x \Rightarrow m = f'(\pi) = \pi(2\, sen\ \pi + \pi \cos \pi) = \pi[2 \cdot 0 + \pi \cdot (-1)] = \underline{-\pi^2}\ .$$

Las pendientes de rectas normales son inversas y de signo contrario, por lo cual la pendiente de la recta normal es $m' = \dfrac{-1}{m} = \dfrac{-1}{-\pi^2} = \underline{\dfrac{1}{\pi^2}}$.

$f(\pi) = \pi^2 \cdot sen\ \pi = \pi^2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ Punto de tangencia: <u>A(π, 0)</u>.

La ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m'(x - x_0)$.

Aplicando la fórmula al caso que nos ocupa:

$$y - 0 = \frac{1}{\pi^2} \cdot (x - \pi)\ ;;\ \pi^2 y - x - \pi = 0 \Rightarrow \underline{\underline{Normal:\ n \equiv x - \pi^2 y + \pi = 0}}\ .$$

****

3º) Sean $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\ \ y\ \ \vec{d} \in R^3$, vectores columna. Si $\det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{d}\right)=-1$, $\det\left(\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{d}\right)=3$ y $\det\left(\vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}\right)=-2$, calcular razonadamente el determinante de las siguientes matrices:

a) $\det\left(\vec{a}, 3\vec{d},\ \vec{b}\right)$.

b) $\det\left(\vec{a}-\vec{b},\ \vec{c},\ -\vec{d}\right)$.

c) $\det\left(\vec{d}+3\vec{b},\ 2\vec{a},\ \vec{b}-3\vec{a}+\vec{d}\right)$.

Para la resolución de el presente ejercicio es conveniente recordar las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si se multiplican o dividen todos los elementos de una línea de una matriz, su determinante queda multiplicado por dicho número.

2ª.- Si los elementos de una línea de una matriz se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de los dos determinantes obtenidos al considerar por separado cada sumando de esa línea, y el resto de las líneas iguales a las del determinante inicial.

3ª.- Si se intercambian dos líneas de una matriz, su determinante cambia de signo.

4ª.- Si una matriz tiene dos líneas paralelas proporcionales, su determinante es nulo.

5ª.- Si una de las líneas de una matriz es combinación de otras líneas paralelas a ella, su determinante es nulo.

a)

$$\det\left(\vec{a}, 3\vec{d},\ \vec{b}\right)=-\det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ 3\vec{d}\right)=-3\cdot\det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{d}\right)=-3\cdot(-1)=3.$$

$$\underline{\underline{\det\left(\vec{a}, 3\vec{d},\ \vec{b}\right)=3}}$$

b)

$$\det\left(\vec{a}-\vec{b},\ \vec{c},\ -\vec{d}\right)=\det\left(\vec{a},\ \vec{c},\ -\vec{d}\right)+\det\left(-\vec{b},\ \vec{c},\ -\vec{d}\right)=$$

$$=-\det\left(\vec{a},\ \vec{c},\ \vec{d}\right)+\det\left(\vec{b},\ \vec{c},\ \vec{d}\right)=-3+(-2)=-5.$$

$$\underline{\underline{\det\left(\vec{a}-\vec{b},\ \vec{c},\ -\vec{d}\right)=-5}}$$

c)

$$\det\left(\vec{d}+3\vec{b},\ 2\vec{a},\ \vec{b}-3\vec{a}+\vec{d}\right)=\det\left(\vec{d},\ 2\vec{a},\ \vec{b}-3\vec{a}+\vec{d}\right)+\det\left(3\vec{b},\ 2\vec{a},\ \vec{b}-3\vec{a}+\vec{d}\right)=$$

$$=A+B.$$

$$A = \det\left(\vec{d},\ 2\vec{a},\ \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d}\right) =$$

$$= \det\left(\vec{d},\ 2\vec{a},\ \vec{b}\right) + \det\left(\vec{d},\ 2\vec{a},\ -3\vec{a}\right) + \det\left(\vec{d},\ 2\vec{a},\ \vec{d}\right) = \det\left(\vec{d},\ 2\vec{a},\ \vec{b}\right) + 0 + 0 =$$

$$= 2 \cdot \det\left(\vec{d},\ \vec{a},\ \vec{b}\right) = 2 \cdot \det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{d}\right) = 2 \cdot (-1) = \underline{-2 = A}.$$

$$B = \det\left(3\vec{b},\ 2\vec{a},\ \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d}\right) =$$

$$= \det\left(3\vec{b},\ 2\vec{a},\ \vec{b}\right) + \det\left(3\vec{b},\ 2\vec{a},\ -3\vec{a}\right) + \det\left(3\vec{b},\ 2\vec{a},\ \vec{d}\right) = 0 + 0 + \det\left(3\vec{b},\ 2\vec{a},\ \vec{d}\right) =$$

$$= \det\left(3\vec{b},\ 2\vec{a},\ \vec{d}\right) = 3 \cdot 2 \cdot \det\left(\vec{b},\ \vec{a},\ \vec{d}\right) = -6 \cdot \det\left(\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{d}\right) = -6 \cdot (-1) = \underline{6 = B}.$$

Sustituyendo los valores de A y B obtenidos:

$$\underline{\det\left(\vec{d} + 3\vec{b},\ 2\vec{a},\ \vec{b} - 3\vec{a} + \vec{d}\right) = -2 + 6 = 4}$$

****

4º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x-2z=2 \\ ax-y+z=-8 \\ 2x+az=4 \end{cases}$, se pide:

a) Discutir el sistema según los valores de α.

b) Resolverlo para α = -5.

---

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ a & -1 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ a & -1 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & a & 4 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ a & -1 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix}=-a-4=0 \Rightarrow \underline{a=-4}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a\neq -4 \Rightarrow \; Rango \;\; M = Rango \;\; M'=3=n^o \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; \det er\min ado}}$$

$$Para \;\; a=-4 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & -1 & 1 & -8 \\ 2 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3=2F_1\} \Rightarrow \underline{Rango \;\; M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; a=-4 \Rightarrow Rango \; M = Rango \; M'=2<n^o \;\; incóg \;\Rightarrow\; Compatible \;\; in\det er\min ado}}.$$

b)

Resolvemos para α = -5 que resulta el sistema $\begin{cases} x-2z=2 \\ -5x-y+z=-8 \\ 2x-5z=4 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -8 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}}=\frac{10-8}{5-4}=\frac{2}{1}=\underline{\underline{2=x}}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ -5 & -8 & 1\\ 2 & 4 & -5\end{vmatrix}}{1}=\frac{40+4+40-32-4-50}{1}=\frac{2}{1}=\underline{\underline{2=y}}\,.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ -5 & -1 & -8\\ 2 & 0 & 4\end{vmatrix}}{1}=\frac{-4+4}{1}=\frac{0}{1}=\underline{\underline{0=z}}\,.$$

****