PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE MADRID

JUNIO – 2011 (ESPECÍFICO)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

OPCIÓN A

1º) Dado el sistema $\begin{cases} \lambda x + \lambda z = 2 \\ x + \lambda y - z = 1 \\ x + 3y + z = 2\lambda \end{cases}$, se pide:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ.

b) Resolver el sistema para λ = 1.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \;\; y \;\; M' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \lambda & 2 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función de λ es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - \lambda^2 + 3\lambda = 6\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\lambda = 0}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ \lambda \neq 0 \;\Rightarrow\; Rango\ \ M = Rango\ \ M' = 3 = n^{o}\ \ incóg. \;\Rightarrow\; Compatible\ \ Determinado}}$$

Ahora vamos a estudiar el rango de la matriz ampliada M' para λ = 0.

$$Para\ \ \lambda=0\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix}0&0&0&2\\1&0&-1&1\\1&3&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\{C_1,\ C_2,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix}0&0&2\\1&0&1\\1&3&0\end{vmatrix}=6\neq 0\Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ \lambda=0\ \Rightarrow\ Rango\ \ M=2\ \ ;;\ \ Rango\ \ M'=3\ \Rightarrow\ Incompatible}}$$

b)

Resolvemos para el caso de λ = 1. El sistema resulta $\begin{cases}x+z=2\\x+y-z=1\\x+3y+z=2\end{cases}$, que es compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{r}x+z=2\\x+y-z=1\\x+3y+z=2\end{array}\right\}\rightarrow z=2-x\ \ \Rightarrow\ \ \left.\begin{array}{r}x+y-(2-x)=1\\x+3y+(2-x)=2\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}x+y-2+x=1\\x+3y+2-x=2\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}2x+y=3\\3y=0\end{array}\right\}\rightarrow \underline{\underline{y=0}}\ ;;$$

$$2x+y=3\ ;;\ 2x=3\ ;;\ \underline{\underline{x=\frac{3}{2}}}\ ;;\ z=2-x=2-\frac{3}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}=z}}$$

****

2º) Dada la función $f(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}$, se pide:

a) Obtener, si existen, los máximos y mínimos relativos, y las asíntotas de f.

b) Calcula el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas x = 0 y x = 3.

----

a)

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo para los valores de x que anulan la primera derivada.

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)^2-(x-1)\cdot 2(x+1)\cdot 1}{(x+1)^4}=\frac{(x+1)-2(x-1)}{(x+1)^3}=\frac{x+1-2x+2}{(x+1)^3}=\underline{\frac{3-x}{(x+1)^3}=f'(x)}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{3-x}{(x+1)^3}=0 \;;;\; 3-x=0 \;;;\; \underline{x=3}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, se trata de un máximo relativo.

$$f''(x)=\frac{-1\cdot(x+1)^3-(3-x)\cdot 3(x+1)^2\cdot 1}{(x+1)^6}=\frac{-(x+1)-3(3-x)}{(x+1)^4}=\frac{-x-1-9+3x}{(x+1)^4}=\frac{2x-8}{(x+1)^4}=$$

$$=\underline{\frac{2(x-4)}{(x+1)^4}=f''(x)}.$$

$$f''(3)=\frac{2\cdot(3-4)}{(3+1)^4}=\frac{-2}{4^4}<0 \Rightarrow \underline{\text{Máximo relativo para x = 3.}}$$

$$f(3)=\frac{3-1}{(3+1)^2}=\frac{2}{4^2}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8} \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Máximo relativo}: A\left(3,\ \frac{1}{8}\right)}}.$$

Las asíntotas son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{(x+1)^2}=0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{El eje X es asíntota horizontal.}}}$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$(x+1)^2=0 \;;;\; x+1=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=-1}}.$$

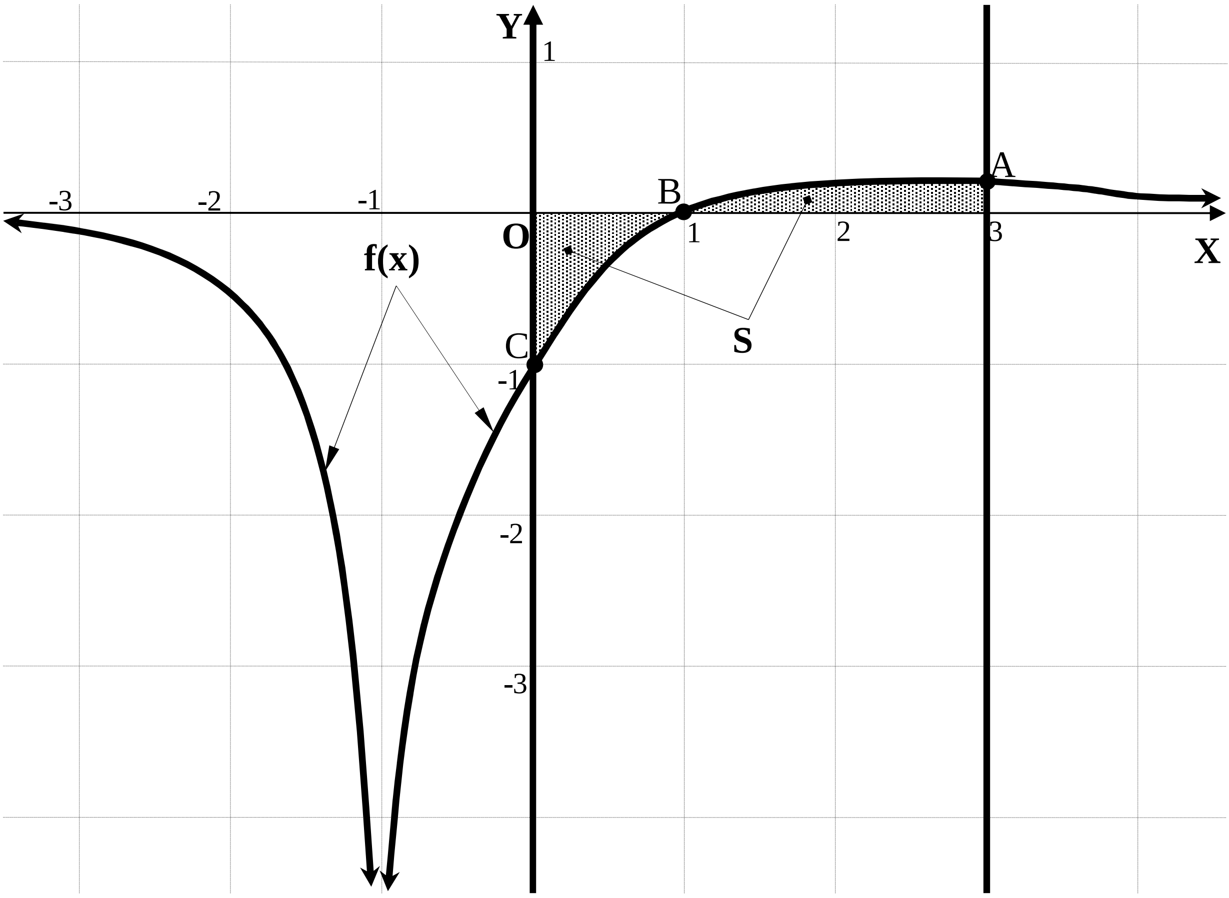
Oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x-1}{(x+1)^2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{x(x+1)^2} = \underline{0 = m}.$$

<u>No tiene asíntotas oblicuas.</u>

b)

Con los datos del apartado anterior y teniendo en cuenta que la función corta a los ejes de coordenadas en los puntos B(0, -1) y C(1, 0), la representación gráfica de la situación es la que aparece en el gráfico adjunto.



$$S = \int_1^0 f(x) \cdot dx + \int_1^3 f(x) \cdot dx = [F(x)]_1^0 + [F(x)]_1^3 = F(0) - F(1) + F(3) - F(1) = \underline{F(0) + F(3) - 2F(1)}.$$

Siendo $F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int \frac{x-1}{(x+1)^2} \cdot dx \Rightarrow \frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{M}{x+1} + \frac{N}{(x+1)^2} = \frac{M(x+1)+N}{(x+1)^2} =$

$$= \frac{M(x+1)+N}{(x+1)^2} = \frac{Mx+M+N}{(x+1)^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \underline{M = 1} \\ M + N = -1 \end{array} \right\} \to \underline{N = -2} \Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{x+1} \cdot dx - 2\int \frac{1}{(x+1)^2} \cdot dx =$$

$$= L(x+1) - 2\int (x+1)^{-2} \cdot dx = L(x+1) - 2 \cdot \frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \underline{L(x+1) + \frac{2}{x+1} = F(x)}.$$

Sustituyendo el valor obtenido de F(x) en la expresión de S:

$$S = F(0) + F(3) - 2F(1) = \left[L(0+1) + \frac{2}{0+1}\right] + \left[L(3+1) + \frac{2}{3+1}\right] - 2\left[L(1+1) + \frac{2}{1+1}\right] =$$

$$= L1 + 2 + L4 + \frac{2}{4} - 2(L2+1) = 0 + 2 + 2L2 + \frac{1}{2} - 2L2 - 2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}\, u^2 = S}}$$

****

3º) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$ y $s \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{1}$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de r y s.

b) Determinar la ecuación del plano π que contiene a las recta r y s.

----

a)

Las rectas r y s tienen el mismo vector director, $\overrightarrow{u} = (2,\ 1,\ 1)$, lo que significa que son paralelas o coincidentes; para diferenciar el caso tomamos el punto de la recta r, A(-1, 0, -1), y comprobamos si se satisface la ecuación de s, en cuyo caso serán coincidentes y si no se satisface serán paralelas.

$$\left.\begin{array}{l} s \equiv \frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z}{1} \\ A(-1,\ 0,\ -1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1-5}{2} \neq \frac{0-4}{1} \neq \frac{-1}{1} \Rightarrow \underline{\text{El punto A no pertenece a s}}.$$

Las rectas r y s son paralelas.

b)

Un punto de s es B(5, 4, 0). Los puntos A y B determinan el siguiente vector:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5,\ 4,\ 0) - (-1,\ 0,\ -1) = (6,\ 4,\ 1).$$

La expresión general del plano π es la siguiente:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x+1 & y & z+1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ;; \ (x+1) + 6y + 8(z+1) - 6(z+1) - 4(x+1) - 2y = 0 \ ;;$$

$$-3(x+1) + 4y + 2(z+1) = 0 \ ;; \ -3x - 3 + 4y + 2z + 2 = 0 \ ;; \ \underline{\underline{\pi \equiv 3x - 4y - 2z + 1 = 0}}.$$

****

4º) Dados los planos $\alpha \equiv 2x + y + 2z + 1 = 0$ y $\beta \equiv x - 2y + 6z = 0$, se pide:

a) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta r determinada por la intersección de los planos α y β.

b) Determinar el plano γ que es paralelo al plano α y pasa por $P(\sqrt{2},\ 1,\ 0)$.

La expresión de r por unas ecuaciones implícitas es $r \equiv \begin{cases} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases}$.

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y + 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + 6z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x + y = -1 - 2\lambda \\ x - 2y = -6\lambda \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 4x + 2y = -2 - 4\lambda \\ x - 2y = -6\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5x = -2 - 10\lambda \ ;;$$

$$\underline{x = -\frac{2}{5} - 2\lambda} \ ;; \ y = -1 - 2\lambda - 2x = -1 - 2\lambda + \frac{4}{5} + 4\lambda = \underline{-\frac{1}{5} + 2\lambda = y}.$$

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = -\frac{2}{5} - 2\lambda \\ y = -\frac{1}{5} + 2\lambda, \ \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}}}$$

b)

El haz de planos paralelos al plano $\alpha \equiv 2x + y + 2z + 1 = 0$ es una expresión de la forma $\psi \equiv 2x + y + 2z + D = 0$.

De todos los infinitos planos del haz anterior, el plano γ que contiene al punto $P(\sqrt{2},\ 1,\ 0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{matrix} \psi \equiv 2x + y + 2z + D = 0 \\ P(\sqrt{2},\ 1,\ 0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2\sqrt{2} + 1 + 2 \cdot 0 + D = 0 \ ;; \ \underline{D = -2\sqrt{2} - 1} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\gamma \equiv 2x + y + 2z - 2\sqrt{2} - 1 = 0}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular $A^2 - 4A + 3I$.

b) Demostrar que la matriz A^{-1} es $\frac{1}{3}(4I - A)$.

c) Hallar la matriz inversa de la matriz $A - 2I$.

----

a)

$$A^2-4A+3I=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4-1+2 & -2-0-2 & -2+1-3 \\ 2+0+2 & -1+0-2 & -1-0-3 \\ -4+2-6 & 2+0+6 & 2-2+9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \\ -8 & 8 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ 4 & -3 & -4 \\ -8 & 8 & 9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -8 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \\ 8 & -8 & -12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\underline{\underline{O=A^2-4A+3I}}\ .$$

b)

Para hallar la inversa de la matriz A vamos a utilizar el método de Gauss-Jordan.

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\leftrightarrow F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} F_2\to F_2-2F_1 \\ F_3\to F_3+2F_1 \end{array}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\to -F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_3\to F_3-2F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow\{F_3\to \tfrac{1}{3}F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_1 \to F_1 + F_3 \\ F_2 \to F_2 + F_3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(4I - A) = \frac{1}{3} \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right] = \underline{\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}}.$$

$$\underline{\underline{A^{-1} = \frac{1}{3}(4I - A),\ c.q.d.}}$$

c)

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$|A - 2I| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 4 + 1 = \underline{1} \ ;;\ \underline{(A - 2I)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$Adj\ (A - 2I)^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}}$$

Otra forma de resolver éste apartado es considerando el apartado a), en particular teniendo en cuenta que: $A^2 - 4A + 3I = A^2 - 4A + 4I - I = (A - 2I)^2 - I = O \Rightarrow \underline{(A - 2I)^2 = I}$.

De lo anterior se deduce que:

$(A - 2I)^2 = (A - 2I)(A - 2I) = I \Rightarrow A - 2I = \dfrac{1}{A - 2I} = \underline{\underline{(A - 2I)^{-1} = A - 2I}}$, como se puede comprobar en el ejercicio.

****

2º) Dados los puntos A(1, -3, 0), B(3, 1, -2), C(7, 2, 3), D(5, -2, 5) y E(1, 0, 2) se pide:

a) Demostrar que los puntos A, B, C y D son coplanarios.

b) Demostrar que el polígono ABCD es un paralelogramo y calcular su área.

c) Hallar la distancia del punto E al plano π determinado por los puntos A, B, C y D.

----

a)

Los puntos A(-1, 3, 0), B(3, 1, -2), C(7, 2, 3), D(5, -2, 5) determinan los vectores:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3,\ 1,\ -2) - (1,\ -3,\ 0) = (2,\ 4,\ -2).$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (7,\ 2,\ 3) - (1,\ -3,\ 0) = (6,\ 5,\ 3).$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD} = D - A = (5,\ -2,\ 5) - (1,\ -3,\ 0) = (4,\ 1,\ 5).$$

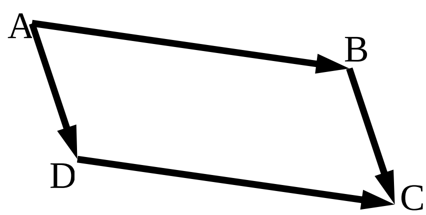
Demostrar que los puntos A, B, C y D son coplanarios es equivalente a demostrar que los vectores $\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\}$ son linealmente dependientes, es decir, que su rango sea menor que tres.

$$Rango\ \{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 6 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 50 - 12 + 48 + 40 - 6 - 120 = 138 - 138 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Rango\ \{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\} = 2}.$$

<u>Queda demostrado que los puntos A, B, C y D son coplanarios.</u>

b)



Demostrar que el polígono ABCD es un paralelogramo es equivalente a demostrar que son iguales los vectores $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = B - A = (3,\ 1,\ -2) - (1,\ -3,\ 0) = (2,\ 4,\ -2) \\ \overrightarrow{DC} = C - D = (7,\ 2,\ 3) - (5,\ -2,\ 5) = (2,\ 4,\ -2) \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD} = D - A = (5,\ -2,\ 5) - (1,\ -3,\ 0) = (4,\ 1,\ 5) \\ \overrightarrow{BC} = C - B = (7,\ 2,\ 3) - (3,\ 1,\ -2) = (4,\ 1,\ 5) \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}}.$$

El área de un paralelogramo es igual al módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan:

$$S = \left| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} \right| = \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \end{matrix} \right\| = \left| 20i - 8j + 2k - 16k + 2i - 10j \right| = \left| 22i - 18j - 14k \right| =$$

$$= 2 \cdot \left| 11i - 9j - 7k \right| = 2 \cdot \sqrt{11^2 + (-9)^2 + (-7)^2} = 2 \cdot \sqrt{121 + 81 + 49} = \underline{\underline{2\sqrt{251}\ u^2 = S}}.$$

c)

La expresión general del plano π es la siguiente: $\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z \\ 2 & 4 & -2 \\ 6 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$;

$$12(x-1) - 12(y+3) + 10z - 24z + 10(x-1) - 6(y+3) = 0 \ ;; \ 22(x-1) - 18(y+3) - 14z = 0 \ ;;$$

$$11(x-1) - 9(y+3) - 7z = 0 \ ;; \ 11x - 11 - 9y - 27 - 7z = 0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv 11x - 9y - 7z - 38 = 0}.$$

Sabiendo que la distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ al plano genérico de ecuación $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ es $d(P_0,\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$; aplicándola al punto $E(1,\ 0,\ 2)$ y al plano $\pi \equiv 11x - 9y - 7z - 38 = 0$, es:

$$d(E,\ \pi) = \frac{|11 \cdot 1 - 9 \cdot 0 - 7 \cdot 2 - 38|}{\sqrt{11^2 + (-9)^2 + (-7)^2}} = \frac{|11 - 14 - 38|}{\sqrt{251}} = \frac{41}{\sqrt{251}} = \underline{\underline{\frac{41\sqrt{251}}{251}\ unidades = d(E,\ \pi)}}$$

****

3º) Calcular los siguientes límites: a) $\lim_{x \to 0^+} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} \right)$. b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+tag\ x} - \sqrt{1-tag\ x}}{x}$.

----

a)

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} \right) = 0 \cdot e^{\frac{1}{0}} = 0 \cdot e^{\infty} = 0 \cdot \infty \Rightarrow In\det. \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{0}}}{\frac{1}{0}} = \frac{e^{\infty}}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow In\det er. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L'Hopital \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = \underline{\underline{+\infty}}.$$

b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+tag\ x} - \sqrt{1-tag\ x}}{x} = \frac{\sqrt{1+tag\ 0} - \sqrt{1-tag\ 0}}{0} = \frac{\sqrt{1+0} - \sqrt{1-0}}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow In\det r. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L'Hopital \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2\sqrt{1+tag\ x}} - \frac{\frac{-1}{\cos^2 x}}{2\sqrt{1-tag\ x}}}{1} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2\sqrt{1+tag\ x}} + \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2\sqrt{1-tag\ x}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sqrt{1+tag\ x}} + \frac{1}{\sqrt{1-tag\ x}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) = \underline{\underline{1}}.$$

****

4º) Dada la función $f(x)=\frac{1}{2}-sen\ x$, calcular el área del recinto acotado comprendido entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas x = 0 y x = $\frac{\pi}{2}$.

Los puntos de corte con el eje OX de la función $f(x)$ en el intervalo $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ son los siguientes:

$$f(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}-sen\ x=0\ ;;\ sen\ x=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ x=30º=\frac{\pi}{6}\ \Rightarrow\ \underline{A\left(0,\ \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Por ser $f(x)=\frac{1}{2}-sen\ x$ continua en su dominio, que es R, los signos de la función en el intervalo $\left(0,\ \frac{\pi}{6}\right)$ son positivos y los correspondientes al intervalo $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right)$ son negativos.

De lo expuesto anteriormente se deduce que el área pedida es la siguiente:

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\cdot dx-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cdot dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\cdot dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} f(x)\cdot dx=\left[F(x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}+\left[F(x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}=$$

$$=F\left(\tfrac{\pi}{6}\right)-F(0)+F\left(\tfrac{\pi}{6}\right)-F\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\underline{2F\left(\tfrac{\pi}{6}\right)-F(0)-F\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=S}\ . \qquad (*)$$

Siendo $F(x)=\int\left(\frac{1}{2}-sen\ x\right)\cdot dx=\underline{\frac{x}{2}+\cos\ x=F(x)}$, sustituyendo en (*), resulta:

$$S=2F\left(\tfrac{\pi}{6}\right)-F(0)-F\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=2\left(\frac{\frac{\pi}{6}}{2}+\cos\ \frac{\pi}{6}\right)-\left(\frac{0}{2}+\cos\ 0\right)-\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}+\cos\ \frac{\pi}{2}\right)=$$

$$=2\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-0-1-\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{4}=\underline{\underline{\left(\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}\right)u^2=S}}\ .$$

****