# PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

# UNIVERSIDAD DE MADRID

# JUNIO – 2011 (GENERAL)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

## OPCIÓN A

1º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$:

a ) Calcular el rango de A en función de los valores de α.

b ) En el caso de α = 2, discutir el sistema $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ en función de los valores de b, y resolverlo cuando sea posible.

c ) En el caso de α = 1, resolver el sistema $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

---

a )

$$|A|=\begin{vmatrix} 2a & -2 & a^2 \\ -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix}=2a^3-a^2+4-2a^3+2a-2a=-a^2+4=0 \Rightarrow \underline{a_1=-2}\ ;;\ \underline{a_2=2}\,.$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix} a\neq -2 \\ a\neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A=3}}$$

Para α = -2 es $A=\begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1=-C_3 \Rightarrow \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\neq 0\,.$

Para α = 2 es $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 4\\ -1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow C_1 = C_3 \Rightarrow \begin{vmatrix}4 & -2\\ -1 & 2\end{vmatrix} \neq 0$.

$$\underline{\underline{Para \begin{Bmatrix} a=-2 \\ a=2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A=2}}$$

b )

Para α = 2, el sistema $A\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ b\end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix}4 & -2 & 4\\ -1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ b\end{pmatrix}$, equivalente al sistema de ecuaciones: $\left.\begin{matrix}4x-2y+4z=2\\ -x+2y-z=1\\ 2x+y+2z=b\end{matrix}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 4\\ -1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ y $A'=\begin{pmatrix}4 & -2 & 4 & 2\\ -1 & 2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 2 & b\end{pmatrix}$. Sabemos que Rango A = 2.

Veamos el rango de A’ en función de b:

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & -2 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & b\end{vmatrix}=8b-2-4-8-4-2b=6b-18=0\ ;;\ b-3=0\ ;;\ \underline{b=3}.$$

Para b = 3 → Rango A’ = 2. Para b ≠ 3 → Rango A’ = 3.

$$\underline{\underline{Para\ \ b\neq 3 \Rightarrow Rango\ \ A'=3\neq Rango\ \ A \Rightarrow Incompatible}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ b=3 \Rightarrow Rango\ \ A'=2=Rango\ \ A<n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ In\det er\min ado}}$$

Resolvemos para b = 3, en cuyo caso el sistema es compatible indeterminado es el siguiente: $\left.\begin{matrix}4x-2y+4z=2\\ -x+2y-z=1\\ 2x+y+2z=3\end{matrix}\right\}$. Despreciamos, por ejemplo, la primera ecuación, con lo que el sistema resulta: $\left.\begin{matrix}-x+2y-z=1\\ 2x+y+2z=3\end{matrix}\right\}$. Parametrizando una incógnita, por ejemplo $\underline{z=\lambda}$:

$$\left.\begin{matrix}-x+2y=1+\lambda\\ 2x+y=3-2\lambda\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix}-2x+4y=2+2\lambda\\ 2x+y=3-2\lambda\end{matrix}\right\} \Rightarrow 5y=5\ ;;\ \underline{y=1}.$$

$-x+2y=1+\lambda$ ;; $-x+2=1+\lambda$ ;; $\underline{x=1-\lambda}$.

$$\underline{\underline{\text{Solución}: \left\{\begin{matrix} x=1-\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{matrix}\right\} \forall \lambda \in R}}$$

c )

Para α = 1 el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, que equivale al sistema: $\left.\begin{matrix} 2x-2y+z=-1 \\ -x+y-z=2 \\ 2x+y+z=2 \end{matrix}\right\}$, que es compatible determinado. Resolvemos por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-1^2+4}=\frac{-1+2+4-2-1+4}{-1+4}=\frac{6}{3}=\underline{\underline{2=x}}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{3}=\frac{4-2+2-4+4-1}{3}=\frac{3}{3}=\underline{\underline{1=y}}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{3}=\frac{4+1-8+2-4-4}{3}=\frac{-9}{3}=\underline{\underline{-3=z}}$$

**********

2º) a ) Hallar el volumen del tetraedro que tiene un vértice en el origen y los otros tres vértices en las intersecciones de las rectas $r_1 \equiv x = y = z$, $r_2 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y $r_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ con el plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$.

b )Hallar la recta s que corta perpendicularmente a las rectas $r_4 \equiv \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$ y $r_5 \equiv \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$.

---

a )

Los puntos de intersección del plano $\pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24$ con cada una de las rectas son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 \equiv x = y = z \\ \pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x + 3x + 7x = 24 \;;;\; 12x = 24 \;;;\; x = y = z = 2 \Rightarrow \underline{A(2,\ 2,\ 2)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} r_2 \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ \pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x + 0 + 0 = 24 \;;;\; 2x = 24 \;;;\; x = 12 \Rightarrow \underline{B(12,\ 0,\ 0)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} r_3 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ \pi \equiv 2x + 3y + 7z = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 + 3y + 0 = 24 \;;;\; 3y = 24 \;;;\; y = 8 \Rightarrow \underline{C(0,\ 8,\ 0)}$$

Los vectores que determinan el tetraedro son:

$$\overrightarrow{OA} = \underline{(2,\ 2,\ 2)} \;;;\; \overrightarrow{OB} = \underline{(12,\ 0,\ 0)} \;;;\; \overrightarrow{OC} = \underline{(0,\ 8,\ 0)}$$

Sabiendo que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan, en valor absoluto, será:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \left[\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}\right] \right| = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \left| 12 \cdot 8 \cdot 2 \right| = 2 \cdot 16 = \underline{\underline{32\ u^3 = V_{OABC}}}$$

b )

Los vectores directores de $r_4$ y $r_5$ son $\overrightarrow{v_4} = (1,\ 2,\ -2)$ y $\overrightarrow{v_5} = (2,\ 3,\ -1)$.

La recta s pedida, por ser perpendicular a $r_4$ y $r_5$, tiene como vector director a $\overrightarrow{w}$, que es el producto vectorial de los vectores directores de $r_4$ y $r_5$:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v_4} \wedge \overrightarrow{v_5} = (1,\ 2,\ -2) \wedge (2,\ 3,\ -1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-2i - 4j + 3k - 4k + 6i + j) =$$

$= (4i - 3j - k) = \underline{(4,\ -3,\ -1) = \overrightarrow{w}}$.

La recta s es la intersección de los planos $\pi$, que contiene a $r_4$ y tiene como vectores directores al vector director de $r_4$ y al vector $\overrightarrow{w}$, y el plano $\pi'$, que contiene a $r_5$ y tiene como vectores directores al vector director de $r_5$ y al vector $\overrightarrow{w}$.

Un punto de $r_4$ es A(-1, 5, -1).

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{v_4},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-5 & z+1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0\ ;;$$

$$-2(x+1) - 3(z+1) - 8(y-5) - 8(z+1) - 6(x+1) + (y-5) = 0\ ;;\ -8(x+1) - 7(y-5) - 11(z+1) = 0\ ;;$$

$$8x + 8 + 7y - 35 + 11z + 11 = 0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv 8x + 7y + 11z - 16 = 0}.$$

Un punto de $r_5$ es B(0, -1, 1).

$$\pi'\left(B;\ \overrightarrow{v_5},\ \overrightarrow{w}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -3x - 6(z-1) - 4(y+1) - 12(z-1) - 3x + 2(y+1) = 0\ ;;$$

$$-6x - 2(y+1) - 18(z-1) = 0\ ;;\ 3x + y + 1 + 9z - 9 = 0 \Rightarrow \underline{\pi' \equiv 3x + y + 9z - 8 = 0}.$$

La expresión por dos ecuaciones implícitas de s es:

$$\underline{\underline{s \equiv \begin{cases} 8x + 7y + 11z - 16 = 0 \\ 3x + y + 9z - 8 = 0 \end{cases}}}$$

**********

3º) a ) Calcular la integral: $I=\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\cdot dx$.

b ) Hallar los valores mínimo y máximo absolutos de la función $f(x)=\sqrt{12-3x^2}$ .

---

a )

$$I=\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l|l} 4+5x^2=t & x=3\to t=49 \\ 10x\cdot dx=dt & \\ x\cdot dx=\frac{1}{10}\cdot dt & x=1\to t=9 \end{array}\right\} \Rightarrow I=\int_9^{49}\sqrt{t}\cdot\frac{1}{10}dt=\frac{1}{10}\int_9^{49} t^{\frac{1}{2}}\cdot dt=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\left[\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_9^{49}=\frac{1}{10}\cdot\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_9^{49}=\frac{2}{10\cdot 3}\cdot\left[t\sqrt{t}\right]_9^{49}=\frac{1}{15}\cdot\left(49\sqrt{49}-9\sqrt{9}\right)=\frac{1}{15}\cdot(49\cdot 7-9\cdot 3)=$$

$$=\frac{1}{15}\cdot(343-27)=\frac{1}{15}\cdot 316=\underline{\underline{\frac{316}{15}\,u^2=I}}$$

b )

La función $f(x)=\sqrt{12-3x^2}$ está definida en el intervalo $[-2,\ 2]$ y es continua en su dominio.

Por ser $f(x)=f(-x)$ la función es simétrica con respecto al eje Y.

Una función tiene un máximo o mínimo relativo para los valores que anulan su primera derivada:

$$f'(x)=\frac{-6x}{2\sqrt{12-3x^2}}=-\frac{3x}{\sqrt{12-3x^2}}=0 \Rightarrow \underline{x=0}\,.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos hay que recurrir a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera se trata de un mínimo relativo y si es positiva, de un máximo relativo.

$$f''(x)=-\frac{3\cdot\sqrt{12-3x^2}-3x\cdot\frac{-6x}{2\sqrt{12-3x^2}}}{\left(\sqrt{12-3x^2}\right)^2}=-3\cdot\frac{\sqrt{12-3x^2}+\frac{3x^2}{\sqrt{12-3x^2}}}{12-3x^2}=$$

$$=-3\cdot\frac{12-3x^2+3x^2}{(12-3x^2)\sqrt{12-3x^2}}=\underline{\frac{-12}{(4-x^2)\sqrt{12-3x^2}}=f''(x)}\,.$$

$$f''(0)=\frac{-12}{(4-0)\sqrt{12-0}}=\frac{-12}{4\sqrt{12}}<0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para x = 0}.$$

Por ser una función continua y tener un solo máximo relativo, éste es un máximo absoluto.

$$f(0)=\sqrt{12-0}=\sqrt{12}=2\sqrt{3} \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Máximo absoluto}: A\left(0,\ 2\sqrt{3}\right)}}.$$

Por tratarse de una función continua y simétrica con respecto a Y, la función tiene dos puntos mínimos absolutos en sus extremos, que son los siguientes:

$$f(-2)=f(2)=\sqrt{12-3\cdot 2^2}=\sqrt{0}=0 \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Mínimos absolutos}: B(-2,\ 0)\ y\ C(2,\ 0)}}.$$

**********

4º) a ) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

b ) Demostrar que la ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raíz real, cualquiera que sea el número m. Justificar la respuesta indicando qué teoremas se usan.

---

a )

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}} = \sqrt{\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+\sqrt{x}}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = \sqrt{1} = 1$$

b )

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Considerando la función $f(x) = 4x^5 + 3x + m$, su derivada es $f(x) = 20x^4 + 3$, que es mayor de cero para cualquier valor real de x, lo cual significa que la función f(x) es monótona creciente en su dominio.

La función $f(x) = 4x^5 + 3x + m$, por ser polinómica, es continua y derivable en su dominio, que es R.

De lo anterior se deduce que, necesariamente, corta al eje de abscisas en un solo punto lo que justifica que

La ecuación $4x^5 + 3x + m = 0$ sólo tiene una raíz real, cualquiera que sea m, c.q.d.

**********

# OPCIÓN B

1º) Dada la función $f(x)=\dfrac{ax^4+1}{x^3}$, se pide:

a ) Determinar el valor de α para que la función posea un mínimo relativo en x = 1.

b ) Obtener las asíntotas de la gráfica de $y=f(x)$ para α = 1.

c ) Esbozar la gráfica de la función para α = 1.

---

a )

Una función tiene un mínimo relativo en un punto para los valores de x que anulan la primera derivada y hacer positiva a la segunda derivada.

$$f'(x)=\frac{4ax^3\cdot x^3-\left(ax^4+1\right)\cdot 3x^2}{\left(x^3\right)^2}=\frac{4ax^6-3x^2\left(ax^4+1\right)}{x^6}=\frac{4ax^4-3\left(ax^4+1\right)}{x^4}=\frac{4ax^4-3ax^4-3}{x^4}=$$

$$=\underline{\frac{ax^4-3}{x^4}=f'(x)}.$$

$$f'(1)=0\Rightarrow\frac{a\cdot 1^4-3}{1^4}=0\ ;;\ a-3=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{a=3}}.$$

b )

Para α = 1 la función es $f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^3}$. Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales y oblicuas.

Horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+1}{x^3}=\infty\ \Rightarrow\ \underline{No\ \ tiene.}$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$x^3=0\ ;;\ \underline{\underline{x=0}}$ (El eje de ordenadas es asíntota vertical).

Oblicuas: son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^4+1}{x^3}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+1}{x^4}=\underline{1=m}$$

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left( \frac{x^4 + 1}{x^3} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4 + 1 - x^4}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3} = \underline{0 = n}$$

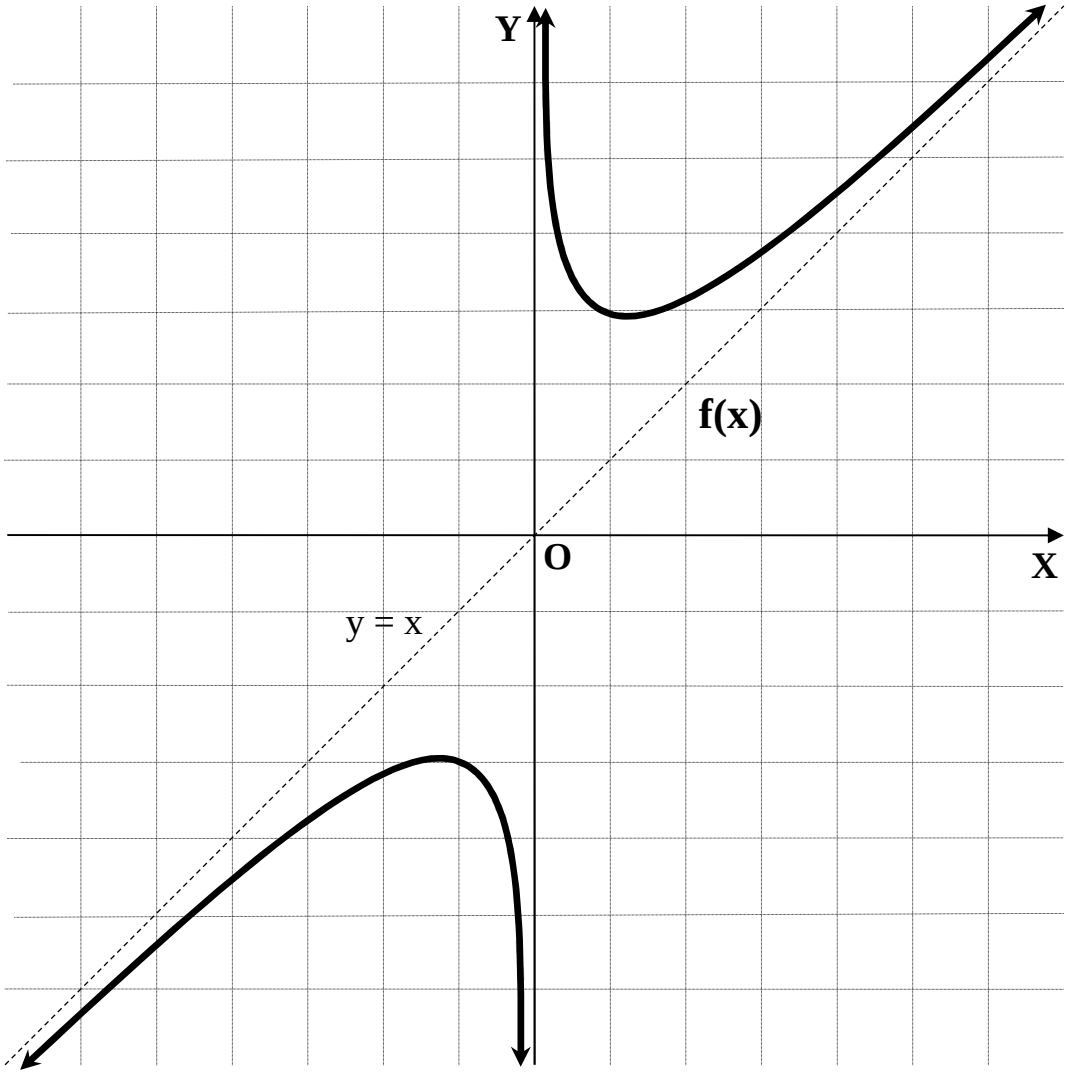
Asíntota oblicua: y = x

c )

La función para α = 1 es $f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3}$.

El dominio de la función es: $D(f) \Rightarrow R - \{0\}$.

Teniendo en cuenta que $f(-x) = \frac{(-x)^4 + 1}{(-x)^3} = \frac{x^4 + 1}{-x^3} = -\frac{x^4 + 1}{x^3} = -f(x)$, la función es simétrica con respecto al origen.




La función no tiene puntos de corte con el eje X por ser: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^4 + 1}{x^3} = 0$ ;;

$x^4 + 1 = 0$ ;; $x^4 = -1 \Rightarrow x \notin R$.

Por ser $f''(x)=\frac{12}{x^5}$, la concavidad y convexidad de la función es la siguiente:

$$f''(x)=\frac{12}{x^5} \Rightarrow \begin{cases} \text{Para } x<0 \Rightarrow f''(x)<0 \Rightarrow \underline{\text{Convexidad } (\cup) \Rightarrow (-\infty,\ 0)} \\ \\ \text{Para } x>0 \Rightarrow f''(x)>0 \Rightarrow \underline{\text{Concavidad } (\cap) \Rightarrow (0,\ +\infty)} \end{cases}.$$

Con los datos anteriores, la representación aproximada de la función es la que aparece en la figura adjunta.

**********

2º) a ) Discutir el sistema de ecuaciones A · X = B, donde $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} m \\ m \\ m+2 \end{pmatrix}$, según los valores de m.

b ) Resolver el sistema en los casos de m = 0 y m = 1.

---

a )

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & m-1 & m \\ 0 & m-1 & 1 & m \\ m-2 & 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & m-1 \\ 0 & m-1 & 1 \\ m-2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(m-2)-(m-2)(m-1)^2=(m-2)\left[1-(m-1)^2\right]=$$

$$=(m-2)\left[1-\left(m^2-2m+1\right)\right]=(m-2)\left(1-m^2+2m-1\right)=(m-2)\left(-m^2+2m\right)=-m(m-2)^2=0\Rightarrow\begin{cases} m_1=0 \\ m_2=2 \end{cases}.$$

$$Para\ \begin{Bmatrix} m\neq 0 \\ m\neq 2 \end{Bmatrix}\Rightarrow Rango\ A=Rango\ A'=3=n^o\ incóg.\Rightarrow Compatible\ Deter\min ado$$

Para m = 0 es $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; ambas tienen rango 2 por tener las primeras y segundas filas iguales y de signo contrario.

$$Para\ m=0\Rightarrow Rango\ A=Rango\ A'=2<n^o\ incóg.\Rightarrow Compatible\ In\det er\min ado$$

Para m = 2 es $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix} Rango\ A=1 \\ Rango\ A'\geq 2 \end{Bmatrix}\Rightarrow$

$$Para\ m=2\Rightarrow Rango\ A=1\ ;;\ Rango\ A'\geq 2\Rightarrow Incompatible$$

b )

Para m = 0 el sistema A · X = B resulta: $\begin{cases} y - z = 0 \\ -y + z = 0 \\ -2x = 2 \end{cases}$, equivalente a $\begin{cases} y - z = 0 \\ x = -1 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Haciendo $\underline{z = \lambda}$:

$$\underline{\underline{\textit{Solución}: \left\{ \begin{matrix} x = -1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{matrix} \right\} \forall \lambda \in R}}$$

Para m = 1 el sistema A · X = B resulta: $\begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \\ -x = 3 \end{cases}$, que es compatible determinado.

$$\underline{\underline{\textit{Solución}: \; x = -3 \;;; \; y = 1 \;;; \; z = 1}}$$

**********

3º) Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x + y - 2z = 1$ y $\pi_2 \equiv x - y + 2z = 1$, se pide:

a ) Estudiar su posición relativa.

b ) En el caso de que los planos sean paralelos hallar la distancia entre ellos; en caso de que se corten, hallar un punto y un vector de dirección de la recta que determinan.

---

a )

Vamos a hacer el estudio por los vectores normales a los planos.

Un vector normal al plano $\pi_1$ *es* $\overrightarrow{n_1} = (2,\ 1,\ -2)$.

Un vector normal al plano $\pi_2$ *es* $\overrightarrow{n_2} = (1,\ -1,\ 2)$.

Los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ no son paralelos por ser:

$$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1} = \frac{-2}{2}.$$

Los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ no son perpendiculares por ser:

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = (2,\ 1,\ -2) \cdot (1,\ -1,\ 2) = 2 - 1 - 4 = -3 \neq 0.$$

De lo anterior se deduce que los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ son oblicuos, se cortan en una recta.

b )

La recta que determinan los planos es $r \equiv \begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$.

Para hallar un punto y un vector director de r la expresamos en forma vectorial:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \begin{matrix} 2x + y = 1 + 2\lambda \\ x - y = 1 - 2\lambda \end{matrix} \Rightarrow 3x = 2\ ;;\ \underline{x = \frac{2}{3}}\ ;;\ x - y = 1 - 2\lambda\ ;;$$

$$y = x - 1 + 2\lambda = \frac{2}{3} - 1 + 2\lambda = \underline{-\frac{1}{3} + 2\lambda = y} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}.$$

Un punto y un vector de r son: $\underline{\underline{P\left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ 0\right)}}$ *y* $\underline{\underline{\vec{v} = (0,\ 2,\ 1)}}$

**********

4º) a ) Hallar la ecuación del plano $\pi_1$ que pasa por los puntos A(1, 0, 0), B(0, 2, 0) y C(0, 0, 1).

b ) Hallar la ecuación del plano $\pi_2$ que contiene al punto P(1, 2, 3) y es perpendicular al vector $\vec{v} = (-2,\ 1,\ 1)$.

c ) Hallar el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P.

---

a )

Los puntos A(1, 0, 0), B(0, 2, 0) y C(0, 0, 1) determinan los siguientes vectores:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 2,\ 0) - (1,\ 0,\ 0) = (-1,\ 2,\ 0).$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0,\ 0,\ 1) - (1,\ 0,\ 0) = (-1,\ 0,\ 1).$$

La expresión del plano $\pi_1$ dada por su ecuación general, considerando los vectores anteriores y, por ejemplo, el punto A, es la siguiente:

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 2(x-1) + 2z + y = 0 \ \Rightarrow\ \underline{\underline{\pi_1 \equiv 2x + y + 2z - 2 = 0}}.$$

b )

La ecuación del haz de planos cuyo vector normal es $\vec{v} = (-2,\ 1,\ 1)$ tiene la siguiente expresión general: $\pi \equiv -2x + y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz $\pi$, el plano $\pi_2$ que pasa por P(1, 2, 3) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv -2x + y + z + D = 0 \\ P(1,\ 2,\ 3) \end{array}\right\} \Rightarrow -2 \cdot 1 + 2 + 3 + D = 0 \Rightarrow \underline{D = -3} \Rightarrow \underline{\underline{\pi_2 \equiv 2x - y - z + 3 = 0}}.$$

c )

Los vectores que determinan el tetraedro son:

$$\vec{u} = (-1,\ 2,\ 0),\ \vec{v} = (-1,\ 0,\ 1) \text{ y } \vec{w} = \overrightarrow{AP} = P - A = (1,\ 2,\ 3) - (1,\ 0,\ 0) = (0,\ 2,\ 3).$$

Sabiendo que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan, en valor absoluto, será:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \left[ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w} \right] \right| = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot |2 + 6| = \frac{8}{6} = \underline{\underline{\frac{4}{3}\ u^3 = V_{ABCP}}}$$

**********